MIECZYSŁAW JEŻEWSKI

FIZYKA

Podręcznik
dla wyższych szkół technicznych

Wydanie piąte poprawione
i uzupełnione

WARSZAWA 1957
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

MIECZYSŁAW JEŻEWSKI

FIZYKA

Podręcznik
dla wyższych szkół technicznych

Wydanie piąte poprawione
i uzupełnione

WARSZAWA 1957
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE WARSZAWA 1957

Wydanie piąte. Nakład 20000 + 100 egzemplarzy. Ark. wyd. 54,75 druk. 48
Papier ilustr, V kl. 70 g Podpisano do druku w listopadzie 1957
Druk ukończono w grudniu 1957 Zamówienie Nr 607 Cena zł 65.— B-90

DRUK. im. REWOLUCJI PAŹDZIERNIKOWEJ — WARSZAWA

PRZEDMOWA DO WYDANIA V

W obecnym wydaniu zmianom uległy niektóre rozdziały podręcznika, w szczególności niektóre rozdziały kinematyki, dynamiki, rozdział o własnościach sprężystych ciał, rozdział o elektryczności oraz fotometria. W mechanice został dokładniej omówiony układ MKS, w elektryczności zaś obok układu elektromagnetycznego i elektrostatycznego wprowadzono układ zracjonalizowany MKSA. Niestety, jasne wytłumaczenie zasad, na których oparty jest ten układ jednostek, nie jest łatwe. Starałem się zrobić to w sposób możliwie najprostszy.

Ze względu na wielokrotnie z różnych stron wyrażane życzenia dodałem po każdym rozdziale zadania ułożone zazwyczaj według poszczególnych paragrafów oraz według wzrastającej trudności. Przy układaniu zadań korzystałem z szeregu książek, z których mogę wymienić: A. Witkowski, *Zasady Fizyki*; W. Rybczyński, *Zbiór zadań z fizyki*; D.I. Sacharow i I.S. Kosminkow, *Zbiór zadań z ogólnego kursu fizyki*; S.P. Striełkow, I. A. Elcyn, I.A. Jakowlew, *Zbiór zadań z ogólnego kursu fizyki*; W. Ginsburg, L.M. Lewin, M.S. Rabinowicz, D.W. Siwuchin, E.S. Czetwerikowa, *Zbiór zadań z ogólnego kursu fizyki*; Henry Semat, *Introduction to Atomic Physics.* W książkach tych każdy studiujący znajdzie wielką obfitość zadań, które mogą służyć do dalszego wprawiania się w rozwiązywaniu zagadnień.

Podręcznik, tak jak i w poprzednich wydaniach, podzielony jest na dwie części. Część pierwsza zawiera zasady stanowiące treść tzw. „klasycznej fizyki". Druga część nosiła nazwę: „Wprowadzenie w fizykę współczesną". Wydaje mi się, że obie te nazwy nie są dobrze uzasadnione. W obecnym wydaniu części te noszą nazwy: I. Fizyka zjawisk makroskopowych, II. Wprowadzenie w fizykę mikrocząstek. Pierwsza część bowiem zawiera prawa odnoszące się do zjawisk bezpośrednio dostępnych naszym zmysłom, zwanych zwykle zjawiskami makroskopowymi. Chociaż zawiera również rozdziały odnoszące się do atomów, drobin, czy nawet mówi o punktach materialnych, to stosuje jednak prawa, jakie panują w dziedzinie zjawisk bezpośrednio przez nas obserwowalnych. Jak się okazało w ostatnim pięćdziesięcioleciu, cząstki nadzwyczaj małe, niedostępne naszym zmysłom nawet przy użyciu takich narzędzi, jak mikroskop czy mikrowaga, nie stosują się do praw zwykłej mechaniki. Cząstki takie, do których należą atomy, jądra atomowe, elektrony, cząstki elementarne, nazywamy zwykle mikrocząstkami. Stwierdzono, że prawa rządzące ich ruchem są inne, niż prawa zwykłej mechaniki. Ich zespół tworzy dział fizyki nazywany mechaniką kwan-

tową. Jest to dział trudny, obszerny i wymagający dużego przygotowania matematycznego. Oczywiście w podręczniku elementarnym musiałem się ograniczyć do opisu tylko zasadniczych zjawisk, w jakich mikrocząstki biorą udział i do bardzo szkicowego zarysu teorii ich zachowania się. Chodziło rzeczywiście tylko o „wprowadzenie" w świat zjawisk, z którymi jednak z konieczności nie tylko każdy technik, ale nawet każdy wykształcony człowiek coraz więcej będzie się musiał stykać (jak np. ze zjawiskami wydzielania energii przy przemianach jądrowych).

Druga część prócz rozdziałów odnoszących się do mikrocząstek zawiera również rozdziały pomocnicze, bez których obejść się przy studiowaniu tych zjawisk niepodobna, jak np. zarys zasad szczególnej teorii względności. Zawiera także opis pewnych technicznych zastosowań tych zjawisk.

Druga część w obecnym wydaniu została znacznie powiększona.

Rozdziały wydrukowane drobnym drukiem można bez szkody dla całości przy studiowaniu pominąć. Mogą być one jednak potrzebne tym, którzy zajmują się odnośnymi działami fizyki, lub stosują je w naukach technicznych.

M. Jeżewski

Kraków, wrzesień 1956 r.

SPIS RZECZY

Część pierwsza

FIZYKA ZJAWISK MAKROSKOPOWYCH

Część druga

WPROWADZENIE W FIZYKĘ MIKROCZĄSTEK

FIZYKA ZJAWISK MAKROSKOPOWYCH

1. Wstęp

1.1. Wielkości fizyczne i jednostki. Fizyka jest nauką przyrodniczą zajmującą się zjawiskami zachodzącymi w otaczającym nas świecie. Lecz jest jednocześnie nauką ścisłą, gdyż zjawiska te ujmuje za pośrednictwem liczb i praw wyrażonych matematycznie. Jest to możliwe dzięki temu, że fizyka posługuje się tzw. wielkościami. Wielkościami nazywamy takie własności ciał lub zjawisk, które można porównywać ilościowo z takimi samymi własnościami innych ciał lub zjawisk*. Przykładami wielkości są: długość, pole, objętość, kąt, prędkość, ilość ciepła, siła, praca, napięcie elektryczne i wiele innych. Wielkości potrafi fizyka wyrażać liczbowo dzięki temu, że uczy, jak je mierzyć. Toteż mierzenie jest w fizyce podstawową czynnością.

Zmierzyć wielkość fizyczną, to znaczy porównać ją z wielkością tego samego

---

* Według określenia matematyków wielkością nazywamy każdy element takiego zbioru nieskończonego, w którym dla dowolnych dwóch jego elementów A i B umówione zostało w pewien sposób znaczenie zdań następujących:

A jest mniejsze od B; A jest równe B; A jest większe od B

(patrz *Słownik Polskich Wyrazów Technicznych*, Dział 11, *Matematyka*, Wydawnictwo Akademii Nauk Technicznych, Warszawa 1936).

Każdemu elementowi zbioru wielkości można podporządkować jednoznacznie liczbę zwaną miarą (albo wartością liczbową) tej wielkości, przyporządkowując jednej z nich jednostkę, tak że

1) związkom: $A > B$; $A = B$; $A < B$

odpowiadają między miarami tych elementów związki

$$a > b; \quad a = b; \quad a < b,$$

2) miara elementu będącego sumą dwóch wielkości należących do danego zbioru równa się sumie miar tych wielkości.

Trzeba zauważyć, że dla fizyków najważniejszą rzeczą jest właśnie mierzenie, możliwość jak najdokładniejszego wyznaczenia wartości liczbowej danej wielkości.

W zasadzie należy oczywiście odróżniać wielkość fizyczną i jej miarę, która jest liczbą. Jednakże stałe odróżnianie wielkości i jej miary przedłużałoby i utrudniało opis zjawisk i wysłowienie praw. Toteż przyjął się w fizyce powszechnie sposób wyrażania się krótszego, np. długość — zamiast „miara długości", prędkość — zamiast „miara prędkości", siła — zamiast „miara siły" itp. I my w tym podręczniku w celu zwięzłości będziemy robili z tego częsty użytek.

Miara się zmienia, gdy zmieniamy jednostkę, lecz dana wielkość pozostaje niezmienna.

rodzaju przyjętą za jednostkę. Wynika stąd, że liczba otrzymana jako wynik pomiaru wielkości zależy od wyboru jednostki.

Jednostka może być w zasadzie przyjęta dowolnie. Zwykle jednak tylko kilka jednostek, tzw. zasadniczych lub podstawowych, przyjmuje się umownie, pozostałe zaś, tzw. pochodne, określa się w zależności od podstawowych tak, aby równania fizyki były możliwie najprostsze.

Jednostkami zasadniczymi w mechanice są jednostki długości, masy i czasu. Jednostka masy będzie określona w dynamice. Na razie potrzebne nam będą jednostki długości i czasu.

Dla każdej z wielkości fizycznych ustala się w nauce jednostkę i nadaje się jej nazwę. Wiele nazw jednostek pochodzi od nazwisk najbardziej zasłużonych fizyków. Uchwały Międzynarodowych Konferencji Miar ustalają symbol jedno- -lub kilkoliterowy (skrót) oznaczający daną jednostkę.

Gdy w rozpatrywanych zagadnieniach mamy do czynienia z wielkościami znacznie większymi lub mniejszymi od jednostek, to dla uniknięcia niewygodnych wielkich liczb używa się jednostek wtórnych będących wielokrotnościami lub podwielokrotnościami jednostek zasadniczych. Dodanie odpowiedniego przedrostka do nazwy jednostki oznacza określoną wielokrotność lub podwielokrotność tej jednostki. W tabeli 1.1 wymieniono te przedrostki.

Tabela 1.1

Przedrostki do tworzenia nazw jednostek wtórnych

Wielokrotnych			Podwielokrotnych		
Przedrostek	Wartość	Skrót	Przedrostek	Wartość	Skrót
tera	10^{12}	T	decy	10^{-1}	dc
giga	10^{9}	G	centy	10^{-2}	c
mega	10^{6}	M	mili	10^{-3}	m
kilo	10^{3}	k	mikro	10^{-6}	μ
hekto	10^{2}	h	nano	10^{-9}	n
deka	10	dk	piko	10^{-12}	p

1.2. Jednostki długości. Podstawową jednostką długości we wszystkich krajach należących do tzw. konwencji metrycznej jest *metr.* Metr jest to odległość między kreskami nr 2 i nr 5 w temperaturze 0°C na wzorcu wykonanym ze stopu platyny z irydem (10%Ir) noszącym na sobie znak M 6, zwanym Międzynarodowym Prototypem Metra, przechowywanym w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres pod Paryżem, w pawilonie de Breteuil. Ćwiartka południka ziemskiego ma średnio długość 10 002 280 metrów. Długość metra związano z długością fali świetlnej czerwonej linii widmowej kadmu. Według uchwały VII Międzynarodowej Generalnej Konferencji Miar i Wag z roku 1927 1 metr = = 1 553 164,14 λ, gdzie λ jest długością fali czerwonej linii widmowej kadmu w suchym powietrzu przy temperaturze 15°C i ciśnieniu 760 mm Hg. Skrót nazwy metra jest m (bez kropki).

Metr jest jednostką podstawową układu jednostek, które coraz więcej wchodzą w użycie nie tylko w praktyce, lecz i w nauce, układu zwanego w skrócie MKS, tzn. metr, kilogram, sekunda. Dwiema pozostałymi jednostkami podstawowymi są: kilogram jako jednostka masy i sekunda jako jednostka czasu.

W układzie jednostek zwanym CGS (centymetr, gram, sekunda) często używanym w nauce jako zasadniczej jednostki długości używa się setnej części metra zwanej centymetrem (cm).

Długość oznacza się zazwyczaj literą l.

W życiu potocznym oraz w rozmaitych działach nauki w zależności od potrzeby używa się wielokrotności i podwielokrotności jednostki długości. Nazwy ich tworzone są z nazwy metr przez dodanie odpowiedniego przedrostka wymienionego w tabeli 1.1. Najczęściej używanymi są:

kilometr (km) = 1000 m,
decymetr (dcm) = 0,1 m,
milimetr (mm) = 0,001 m.

Nazwa jednej milionowej części metra, czyli jednej tysięcznej milimetra, stanowi wyjątek od reguły. Nazywa się mikron, jej skrótem jest μ.

1.3. Jednostki czasu. Do porównywania czasów trwania rozmaitych zjawisk służą pewne zjawiska powtarzające się regularnie. Takim zjawiskiem jest przede wszystkim obrót Ziemi dookoła osi powodujący regularną zmianę nocy na dzień i odwrotnie. Dobą słoneczną nazywamy okres czasu upływający między dwoma kolejnymi górowaniami Słońca, to znaczy chwilami, w których Słońce znajduje się na płaszczyźnie południka danego miejsca, jednocześnie będąc w najwyższym swym położeniu nad horyzontem. Niestety wskutek zmiennej prędkości Ziemi na jej orbicie doba słoneczna nie jest stałym okresem czasu. Wobec tego, aby otrzymać stałą jednostkę czasu, postępujemy w sposób następujący: bierzemy mianowicie okres czasu zwany rokiem zwrotnikowym (okres czasu od wiosennego porównania dnia z nocą do następnego wiosennego porównania dnia z nocą) i dzielimy na tyle równych części, ile Ziemia wykonywa w ciągu tego czasu obrotów względem Słońca. Otrzymujemy w ten sposób tak zwaną dobę słoneczną średnią. Ponieważ Ziemia podczas roku zwrotnikowego wykonywa 365,2422 obrotów, zatem

$$1 \text{ doba słoneczna średnia} = \frac{1}{365{,}2422} \text{ roku zwrotnikowego.}$$

Doba (skrót dn) dzieli się na 24 godziny (skrót h), godzina na 60 minut (skrót min), minuta na 60 sekund (skrót sec, s lub sek).

W nauce jako zasadniczej jednostki czasu używa się sekundy. Określenie tej jednostki jest następujące:

$$1 \text{ sec} = \frac{1}{86\,400} \text{ część doby słonecznej średniej.}$$

Do mierzenia czasu w praktyce używane są zegary i zegarki, których bieg jest regulowany za pomocą pewnych zjawisk periodycznych, np. wahania się wahadła, drgań sprężystych płytek kwarcowych itp.

Czas oznaczamy z reguły literą t (*tempus* — po łacinie czas). Liczymy go od dowolnej chwili zwanej początkową, której przyporządkowujemy liczbę 0.

1.4. Jednostki pola. Jednostką pola jakiejkolwiek powierzchni jest pole kwadratu o boku równym 1 metrowi, zwane metrem kwadratowym (skrót m^2). W układzie CGS używamy jednostki dziesięć tysięcy razy mniejszej — centymetra kwadratowego. Pole będziemy oznaczać symbolem S albo A [oznaczenie przyjęte przez Międzynarodową Unię Fizyki Czystej i Stosowanej jest A (od *area* — po łacinie plac, płaszczyzna, pole)].

1.5. Jednostki objętości. Jednostką objętości jest objętość sześcianu o krawędzi równej 1 metrowi zwana metrem sześciennym (m^3) albo sterem. W układzie CGS używana jest milion razy mniejsza jednostka — centymetr sześcienny (cm^3). Często używanymi jednostkami są również litr (l) — objętość, jaką zajmuje 1 kilogram wody w temperaturze 4°C pod ciśnieniem 1 atmosfery oraz mililitr (ml) równy 0,001 litra.

$$1\ \text{ml} = 1{,}000\,028\ \text{cm}^3, \qquad 1\ \text{l} = 1000{,}028\ \text{cm}^3.$$

Objętość będziemy oznaczać przez V (*volumen* — po łacinie objętość).

1.6. Jednostki kąta. Używane są dwa układy miar kątów o różnych jednostkach. W jednym główną jednostką jest stopień (°) równy $^1/_{90}$ kąta prostego albo $^1/_{360}$ części kąta pełnego. Stopień dzieli się na 60 minut ('), minuta na sześćdziesiąt sekund (''). W drugim, czyli w tzw. mierze łukowej, jednostką jest radian (rd), kąt takiej wielkości, iż długość odpowiadającego mu łuku równa się promieniowi, jakim łuk ten został zakreślony. Dowolny kąt α zawiera tyle radianów, ile razy odpowiadający mu łuk jest większy od promienia. Liczbę radianów otrzymamy zatem dzieląc długość łuku l przez promień r: $\alpha = \frac{l}{r}$, czyli stosunek łuku do promienia daje nam wielkość kąta w radianach. Ponieważ kątowi pełnemu, zawierającemu 360°, odpowiada długość łuku (długość okręgu) $2\pi r$, zatem kąt pełny zawiera 2π radianów, kąt półpełny π radianów, kąt prosty $\frac{\pi}{2}$ radianów, 1° zawiera $\frac{\pi}{180}$ radianów.

$$1\ \text{radian zawiera}\ \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 57{,}295\,578^\circ = 3437{,}7468' = 206264{,}806''.$$

Kąty przyjęto oznaczać literami alfabetu greckiego.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Co to znaczy zmierzyć wielkość fizyczną?
2. Co nazywamy wartością liczbową danej wielkości?
3. Od czego zależy wartość liczbowa danej wielkości?
4. Jakie są najważniejsze przedrostki do tworzenia nazw jednostek wtórnych?
5. Jakie są podstawowe wielkości fizyczne, ich jednostki i oznaczenia?
6. Jakich używamy jednostek i oznaczeń pola, objętości, kąta?

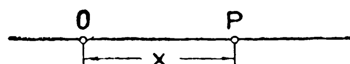
2. Zasady kinematyki

2.1. Kinematyka. Kinematyka jest częścią mechaniki, czyli ogólnej nauki o ruchu i równowadze ciał. Zajmuje się ona tylko rodzajami ruchów, nie biorąc pod uwagę warunków, w których ruchy te powstają. Wprowadza tylko te pojęcia, które są potrzebne do opisu rozmaitych ruchów. Nazwa pochodzi od słowa greckiego *κινεω* (kineo) — poruszam się.

2.2. Względność ruchu, układy odniesienia. Ponieważ nie znamy ciała, o którym moglibyśmy powiedzieć, że się nie porusza, więc każdy ruch czy spoczynek jest względny. Jeżeli rozpatrywane ciało A nie zmienia swego położenia względem ciała B, to mówimy, że ciało A znajduje się w spoczynku względem ciała B. Jeżeli to położenie się zmienia, to mówimy, że ciało A porusza się względem ciała B. Zwykle wyobrażamy sobie związane z ciałem B pewne punkty, proste czy płaszczyzny, względem których odnosimy ruch. Nazywają się one układami odniesienia.

Aby uprościć sobie zagadnienie, bardzo często bierzemy pod uwagę jeden tylko punkt poruszającego się ciała, gdyż to nam nieraz wystarcza, aby wiedzieć jak dane ciało, nawet bardzo złożone, się porusza. Na przykład położenie i ruch pociągu wystarczająco określa położenie i ruch żarówki w latarni lokomotywy, którą wobec wielkości pociągu możemy uważać za punkt. Zdarza się również, że rozważamy ruch bardzo małych cząstek, które wobec ich wzajemnych odległości można uważać za punkty.

Aby określić położenie punktu na prostej, wystarczy podać jedną tylko wielkość, mianowicie odległość obserwowanego punktu P od pewnego obranego na tej prostej punktu odniesienia O, zwanego początkiem współrzędnych (rys. 2.1). Jeżeli punkt P porusza się po prostej, to jego odległość x od punktu O zmienia się, gdy czas upływa. Mówimy, że x jest funkcją czasu t. Wyrażamy to krótko symbolicznie: $x = f(t)$.



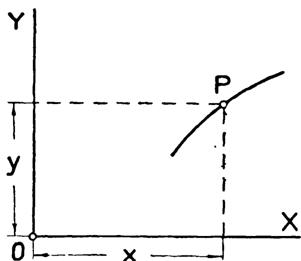
Rys. 2.1. Określenie położenia punktu na prostej

Położenie punktu na płaszczyźnie określamy przez podanie odległości x i y tego punktu od dwóch prostych tworzących kąt prosty, zwanych osiami współrzędnych (rys. 2.2). Oś poziomą X nazywamy osią odciętych, oś pionową Y — osią rzędnych. Odległość od osi rzędnych oznaczamy literą x i nazywamy odciętą punktu, odległość od osi odciętych oznaczamy literą y i nazywamy jego rzędną. Rzędną i odciętą razem nazywamy współrzędnymi punktu P. Gdy punkt P się porusza,

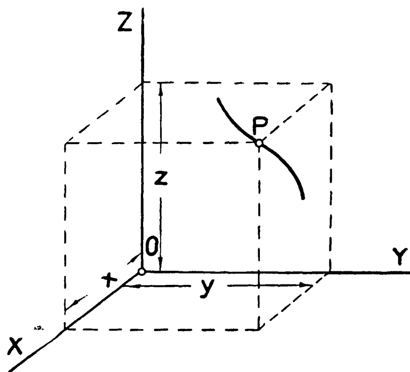
w miarę upływania czasu współrzędne się zmieniają. Współrzędne są funkcjami czasu:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t).$$

Gdy punkt porusza się w przestrzeni trójwymiarowej, położenie określa się przez podanie trzech odległości od trzech ścian kąta trójściennego. Odległości



Rys. 2.2. Ruch punktu na płaszczyźnie

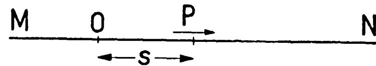


Rys. 2.3. Ruch punktu w przestrzeni

te zazwyczaj oznaczamy literami x, y i z (rys. 2.3). Gdy punkt się porusza, odległości te zmieniają się, a więc wszystkie są funkcjami czasu.

Linię, jaką zakreśla punkt podczas swego ruchu (prostą lub krzywą), nazywamy jego *torem*, a długość zakreślonego toru — *drogą* przebytą przez punkt. Drogę będziemy zwykle oznaczać literą s.

2.3. Ruch prostoliniowy jednostajny. Weźmy pod uwagę ruch punktu P poruszającego się po linii prostej MN od strony lewej na prawo (rys. 2.4). Obierzmy na tej prostej punkt stały O i zacznijmy liczyć czas od chwili, gdy punkt P przechodzi przez punkt O.



Rys. 2.4. Ruch punktu po prostej

Odległość punktu P od punktu O w chwili t oznaczmy przez s. Będzie to droga przebyta przez punkt P od chwili początkowej. Niech ruch punktu P będzie taki, aby s było proporcjonalne do t.

Ponieważ bardzo często będziemy się spotykać w fizyce z wielkościami proporcjonalnymi, będziemy używać dla skrócenia wysłowienia jako znaku proporcjonalności: $\backsim$. Możemy zatem napisać dla rozpatrywanego ruchu

$$s \backsim t.$$

W przybliżeniu takim ruchem porusza się pociąg między dwiema odległymi stacjami lub statek płynący po spokojnej wodzie. Jeżeli jednak obserwujemy kilka ruchów np. dwa samochody jadące w tym samym kierunku po szosie, to jeden z nich, np. A może wyprzedzać drugi, B. Mówimy, że samochód A ma

większą prędkość niż B. Porównując różne ruchy, w których droga rośnie proporcjonalnie do czasu, powiemy, że prędkości dwóch punktów, powiedzmy M i N są równe, gdy drogi przebyte przez nie w równych czasach są równe. Jeżeli natomiast droga przebyta przez punkt M jest 2,3,... n razy większa od drogi przebytej w tym samym czasie przez punkt N, to powiemy, że prędkość punktu M jest 2,3... n razy większa od prędkości punktu N. Najłatwiej porównać prędkości obliczywszy drogi przebyte w jednostce czasu. Jeżeli w czasie t została przebyta droga s, to na jednostkę czasu przypada droga

$$\frac{s}{t}.$$

Ponieważ s jest proporcjonalne do t, to stosunek ten będzie miał stałą wartość w całym ruchu. Oznaczając go przez v możemy napisać

$$\frac{s}{t} = v. \tag{2.1}$$

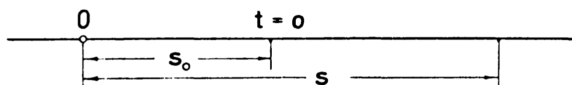
Liczba ta określa nam miarę prędkości ruchu (v jest pierwszą literą słowa *velocitas* — po łacinie prędkość). Miarą zatem prędkości rozpatrywanego ruchu jest stosunek drogi przebytej do czasu. W mechanice bardzo często zamiast miara prędkości mówią wprost — prędkość (patrz uwaga w przypisie na str. 17), ale oczywiście są to dwa pojęcia różne. Prędkość jest wielkością fizyczną, miara prędkości — liczbą.

Jak widzimy, w rozpatrywanym tu ruchu prędkość ma wartość niezmienną w całym ruchu. Taki ruch nazywamy ruchem jednostajnym.

Z równania (2. 1) widać, że gdy $s = 1$ w czasie $t = 1$, to v musi się równać jednostce. Za jednostkę prędkości musimy przyjąć prędkość takiego ruchu, w którym w jednostce czasu jest przebywana droga jednostkowa. W układzie MKS jednostką prędkości jest 1 m/sec (czytaj metr na sekundę), prędkość takiego ruchu, w którym w każdej sekundzie jest przebywana droga długości 1 metra. W układzie CGS jednostką prędkości jest 1 cm/sec. Jednostkę tę nazwano cel (od *celeritas* — po łacinie prędkość), lecz nazwa ta nie weszła w powszechne użycie.

Z równania (2. 1) otrzymujemy

$$s = vt. \tag{2.2}$$



Rys. 2.5. Droga jest funkcją liniową czasu

Droga w ruchu jednostajnym równa się iloczynowi prędkości przez czas.

Jeżeli czas zaczynamy liczyć od chwili, gdy punkt przebył już pewną drogę s_0 (rys. 2. 5), to całkowita przebyta droga będzie określona wzorem

$$s = s_0 + vt. \tag{2.3}$$

Jak widać, droga jest wtedy funkcją liniową czasu.

Jeżeli weźmiemy dwa równe przedziały czasu $[t_1, t_2]$, $[t_3, t_4]$, a więc takie, że

$$t_2 - t_1 = t_4 - t_3,$$

to drogi przebyte w tych przedziałach czasu będą

$$s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1),$$

$$s_4 - s_3 = v(t_4 - t_3).$$

Ponieważ czasy $t_2 - t_1$ i $t_4 - t_3$ są równe, zatem i odcinki drogi $s_2 - s_1$ i $s_4 - s_3$ są równe. Ta własność ruchu jednostajnego służyła dawniej często do definicji ruchu jednostajnego: ruchem jednostajnym nazywano ruch, w którym w równych czasach przebywane są równe drogi. Ta definicja jest tylko wtedy słuszna, gdy dodamy zastrzeżenie, że te równe przedziały czasu mogą być zupełnie dowolnie wybrane. Istnieje bowiem wiele ruchów, w których w pewnych przedziałach czasu są przebywane równe drogi, a ruch jednak nie jest jednostajny, np. łódka poruszana przez wioślarza, pociąg między dwiema odległymi stacjami itp.

2.4. Ruch niejednostajny. Prędkość i przyśpieszenie w dowolnym ruchu prostoliniowym. Gdy droga przebyta przez punkt nie jest funkcją liniową czasu, ruch jest niejednostajny. Poprzednie pojęcie prędkości nie da się zastosować. Wprowadzamy w tym przypadku pojęcie prędkości średniej na pewnym odcinku drogi. Prędkością średnią nazywamy stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu (przyrostem wielkości zmiennej nazywamy różnicę dwóch wartości tej zmiennej, przyrostem czasu — różnicę między późniejszą a wcześniejszą wartością czasu):

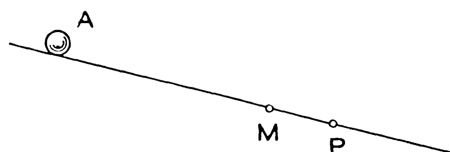
$$v_{\text{śr}} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2.4}$$

[symbol Δ nie jest wcale czynnikiem. Litera grecka duże delta (Δ) jest tu skrótem łacińskiego słowa *differentia*, czyli różnica. Używana na oznaczenie przyrostu jest podobnym symbolem jak sin, log. Należy odróżniać takie symbole od symboli literowych używanych w algebrze, mających znaczenie liczb].

Znajomość prędkości średniej daje nam ogólnikowe pojęcie o ruchu i pozwala na rozwiązanie pewnych praktycznych zagadnień. Na przykład znając prędkość średnią samochodu możemy obliczyć czas potrzebny, dajmy na to, na przebycie odległości między Warszawą a Krakowem.

Im dla mniejszych odcinków drogi znajdziemy prędkość średnią, tym dokładniej poznamy własności danego ruchu. Aby dokładnie określić prędkość ruchu niejednostajnego, postępujemy w sposób następujący. Przede wszystkim weźmy pod uwagę ruch, który możemy wywoływać dowolną ilość razy (bardzo ważną okolicznością jest w nauce fakt, że możemy zwykle wywoływać zjawiska, powtarzać je dowolną ilość razy. Wywoływanie zjawiska nazywamy doświadczeniem). Niech

to będzie np. ruch kulki A staczającej się po płaszczyźnie pochyłej (rys. 2. 6). Zaznaczmy na torze tej kulki stały punkt obserwacji M. Weźmy pod uwagę pewien odcinek drogi od punktu M do punktu P. Prędkość średnią kulki na tym odcinku określa wzór



Rys. 2.6. Ruch kulki po równi pochyłej

$$v_{śr} = \frac{MP}{t_2 - t_1} = \frac{MP}{\Delta t}, \qquad (2.5)$$

gdzie t_1 oznacza czas, który upłynął od początku ruchu aż do chwili przybycia kulki A do punktu M, a t_2 — czas przybycia jej do punktu P. Przybliżmy teraz drugi punkt obserwacji P do pierwszego M i powtórzmy ponownie ruch kulki A. Wartość prędkości średniej na krótszym odcinku będzie nieco inna i da nam dokładniejsze pojęcie o ruchu w okolicy punktu M. Moglibyśmy postępować tak wielokrotnie zbliżając coraz więcej drugi punkt obserwacji do pierwszego. W praktyce postępowaniu temu położyłaby dość szybko kres niedokładność naszych przyrządów. Doświadczalnie nie możemy bezgranicznie przedłużać takiego postępowania. Jeżeli jednak znamy prawo, według którego droga zmienia się z czasem, to łatwo otrzymać wzór, który pozwala przewidzieć, jak będzie się zmieniać prędkość średnia, gdy odcinek, na jakim ją mierzymy, skraca się coraz bardziej. Można się przekonać, że otrzymywane liczby na prędkość średnią coraz mniej się różnią od pewnej liczby stałej, jak to wykaże przykład w następnym paragrafie. Z matematyki wiadomo, że liczbę stałą, do której dąży wielkość zmienna zbliżając się do niej nieograniczenie, nazywamy granicą tej zmiennej. Granica prędkości średniej mierzonej na coraz krótszym odcinku drogi określa nam wartość prędkości chwilowej.

Miarą prędkości chwilowej albo wprost prędkością ruchu zmiennego nazywamy granicę, do której dąży stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu, gdy przyrost czasu (a zatem i przyrost drogi) dąży do zera. Matematyka wyraża to symbolicznie w sposób następujący:

$$\boxed{v = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}} \quad \text{albo} \quad \boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.} \qquad (2.6)$$

Granicę stosunku przyrostu zmiennej zależnej (w tym przypadku drogi) do przyrostu zmiennej niezależnej (czasu) nazywamy w matematyce *pochodną* zmiennej zależnej (będącej funkcją zmiennej niezależnej, w tym przypadku czasu) ze względu na tę zmienną niezależną. Pochodną oznaczamy krótszym symbolem s' albo $\frac{ds^{*}}{dt}$.

* ds oznacza różniczkę zmiennej s jako funkcji czasu, a dt — różniczkę zmiennej niezależnej.

Używając tego terminu możemy powiedzieć:

Miarą prędkości ruchu zmiennego jest pochodna drogi względem czasu.

Matematycznie

$$v = s' \qquad \text{lub} \qquad v = \frac{ds}{dt}. \tag{2.7}$$

W ten sposób określona prędkość chwilowa ruchu zmienia się podczas ruchu i jest w ogólności funkcją czasu. Gdy prędkość ruchu wzrasta z czasem, ruch nazywamy *przyśpieszonym*, gdy prędkość maleje — *opóźnionym.*

Obliczmy prędkość chwilową w ruchu poprzednio rozważanym, w którym droga jest funkcją liniową czasu:

$$s = s_0 + vt.$$

Dla chwili t_1

$$s_1 = s_0 + vt_1,$$

dla chwili t_2

$$s_2 = s_0 + vt_2,$$

Zatem

$$\Delta s = s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1),$$

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

A więc stosunek

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$$

ma wartość stałą, niezależną od przyrostu czasu Δt. Zatem w ruchu jednostajnym prędkość chwilowa równa się prędkości średniej i jest stała w całym ruchu.

Jeżeli porównywamy rozmaite ruchy zmienne, to możemy się łatwo przekonać, że w niektórych przypadkach prędkość będzie wzrastać szybko, w innych — wolniej. Tak będzie np., gdy kulka będzie się staczać po równi rozmaicie nachylonej do poziomu. Stosunek przyrostu prędkości do przyrostu czasu określa *średnie przyśpieszenie* ruchu. Przyśpieszenie będziemy stale oznaczać literą a (pierwsza litera wyrazu *acceleratio* — po łacinie przyśpieszenie). Określenie matematyczne będzie:

$$a_{\text{śr}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.8}$$

Przyśpieszeniem chwilowym nazywamy granicę, do której dąży ten stosunek, gdy chwile obserwacji zbliżają się do siebie nieograniczenie:

$$\boxed{a = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}} \quad \text{albo} \quad \boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = \frac{dv}{dt}.} \tag{2.9}$$

Przyśpieszenie jest więc pochodną prędkości względem czasu (ponieważ zaś prędkość jest pochodną drogi względem czasu, więc przyśpieszenie jest drugą pochodną drogi względem czasu: $a = \frac{d^2s}{dt^2}$).

Jeżeli prędkość wzrasta, przyrost $v_1 - v_2$ jest dodatni, zatem i przyśpieszenie jest dodatnie (przyrost czasu bowiem jest zawsze dodatni). Gdy prędkość maleje, $v_2 - v_1$ jest ujemne, przyśpieszenie jest ujemne. W tym przypadku ruch nazywamy opóźnionym.

Ponieważ w ruchu jednostajnym $v_1 = v_2 = \text{const}$, zatem na przyśpieszenie otrzymamy:

$$a = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = 0. \tag{2.10}$$

Przyśpieszenie chwilowe w ruchu jednostajnym równe przyśpieszeniu średniemu jest stale równe zeru w całym ruchu. Możemy zatem określić ruch jednostajny jako ruch, w którym przyśpieszenie jest równe zeru.

Ze wzoru

$$a_{\text{śr}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

wynika, że jeżeli $v_2 - v_1 = 1$ i $t_2 - t_1 = 1$, to i a musi się równać 1. A więc za jednostkę przyśpieszenia musimy obrać przyśpieszenie takiego ruchu, w którym w każdej sekundzie prędkość wzrasta o jednostkę. Ponieważ w układzie MKS jednostką prędkości jest m/sec, to jednostką przyśpieszenia będzie przyśpieszenie takiego ruchu, w którym w każdej sekundzie prędkość wzrasta o 1 m/sec. Jednostka ta nosi nazwę: metr na sekundę do kwadratu, nazwę tę zaś pisze się m/sec², co ma przypominać sposób obliczania przyśpieszenia za pomocą równania

$$a = \frac{v_2 \quad v_1}{t_2 - t_1} \frac{\text{m/sec}}{\text{sec}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

Podobnie w układzie CGS jednostką przyśpieszenia jest cm/sec². Tej ostatniej jednostce nadano nazwę gal (skrót Gl), nazwa ta jednak jest rzadko używana.

Zadania

2.1. Wyrazić kąty: 1) 36°, 2) 52°, 3) 75° 37′, 4) 90° w radianach.
Odpowiedź: 1) 0,6283 rd, 2) 0,9076 rd, 3) 1,3198 rd, 4) 1,5708 rd.

2.2. Wyrazić kąty: 1) 0,1624 rd, 2) 0,3843 rd w stopniach, minutach i sekundach.
Odpowiedź: 1) 9°18′18″, 2) 22°1′7″.

2.3. Samolot lecący po linii prostej ruchem jednostajnym przebywa odległość między dwoma miastami wynoszącą 360 km w $^3/_4$ godziny. Jaka jest jego prędkość?

Odpowiedź: 480 km/godz.

2.4. Grzmot piorunu usłyszano w 4,5 sec po ujrzeniu błyskawicy. Jak daleko uderzył piorun, jeżeli prędkość dźwięku wynosi 340 m/sec?

Odpowiedź: 1530 m.

2.5. Ile czasu potrzebuje światło na przebycie odległości 1) od Słońca do Ziemi; 2) od Księżyca do Ziemi? (Odległość Ziemi od Słońca 149 501 000 km, Ziemi od Księżyca 384 400 km, prędkość światła 299 793 km/sec.)

Odpowiedź: 1) 8 min 18,7 sec; 2) 1,3 sec.

2.6. Dwa auta jadące ruchem jednostajnym mijają kolejno miejscowość *A*. Pierwsze o godz. 15^{00}, drugie o godz. 15^{30}. Pierwsze jedzie z prędkością $v_1 = 50$ km/godz, drugie — z prędkością $v_2 = 60$ km/godz. W jakiej odległości od miejscowości *A* drugie auto dogoni pierwsze i o której godzinie?

Odpowiedź: 150 km, godz. 18^{00}.

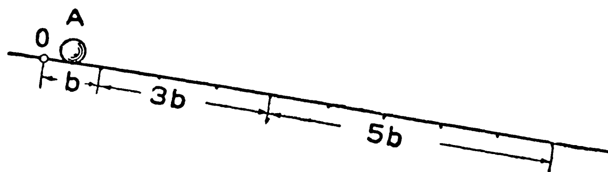
2.7. Pociąg pośpieszny jadący z Warszawy do Krakowa przejeżdża tę odległość wynoszącą 320 km w 5 godz. 45 min. Jaka jest średnia prędkość pociągu?

Odpowiedź: 55,7 km/godz.

2.8. Pocisk działowy pod wpływem ciśnienia gazów prochowych uzyskuje w czasie przelotu przez lufę trwającego $^1/_{160}$ sec prędkość 800 m/sec. Obliczyć jego średnie przyśpieszenie podczas ruchu w lufie.

Odpowiedź: 128 000 m/sec^2.

2.5. Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny. Wykonajmy następujące doświadczenie: puśćmy gładką kulkę po gładkiej również, nachylonej do poziomu płaszczyźnie. Możemy to doświadczenie oczywiście powtórzyć dowolną liczbę razy, przy tym za każdym razem kulka będzie się poruszała w taki sam sposób. Obserwując ruch kulki łatwo zauważyć, że toczy się ona z coraz wzrastającą prędkością. Zaznaczmy na płaszczyźnie odcinki przebyte przez kulkę w kolejnych poszczególnych sekundach, np. za pomocą kredy, a następnie zmierzmy je (rys. 2.7).



Rys. 2.7. Ruch jednostajnie przyśpieszony

Przypuśćmy, że kulka przebyła w pierwszej sekundzie odcinek zawierający *b* cm. Okaże się w takim razie, że w drugiej sekundzie kulka przebyła odcinek 3*b*, w trzeciej odcinek 5*b* itd. Łatwo stąd stwierdzić, że odcinki przebywane w kolejnych sekundach są proporcjonalne do kolejnych liczb nieparzystych. Możemy

więc również obliczyć, jaką drogę przebędzie kulka w dowolnym czasie, licząc czas od początku ruchu. Ułóżmy tabelkę przedstawiającą tę zależność:

Czas upływający od początku ruchu		Droga przebyta
1 sec		$b = b \cdot 1$
2 „	$b + 3b = 4b$	$= b \cdot 2^2$
3 „	$b + 3b + 5b = 9b$	$= b \cdot 3^2$
4 „	$b + 3b + 5b + 7b = 16b$	$= b \cdot 4^2$
. . . . .	. . . . .	. . . . .
t sec		$b \cdot t^2$

Równanie ruchu, które wyraża drogę przebytą w zależności od czasu, będzie zatem:

$$s = bt^2. \tag{2.11}$$

Jak widać, droga w tym przypadku jest proporcjonalna do kwadratu czasu.

Obliczmy prędkość chwilową w tym ruchu w chwili t. W tym celu za pierwszą chwilę obserwacji, którą poprzednio oznaczaliśmy symbolem t_1 obierzmy chwilę t. Za drugą chwilę obserwacji obierzmy chwilę o h późniejszą. We wzorze na prędkość średnią:

$$v_{\text{śr}} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

będziemy mieli

$$t_1 = t, \qquad t_2 = t + h,$$
$$s_1 = bt^2, \quad s_2 = b(t+h)^2.$$

Zatem na prędkość średnią otrzymamy

$$v_{\text{śr}} = \frac{b(t+h)^2 - bt^2}{t + h - t} = \frac{bt^2 + 2bth + bh^2 - bt^2}{h} = 2bt + bh. \tag{2.12}$$

Gdy drugi punkt obserwacji przysuwamy do pierwszego, przyrost czasu h maleje dążąc do zera. Zatem

$$v = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \lim v_{\text{śr}} = \lim_{h \to 0}(2bt + bh) = 2bt. \tag{2.13}$$

W ten sposób obliczyliśmy wartość chwilowej prędkości w dowolnej chwili t. Prędkość ta, jak widać, równa się liczbowo podwójnemu odcinkowi drogi przebytej w pierwszej sekundzie, pomnożonemu przez czas, który upłynął od początku ruchu do chwili obserwacji.

Z tego ostatniego wzoru widać, że prędkość w rozważanym ruchu rośnie proporcjonalnie do czasu.

Obliczmy teraz przyśpieszenie tego ruchu. W tym celu za pierwszą chwilę obserwacji obierzmy t, za drugą zaś $t+h$. Prędkość w chwili t oznaczmy literą v_1, w chwili $t+h$ — przez v_2. Będziemy mieli:

$$v_1 = 2bt,$$

$$v_2 = 2b(t + h).$$

Przyśpieszenie jest według definicji

$$a = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \lim_{h \to 0} \frac{2bt + 2bh - 2bt}{t + h - t} = 2b. \tag{2.14}$$

W tym przypadku wartość przyśpieszenia średniego nie zależy zupełnie od h, to znaczy nie zależy od tego, na jakim odcinku drogi obliczamy przyśpieszenie średnie. Przy zbliżaniu dwóch punktów obserwacji, jak to poprzednio opisaliśmy, otrzymamy stale ten sam wynik na przyśpieszenie średnie. Przyśpieszenie chwilowe będzie więc w rozważanym przypadku równać się przyśpieszeniu średniemu. Jest ono niezależne od czasu, czyli stałe w całym ruchu. *Taki ruch, w którym przyśpieszenie jest stałe, nazywamy ruchem jednostajnie przyśpieszonym.* Uwzględniając, że z równania (2.14)

$$b = \frac{a}{2},$$

otrzymamy dla ruchu jednostajnie przyśpieszonego równania

$$s = \frac{1}{2} at^2, \qquad v = at, \qquad a = \text{const.} \tag{2.15}$$

Jest to tak zwany ruch jednostajnie przyśpieszony bez początkowej prędkości.

Weźmy teraz pod uwagę ruch określony równaniem

$$s = v_0 t + bt^2, \tag{2.16}$$

zatem ruch, w którym droga przebyta jest funkcją kwadratową czasu. Aby obliczyć prędkość i przyśpieszenie w tym ruchu, bierzemy znowu pod uwagę dwie chwile obserwacji t i $t+h$ i przeprowadzamy obliczenie tak samo, jak poprzednio:

$$v = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \lim_{h \to 0} \frac{v_0 (t + h) + b (t + h)^2 - v_0 t - bt^2}{t + h - t} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{v_0 t + v_0 h + bt^2 + 2bth + bh^2 - v_0 t - bt^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (v_0 + 2bt + bh) = v_0 + 2bt. \tag{2.17}$$

Podobnie obliczamy przyśpieszenie

$$a = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \lim_{h \to 0} \frac{v_0 + 2b(t+h) - v_0 - 2bt}{t + h - t} = 2b\,,$$

a stąd

$$b = \frac{a}{2}. \qquad (2.18)$$

Otrzymaliśmy więc, że i w tym ruchu przyśpieszenie jest stałe, ruch zatem jest jednostajnie przyśpieszony. Uwzględniając związek $b = \frac{a}{2}$ otrzymamy następujące równania:

$$\boxed{s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \qquad v = v_0 + at\,, \qquad a = \text{const.}} \qquad (2.19)$$

Są to równania ruchu jednostajnie przyśpieszonego z początkową prędkością, gdyż, jak łatwo sprawdzić za pomocą drugiego z tych równań, w chwili $t=0$ prędkość $v=v_0$.

W przypadku ruchu jednostajnie opóźnionego równania będą takie same, tylko przyśpieszenie będzie ujemne. Pisząc wyraźnie znak minus otrzymamy równania

$$\boxed{s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2, \qquad v = v_0 - at\,, \qquad a = \text{const.}} \qquad (2.20)$$

Ruch jednostajnie przyśpieszony i jednostajnie opóźniony są odmianami ruchu jednostajnie zmiennego.

2.6. Wymiary wielkości fizycznych. Wynik pomiaru jakiejkolwiek wielkości fizycznej daje określoną liczbę. Lecz jej wartość zależy od wyboru jednostki, którą mierzymy. Przypuśćmy, że mierzymy jakąś określoną długość i jako wynik pomiaru otrzymamy liczbę s. Jeżeli do pomiaru tej samej długości użyjemy jednostki L razy mniejszej, to liczba wyrażająca mierzoną długość powiększy się L razy, wyniesie zatem sL. Jeżeli powiększymy jednostkę, to liczba wyrażająca daną długość zmniejszy się. Liczba wyrażająca wynik pomiaru jest, jak widać, odwrotnie proporcjonalna do wielkości użytej jednostki. A więc ta sama długość wyrazi się liczbą 20 m albo 2000 cm, albo 20 000 mm, albo 0,02 km. Liczbę L, przez którą trzeba pomnożyć liczbę wyrażającą daną długość w określonych jednostkach, aby otrzymać liczbę wyrażającą tę samą długość w nowych jednostkach, nazywamy liczbą wymiarową długości.

Podobnie liczba wyrażająca dany okres czasu będzie zależeć od wyboru jednostki. Ten sam okres czasu wyrazi się np. w minutach liczbą 45, w sekundach liczbą 2700, w godzinach liczbą $^3/_4$. Liczbę T, przez którą trzeba pomnożyć liczbę

wyrażającą dany okres czasu, aby otrzymać liczbę wyrażającą ten sam okres czasu w nowych jednostkach, nazywamy wymiarem albo liczbą wymiarową czasu.

Wymiar prędkości. Na prędkość ruchu jednostajnego mieliśmy wzór

$$v = \frac{s}{t}.$$

Równanie to oznacza, że liczba jednostek prędkości równa się liczbie jednostek drogi podzielonej przez liczbę jednostek czasu. Jeżeli przejdziemy do nowych, powiedzmy, L razy mniejszych jednostek długości i do T razy mniejszych jednostek czasu, to liczby po prawej stronie zmienią się. Liczba s zamieni się na sL, liczba t — na tT. Widać, że gdybyśmy pozostawili dawne jednostki prędkości, to równanie przestałoby być prawdziwe. Musimy odpowiednio zmienić także jednostkę prędkości. Zmniejszmy więc odpowiednio, powiedzmy V razy, jednostkę prędkości. Liczba wyrażająca prędkość zamieni się na vV. A więc V będzie wymiarem prędkości. Równanie poprzednie w nowych jednostkach również musi być prawdziwe. Musimy więc mieć

$$vV = \frac{sL}{tT} = \frac{s}{t}\frac{L}{T} = v\frac{L}{T};$$

stąd wynika, że $V = \frac{L}{T}$, czyli wymiar prędkości równa się wymiarowi długości podzielonemu przez wymiar czasu.

Wymiar przyśpieszenia. Weźmy wzór na przyśpieszenie średnie

$$a_{\text{śr}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Gdy zmienimy jednostkę długości L razy mniejszą, jednostkę czasu zaś T razy mniejszą, to czasy t_1 i t_2 wyrażą się liczbami t_1T i t_2T, prędkości zaś wyrażą się liczbami v_1V i v_2V, gdzie wymiar prędkości $V = \frac{L}{T}$. Aby równanie na przyśpieszenie pozostało prawdziwe, musimy na przyśpieszenie obrać nową jednostkę, powiedzmy A razy mniejszą. Liczba wyrażająca przyśpieszenie w nowych jednostkach będzie

$$aA.$$

Otrzymamy więc równanie

$$aA = \frac{v_2V - v_1V}{t_2T - t_1T} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}\frac{\frac{L}{T}}{T} = a\frac{L}{T^2},$$

skąd

$$A = \frac{L}{T^2}.$$

Obecnie przyjęto używać do oznaczania wymiarów nie oddzielnych symboli, lecz tych samych, które są używane do oznaczenia danych wielkości z tą różnicą, że zamykamy je w klamry kwadratowe. A więc zamiast pisać V, pisze się [v], zamiast pisać A, pisze się [a] itd. Wymiar długości oznacza się symbolem [l], a wymiar czasu [t]. Piszemy więc.

$$[v] = \frac{[l]}{[t]} = [lt^{-1}], \tag{2.21}$$

$$[a] = \frac{[l]}{[t^2]} = [lt^{-2}]. \tag{2.22}$$

Nazwy rozmaitych jednostek pochodnych oznacza się symbolami wskazującymi działania, za pomocą których uzyskujemy wartość danej wielkości. Jednocześnie wskazują one wymiary tych wielkości. A więc jednostką prędkości jest $\frac{cm}{sec}$, cm/sec albo $cm \cdot sec^{-1}$. Jednostką przyśpieszenia jest $\frac{cm}{sec^2}$ albo $cm \cdot sec^{-2}$. Podobnie wszystkie inne jednostki pochodne można wyrazić symbolami $cm^a \cdot sec^b \cdot g^c$, gdzie g jest symbolem jednostki masy. Znacznej liczbie jednostek pochodnych nadano osobne nazwy. Wiele jednostek jednak tych nazw nie posiada.

Wymiar jakiejkolwiek wielkości fizycznej można obliczyć z dowolnego równania zawierającego tę wielkość.

Ponieważ równania wyrażające związki między rozmaitymi wielkościami fizycznymi muszą być prawdziwe bez względu na to, jakich używamy jednostek, zatem przy przejściu do innych jednostek wszystkie wyrazy równań muszą się powiększyć lub zmniejszyć jednakową liczbę razy. Stąd wynika, że wyrazy te muszą mieć jednakowe wymiary. Tę własność równań fizyki nazywamy ich jednorodnością. Przez sprawdzenie, czy wszystkie wyrazy równania mają ten sam wymiar, można często wykryć błąd zrobiony w rachunku.

Dla przykładu weźmy równanie ruchu jednostajnie przyśpieszonego,

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 .$$

Po zmianie jednostek na odpowiednio mniejsze wszystkie liczby odpowiednio wzrosną. Otrzymamy

$$s\,[l] = v_0\,[lt^{-1}]\,t\,[t] + \frac{1}{2} a\,[lt^{-2}]\,t^2\,[t^2],$$

skąd

$$s\,[l] = v_0 t\,[l] + \frac{1}{2} a t^2\,[l] = \left\{ v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \right\} [l].$$

Widać stąd, że obie strony równania wzrosną [l] razy, równanie pozostanie prawdziwe.

Ponieważ zbyt wielka ilość symboli literowych utrudnia czasem zorientowanie się, często dla zaznaczenia wymiarów używamy nazw jednostek. Możemy napisać w ten sposób:

$$s\,\text{cm} = v_0 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}\, t\,\text{sec} + \frac{1}{2}\, a \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}\, t^2\,\text{sec}^2 = v_0\, t\,\text{cm} + \frac{1}{2}\, at^2\,\text{cm} \,.$$

Wtedy postępujemy z symbolami cm, sec jak z liczbami.

W y m i a r k ą t a. L i c z b y c z y s t e albo b e z w y m i a r o w e. Ponieważ w mierze łukowej kąt mierzy się stosunkiem odpowiadającego mu łuku do promienia:

$$a = \frac{l}{r},$$

zatem jeżeli zmniejszymy jednostkę długości L razy, to licznik i mianownik powiększy się L razy

$$\frac{lL}{rL} = \frac{l}{r} L^0 = \frac{l}{r}.$$

A więc liczba wyrażająca miarę kąta nie zmieni się, nie zależy zatem od wyboru jednostki długości. Takie wielkości, których wartości liczbowe nie zależą od wyboru jednostek długości, masy i czasu, nazywamy liczbami czystymi albo bezwymiarowymi. Liczbami czystymi są zawsze wielkości określone przez stosunek wielkości tego samego rodzaju, np. długości do długości, objętości do objętości itp.

Zadania

2. 9. Wyrazić prędkość: 1) 54 km/godz, 2) 60 km/godz, 3) 72 km/godz, 4) 100 km/godz w m/sec.

O d p o w i e d ź: 1) 15 m/sec, 2) 16,7 m/sec, 3) 20 m/sec, 4) 27,8 m/sec.

2. 10. Wyrazić prędkość: 1) 6 m/sec, 2) 8 m/sec, 3) 10 m/sec, 4) 12 m/sec, 5) 20 m/sec, 25 m/sec w km/godz.

O d p o w i e d ź: 1) 21,6 km/godz, 2) 28,8 km/godz, 3) 36 km/godz, 4) 43,2 km/godz, 5) 72 km/godz, 6) 90 km/godz.

2. 11. Wyrazić przyśpieszenie 20 cm/sec^2 w m/min^2.

O d p o w i e d ź: 720 m/min^2.

2. 12. Po jakim czasie samochód ruszający z miejsca ruchem jednostajnie przyśpieszonym z przyśpieszeniem a = 0,5 m/sec^2 osiągnie prędkość v = 60 km/godz?

O d p o w i e d ź: $33\frac{1}{3}$ sec.

2. 13. Pociąg rusza ze stacji ruchem jednostajnie przyśpieszonym i po upływie czasu t = 3 min osiąga prędkość v = 72 km/godz. Jakie było jego przyśpieszenie a i na jak długiej drodze s osiągnął tę prędkość?

O d p o w i e d ź: $a = \frac{1}{9}$ m/sec^2, s = 1800 m.

2.14. Motocykl rusza ruchem jednostajnie przyśpieszonym i na drodze $s = 120$ m uzyskuje prędkość $v = 90$ km/godz. Jakie było jego przyśpieszenie a i po jak długim czasie t osiągnął on tę prędkość?

Odpowiedź: $a = 2{,}6$ m/sec², $t = 9{,}6$ sec.

2. 15. Pociąg jadący z prędkością $v_0 = 54$ km/godz zwalnia bieg przed stacją, tak że jego prędkość w każdej sekundzie zmniejsza się o 30 cm/sec. Jaką drogę s jeszcze przejedzie i jak długo (t) będzie jechał?

Odpowiedź: $s = 375$ m, $t = 50$ sec.

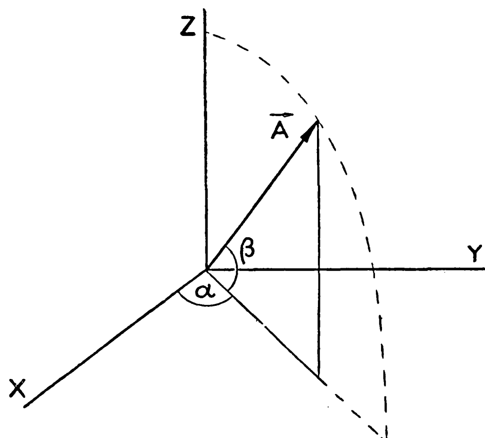
2. 16. Samochód jadący z prędkością $v_0 = 90$ km/godz został nagle zahamowany i zatrzymał się po przejechaniu $s = 20$ m. Jakie było opóźnienie a jego ruchu i czas t, po którym się zatrzymał?

Odpowiedź: $a = 15{,}6$ m/sec², $t = 1{,}6$ sec.

2. 17. Po równi pochyłej puszczono kulę toczącą się ruchem jednostajnie przyśpieszonym z przyśpieszeniem $a = 5$ cm/sec², a następnie w dwie sekundy po niej drugą taką samą kulę. Jaka będzie odległość kul po czasie t licząc od chwili puszczenia pierwszej kuli?

Odpowiedź: $10\,(t - 1)$ cm.

2.7. Skalary i wektory. Mamy w fizyce szereg wielkości, do zupełnego określenia których wystarczy podać tylko jedną liczbę. Wielkości takie nazywamy *skalarami*. Należą do nich takie wielkości, jak: pole, objętość, masa, temperatura, praca, moc, potencjał elektryczny, pojemność elektryczna.



Rys. 2.8. Określenie kierunku w przestrzeni

Drugi rodzaj wielkości, to wielkości kierunkowe, krótko zwane *wektorami*. Są to wielkości, do zupełnego określenia których nie wystarcza podanie ich miary liczbowej, trzeba jeszcze podać kierunek. Jeżeli mówimy np., że piechur wyszedł z Warszawy i przeszedł w prostym kierunku 15 km, to wiadomość ta nie wystarczy, aby go odnaleźć. Trzeba jeszcze podać, w jakim kierunku wyszedł. Każdą wielkość fizyczną kierunkową można przedstawić za pomocą odcinka skierowanego, to znaczy, w którym odróżniamy początek i koniec. W tym celu przy końcu odcinka stawiamy strzałkę. Taki odcinek nazywamy w geometrii również wektorem. Tylko taka wielkość fizyczna jest wektorem, która podlega wszystkim regułom rachunku wektorowego, a więc np. regule równoległoboku, o której będzie mowa później.

Do zupełnego określenia wielkości kierunkowej trzeba podać jej miarę liczbową i kierunek. Kierunek zaś określa się w przestrzeni za pomocą dwóch kątów α i β (rys. 2.8). Razem więc potrzeba trzech liczb do określenia wektora. Można

też w inny sposób określić wartość i kierunek wektora. Można np. podać długości jego trzech rzutów na trzy osie współrzędnych. W jakikolwiek jednak sposób chcemy określić wielkość kierunkową, zawsze potrzeba do tego trzech liczb.

Odnosi się to do tzw. wektorów swobodnych, które możemy zawsze przenosić do dowolnego punktu. Istnieją również wektory zwane posuwnymi, związane z określoną prostą, do określenia których potrzeba pięciu liczb oraz wektory związane z punktem, które są określone przez sześć liczb. Lecz działania nad wszelkimi wektorami wykonywa się na wzór działań nad wektorami swobodnymi. Bardzo wiele mamy w fizyce wielkości kierunkowych. Prędkość, przyśpieszenie, siła, pęd, natężenie pola elektrycznego są przykładami wektorów.

Wektor będziemy oznaczać jedną lub dwiema literami ze strzałką nad nimi, np. $\vec{A}$, $\vec{OA}$, $\vec{v}$ itd.

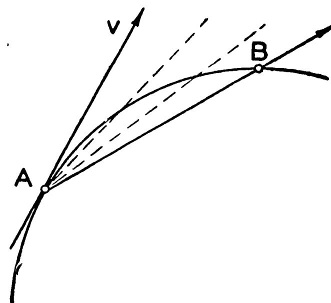
Początek wektora nazywamy jego punktem przyłożenia.

Wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ mające równe długości i jednakowe kierunki nazywamy równymi. Dwa wektory o równych długościach, lecz kierunkach tworzących kąt 180°, nazywamy przeciwnymi. Wektor przeciwny do $\vec{A}$ będziemy oznaczać przez $-\vec{A}$. Wartością liczbową lub bezwzględną wektora nazywamy liczbę określającą długość tego wektora i oznaczamy ją przez $|A|$ albo wprost A (bez strzałki).

Dwa wektory posuwne mogą być tylko wtedy równe, gdy leżą na tej samej prostej, zaś wektory związane tylko wtedy, gdy są przyłożone do tego samego punktu.

Punkt możemy również uważać za wektor, którego koniec schodzi się z początkiem. Punkty nazywamy wektorami zerowymi i oznaczamy je $\vec{0}$. Kierunek wektora zerowego jest nieokreślony.

Kątem między wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$ nazywamy kąt mniejszy od 180° zawarty między ich kierunkami, tzn. między prostymi, na których leżą te wektory.



Rys. 2.9. Prędkość w ruchu krzywoliniowym

2.8. Prędkość jako wektor. Rozpatrzymy teraz ruch punktu poruszającego się po linii krzywej. Niech poruszający się punkt znajduje się w chwili t_1 w punkcie A (rys. 2.9), w chwili zaś późniejszej t_2 — w punkcie B. Odcinek prostej AB skierowany od A do B nazywamy przesunięciem albo przemieszczeniem poruszającego się punktu w czasie $t_2 - t_1$. Prędkość średnią w czasie $t_2 - t_1$ określa stosunek przesunięcia AB do czasu $t_2 - t_1$:

$$\vec{v}_{\text{śr}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{t_2 - t_1}.$$

Kierunkiem prędkości średniej jest kierunek przesunięcia AB.

Prędkością chwilową jest granica, do której dąży prędkość średnia, gdy przyrost czasu dąży do zera. Gdy zatem punkt B przysuwamy do punktu A, to

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t}. \tag{2.23}$$

Gdy punkt B przesuwamy do punktu A, kierunek siecznej AB dąży do kierunku stycznej. A więc prędkość jest wektorem stycznym do toru.

Ułamek w postaci:

$$\frac{AB}{\Delta t} = \frac{\text{długość cięciwy } AB}{\Delta t}$$

możemy napisać w postaci iloczynu dwóch ułamków:

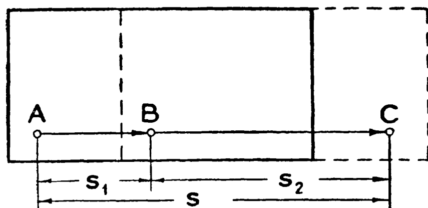
$$\frac{\text{długość cięciwy } AB}{\text{długość łuku } AB} \cdot \frac{\text{długość łuku } AB}{\Delta t}.$$

Lecz iloraz $\frac{\text{długość cięciwy } AB}{\text{długość łuku } AB}$ dąży do jedności, gdy punkt B przysuwa się do punktu A, zatem oznaczając przez Δs długość łuku AB możemy napisać

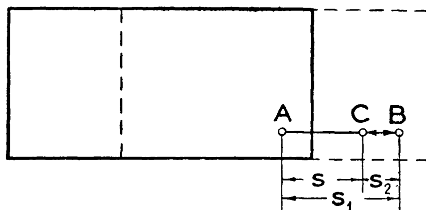
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{AB}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2.24}$$

Trzeba jednak pamiętać, że $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ określa wartość liczbową prędkości, kierunek zaś jej jest styczny do toru.

2.9. Ruchy złożone. Zdarza się często, że dane ciało, którego ruch obserwujemy, bierze udział w dwóch jednoczesnych ruchach. Gdy np. tratwa płynie



Rys. 2.10. Składanie ruchów. Kierunki przemieszczeń zgodne



Rys. 2.11. Składanie ruchów. Kierunki przemieszczeń przeciwne

po rzece, po tratwie zaś idzie człowiek, to bierze on udział jednocześnie w ruchu tratwy. Weźmy pod uwagę przypadek, gdy człowiek znajdujący się na tratwie płynącej w kierunku strzałki (rys. 2.10) idzie po tratwie w tym samym kierunku.

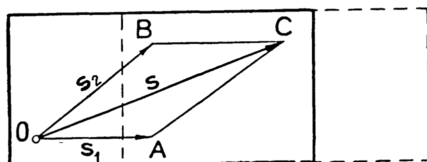
Łatwo stwierdzić, że droga s, jaką przebędzie on względem brzegów rzeki, równać się będzie sumie dróg: 1) s_1, jaką przebędzie tratwa względem brzegów rzeki i 2) s_2, jaką przebędzie człowiek względem tratwy:

$$s = s_1 + s_2. \tag{2.25}$$

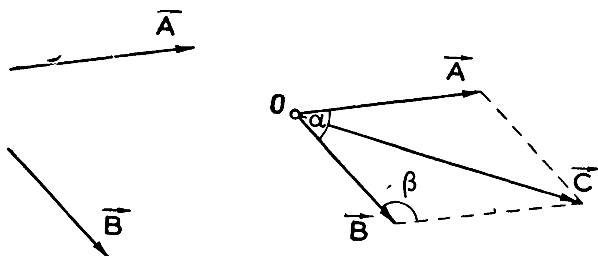
Gdy człowiek idzie w kierunku przeciwnym do ruchu tratwy (rys. 2.11), to

$$s = s_1 - s_2. \tag{2.26}$$

Gdy wreszcie człowiek porusza się w kierunku tworzącym pewien kąt z kierunkiem poruszania się tratwy, to przemieszczenie jego znajdziemy, budując na przemieszczeniach tratwy OA i człowieka względem tratwy OB równoległobok (rys. 2.12). Przekątna tego równoległoboku OC da przemieszczenie człowieka względem brzegów rzeki. Przemieszczenia OA i OB nazywamy przemieszczeniami składowymi, przemieszczenie OC — przemieszczeniem wypadkowym. Wszystkie wektory, a więc prędkości, przyśpieszenia i inne wielkości kierunkowe dodają się podobnie jak przemieszczenia według zasady równoległoboku. Jeżeli znane jest nam przemieszczenie człowieka względem brzegów rzeki i przemieszczenie tratwy, to aby znaleźć przemieszczenie człowieka względem tratwy, trzeba od przemieszczenia człowieka względem brzegów odjąć przemieszczenie tratwy. Podobnie postępujemy, aby znaleźć prędkość jakiegoś punktu A względem poruszającego się punktu B. Od prędkości punktu A odejmujemy prędkość punktu B. Odejmowanie wektorów będzie objaśnione w następnym paragrafie.



Rys. 2.12. Składanie ruchów. Kierunki przemieszczeń różne



Rys. 2.13. Dodawanie wektorów

2.10. Dodawanie i odejmowanie wektorów. Aby dodać dwa wektory swobodne, przenosimy je do dowolnego punktu O (rys. 2.13) i budujemy na nich równoległobok. Przekątna tego równoległoboku jest, jak mówimy, sumą geometryczną wektorów składowych (rys. 2.13). Można łatwo wykazać, że suma geometryczna kilku wektorów nie zależy od tego, w jakim porządku je dodajemy. Całe postępowanie nazywamy dodawaniem geometrycznym wektorów. Jeżeli wektor $\vec{C}$ jest sumą geometryczną wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$, to piszemy symbolicznie

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}. \tag{2.27}$$

(Dwa wektory posuwne możemy tylko wtedy dodać według tej zasady, gdy dadzą się one przesunąć wzdłuż prostych ich działania do jednego punktu, gdy więc te proste się przecinają, wektory zaś związane z punktem tylko wtedy, gdy są one przyłożone do tego samego punktu.)

Biorąc pod uwagę trójkąt OBC, oznaczając kąt przy wierzchołku B literą β, a kąt przy wierzchołku O równoległoboku, czyli kąt pomiędzy wektorami, literą α, możemy obliczyć z tego trójkąta długość wektora $\vec{C}$ stosując znane twierdzenie trygonometryczne:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2|A||B|\cos\beta}.$$

Zważywszy, że $\sphericalangle\alpha = 180° - \beta$, możemy napisać $\cos\alpha = -\cos\beta$, gdzie α jest kątem między wektorami $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Zatem

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2|A||B|\cos\alpha}. \tag{2.28}$$

Przypadki szczególne:

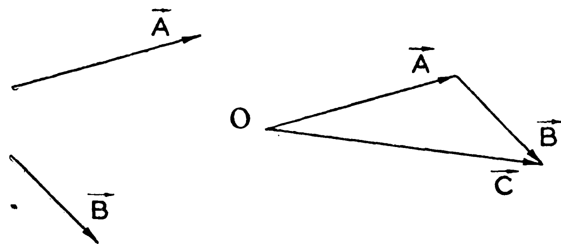
a) gdy $\alpha = 0$, $\cos\alpha = +1$, wtedy

$$C = +\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB} = A + B,$$

b) gdy $\alpha = 180°$, $\cos\alpha = -1$, wtedy

$$C = +\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB} = |A - B|.$$

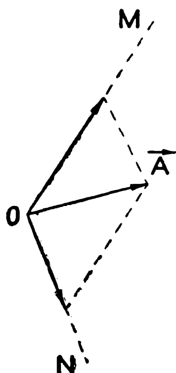
Zamiast budować równoległobok na wektorach składowych, możemy otrzymać wypadkową dwóch wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ przesuwając wektor $\vec{B}$ tak, aby jego początek zszedł się z końcem wektora $\vec{A}$. Bok $\overrightarrow{OC}$ zamykający trójkąt będzie wektorem wypadkowym (rys. 2.14). Dwa wektory o równych długościach, lecz przeciwnych kierunkach, nazwaliśmy przeciwnymi. Suma geometryczna dwóch wektorów przeciwnych równa się zeru.



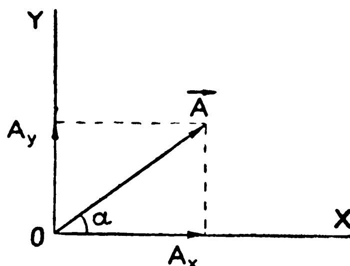
Rys. 2.14. Prostszy sposób dodawania wektorów

Dany wektor $\vec{A}$ możemy uważać zawsze za sumę geometryczną dwu innych wektorów $\vec{B}$ i $\vec{C}$. Stąd wynika łatwa metoda rozkładania wektora na składowe. Lecz wektor można rozłożyć na składowe na nieskończenie wiele sposobów. Zadanie staje się określone, gdy mamy dwa kierunki OM i ON (rys. 2.15) i chcemy rozłożyć wektor $\vec{A}$ na

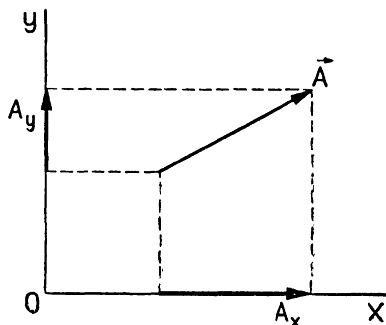
dwa wektory w tych kierunkach. Prowadzimy wówczas z punktu A równoległe do OM i ON. Odcinki odcięte przez nie na prostych OM i ON będą wektorami składowymi. Najczęściej rozkładamy dany wektor na dwa w kierunkach



Rys. 2.15. Rozkładanie wektora na składowe w dowolnych kierunkach



Rys. 2.16. Rozkładanie wektora na składowe w dwóch kierunkach do siebie prostopadłych

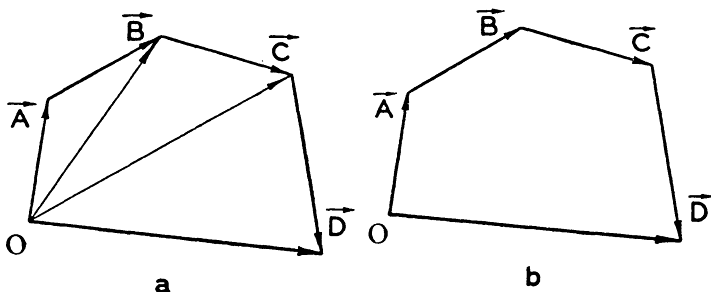


Rys. 2.17. Rozkładanie wektora na składowe

wzajemnie do siebie prostopadłych. Wtedy składowe A_x i A_y (rys. 2.16 i 2.17) będą rzutami prostokątnymi wektora A na te dwa kierunki:

$$A_x = A \cos \alpha,$$
$$A_y = A \sin \alpha. \tag{2.29}$$

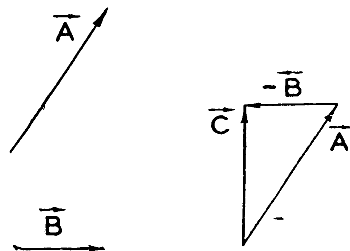
Jeżeli mamy większą liczbę wektorów niż dwa, to dodajemy je w ten sposób, że znajdujemy wypadkową pierwszych dwóch, do tej wypadkowej dodajemy



Rys. 2.18. Dodawanie większej liczby wektorów

trzeci wektor, do otrzymanej wypadkowej czwarty itd. Przypuśćmy np., że mamy dodać wektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ i $\vec{D}$. Dodajemy najpierw wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Bok zamykający trójkąt OAB będzie ich wypadkową (rys. 2.18a). Do tej wypadkowej

dodajemy wektor $\vec{C}$, do otrzymanej zaś nowej wypadkowej — wektor $\vec{D}$. Łatwo z rysunku stwierdzić, że całe postępowanie można uprościć. Można mianowicie z końca wektora $\vec{A}$ nakreślić wektor równy wektorowi $\vec{B}$, z końca wektora $\vec{B}$ nakreślić wektor równy wektorowi $\vec{C}$, wreszcie z końca wektora $\vec{C}$ wykreślić wektor równy wektorowi $\vec{D}$ (rys. 2,18b). Wektor zamykający wielobok będzie wektorem wypadkowym. Jeżeli koniec ostatniego wektora zejdzie się z początkiem pierwszego, tj. gdy otrzymamy wielobok zamknięty, oznacza to, że wypadkowa wektorów składowych równa się zeru, że one się znoszą.



Rys. 2. 19. Odejmowanie wektora $\vec{B}$ od wektora $\vec{A}$

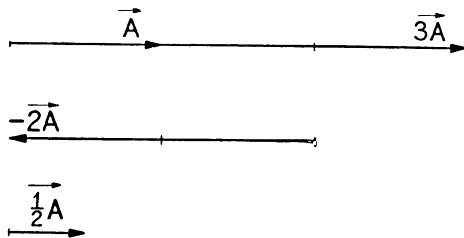
Odjąć od danego wektora $\vec{A}$ wektor $\vec{B}$, to znaczy dodać wektor przeciwny wektorowi $\vec{B}$, a więc $-\vec{B}$ (rys. 2.19). Wypadkowa wektorów $\vec{A}$ i $-\vec{B}$ będzie różnicą geometryczną wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}.$$

2.11. Mnożenie i dzielenie wektora przez skalar lub liczbę. Iloczynem wektora $\vec{A}$ przez liczbę lub skalar k nazywamy wektor, którego długością jest kA, kierunek zaś i zwrot jest zgodny z kierunkiem i zwrotem wektora $\vec{A}$, o ile $k > 0$, zwrot zaś przeciwny, o ile $k < 0$. Gdy $k = 0$, otrzymujemy wektor zerowy.

Gdy $k > 1$, wektor $\overrightarrow{kA}$ jest dłuższy od wektora $\vec{A}$, gdy $k < 1$, wektor $\overrightarrow{kA}$ jest krótszy od wektora $\vec{A}$ (rys. 2.20).

Podzielić wektor $\vec{A}$ przez liczbę lub skalar $k \neq 0$, to znaczy pomnożyć go przez $\frac{1}{k}$.



Rys. 2.20. Mnożenie wektora przez liczbę

2.12. Ruch po okręgu. Gdy punkt A porusza się po obwodzie koła, to promień łączący go ze środkiem koła, czyli jego promień wodzący, zakreśla kąt, który rośnie w miarę upływu czasu, czyli jest funkcją czasu. Oznaczając przez α_1 kąt zakreślony (rys. 2.21) przez promień wodzący w czasie t_1, zaś przez α_2 — kąt zakreślony w czasie t_2, nazwiemy średnią prędkością kątową stosunek

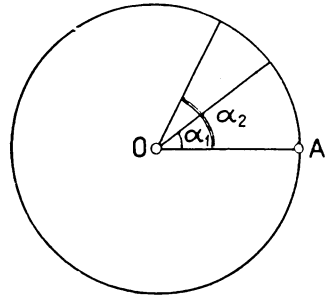
$$\omega_{śr} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1}. \qquad (2.30)$$

Chwilową prędkość kątową określamy w sposób następujący:

$$\omega = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\alpha}{dt}. \tag{2.31}$$

Chwilową prędkość punktu na torze określiliśmy w ust. 2.8. W odróżnieniu od prędkości kątowej nazywamy ją często prędkością liniową punktu. Między prędkością liniową i kątową istnieje prosty związek wynikający z definicji tych wielkości. Oznaczmy przez s_1 i s_2 drogi przebyte, a więc łuki odpowiadające kątom α_1 i α_2. Kąty w mierze łukowej są określone równościami

$$\alpha_1 = \frac{s_1}{r}, \qquad \alpha_2 = \frac{s_2}{r}.$$



Rys. 2.21. Ruch po okręgu koła Prędkość kątowa

Zatem chwilową prędkość kątową możemy wyrazić w sposób następujący:

$$\omega = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{\frac{s_2}{r} - \frac{s_1}{r}}{t_2 - t_1} =$$

$$= \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{1}{r} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{r} \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{r} v = \frac{v}{r}, \tag{2.32}$$

skąd

$$\boxed{v = r\omega.} \tag{2.33}$$

W analogiczny sposób, jak poprzednio prędkość kątową, określamy przyśpieszenie kątowe średnie:

$$\varepsilon_{śr} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.34}$$

Jest to stosunek przyrostu prędkości kątowej do przyrostu czasu. Przyśpieszenie kątowe chwilowe określa się wzorem:

$$\varepsilon = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 \quad t_1} = \frac{d\omega}{dt}. \tag{2.35}$$

Definiujemy więc przyśpieszenie kątowe chwilowe albo wprost przyśpieszenie kątowe jako granicę, do której dąży stosunek przyrostu prędkości kątowej do przyrostu czasu, gdy przyrost czasu dąży do zera, czyli jako pochodną prędkości kątowej względem czasu.

Na wymiar prędkości kątowej otrzymamy

$$[\omega] = [t^{-1}]. \tag{2.36}$$

Jednostką jest radian na sec.

Wymiar przyśpieszenia kątowego

$$[\varepsilon] = [t^{-2}]. \qquad (2.37)$$

Jednostką jest radian na sec².

Jeżeli wartość liczbowa prędkości po torze krzywoliniowym wzrasta, wówczas istnieje przyśpieszenie liniowe w kierunku stycznym do toru, tzw. przyśpieszenie styczne a_t określone przez wzór następujący:

$$a_t = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}, \qquad (2.38)$$

gdzie $v_2 - v_1$ oznacza przyrost wartości liczbowej prędkości. Ponieważ w ruchu kołowym mieliśmy na przyśpieszenie kątowe wzór

$$\varepsilon = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1},$$

zaś

$$\omega = \frac{v}{r},$$

a więc otrzymamy

$$\varepsilon = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{1}{r} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{1}{r} \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{a_t}{r}.$$

Wartość przyśpieszenia kątowego w ruchu po kole równa się wartości liczbowej przyśpieszenia liniowego stycznego podzielonej przez promień koła:

$$\varepsilon = \frac{a_t}{r}, \quad \text{skąd} \quad a_t = \varepsilon r. \qquad (2.39)$$

Przyśpieszenie liniowe styczne równa się przyśpieszeniu kątowemu pomnożonemu przez promień koła.

Jak zobaczymy w następnym ustępie, prócz przyśpieszenia stycznego istnieje w ruchu krzywoliniowym przyśpieszenie normalne. Przyśpieszenie całkowite jest sumą geometryczną przyśpieszenia stycznego i normalnego i w ogólności może ze styczną do toru tworzyć różne kąty.

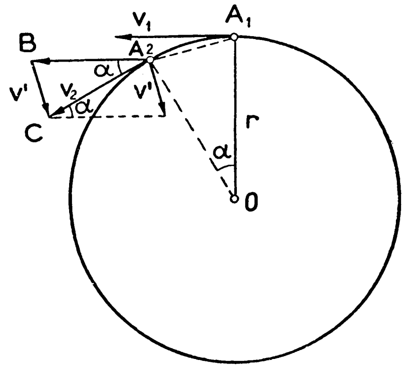
2.13. Ruch jednostajny po okręgu. Przyśpieszenie dośrodkowe. Jeżeli punkt poruszający się po okręgu koła przebywa w równych, lecz dowolnych przedziałach czasu równe łuki, to ruch jest jednostajny. Wartość liczbowa prędkości w takim ruchu jest stała, niezmienna, lecz kierunek jej wciąż ulega zmianie. Przypuśćmy, że w chwili t_1, punkt ruchomy znajdujący się w miejscu A_1 toru (rys. 2. 22) ma prędkość, którą wyobraża wektor $\vec{v}_1$, zaś w chwili t_2, w miejscu A_2 ma prędkość $\vec{v}_2$. Możemy uważać prędkość $\vec{v}_2$ za wynik dodania się do poprzedniej

prędkości $\vec{v}_1$ prędkości $\vec{v}'$. Oczywiście będzie to dodawanie geometryczne. Będziemy więc mieli

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}', \quad \text{skąd} \quad \vec{v}' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1.$$

$\vec{v}'$ będzie więc różnicą między prędkością $\vec{v}_2$ a prędkością początkową $\vec{v}_1$, czyli przyrostem prędkości. Jeżeli istnieje przyrost prędkości, to musi istnieć przyśpieszenie. Przyśpieszenie średnie na odcinku A_1A_2 będzie określone wzorem

$$\vec{a}_{\text{śr}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}'}{t_2 - t_1}. \tag{2.40}$$



Rys. 2.22. Ruch jednostajny po okręgu

Dwa trójkąty, mianowicie OA_1A_2 oraz A_2BC są podobne, gdyż kąt A_1OA_2 jest równy kątowi BA_2C (jako kąty o ramionach odpowiednio prostopadłych), pozostałe zaś kąty muszą być też odpowiednio równe, gdyż trójkąty te są równoramienne (trójkąt OA_1A_2 jest równoramienny, gdyż jego dwa boki są promieniami tego samego koła, a trójkąt A_2BC jest równoramienny, gdyż jego dwa boki są to równe odcinki v_1 i v_2). Zatem te dwa trójkąty są podobne. W trójkątach podobnych odpowiednie boki są proporcjonalne. Możemy zatem napisać

$$\frac{BC}{A_1A_2} = \frac{A_2B}{OA_1}, \quad \text{czyli} \quad \frac{v'}{A_1A_2} = \frac{v_1}{r}, \tag{2.41}$$

skąd otrzymujemy

$$v' = A_1A_2 \frac{v_1}{r}. \tag{2.42}$$

Podstawiając tę wartość na v' do równania (2. 40) otrzymamy na wartość liczbową przyśpieszenia średniego wzór

$$a_{\text{śr}} = \frac{A_1A_2}{t_2 - t_1} \frac{v_1}{r}. \tag{2.43}$$

Przy przejściu do granicy otrzymamy wzór na wartość przyśpieszenia chwilowego

$$a_n = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} a_{\text{śr}} = \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{A_1A_2}{t_2 - t_1} \frac{v_1}{r} = \frac{v_1}{r} \lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{A_1A_2}{t_2 \quad t_1}. \tag{2.44}$$

Ponieważ według definicji prędkości w ruchu krzywoliniowym (patrz ust. 2. 8, str. 37)

$$\lim_{t_2 - t_1 \to 0} \frac{A_1A_2}{t_2 - t_1} = v_1,$$

zatem na przyśpieszenie chwilowe otrzymamy wzór

$$a_n = \frac{v_1}{r} v_1 = \frac{v_1^2}{r}. \tag{2.45}$$

Wartość liczbowa prędkości jest stała. Oznaczmy tę stałą wartość przez v:

$$v_1 = v_2 = v.$$

Otrzymamy zatem na przyśpieszenie w ruchu jednostajnym po okręgu koła wzór

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r}.} \tag{2.46}$$

(Uwaga. Tylko wartości liczbowe prędkości v_1 i v_2 są równe, natomiast wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ nie są równe. Wektory są równe wtedy, gdy mają równe wartości i kierunki.)

Podstawiając do wzoru (2.46) wyprowadzony poprzednio związek między prędkością liniową i kątową

$$v = r\omega$$

(ust. 2. 11, wzór 2. 33) otrzymamy na przyśpieszenie w ruchu po okręgu koła wyrażenie:

$$a_n = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2. \tag{2.47}$$

Widać, że gdy przechodzimy do granicy zbliżając do siebie nieograniczenie chwile obserwacji t_2 i t_1, to znaczy zbliżając do siebie punkty obserwacji A_2 i A_1, to kierunek wektora $\vec{v}'$ zbliża się coraz bardziej do kierunku promienia. W granicy zatem przyrost prędkości $\vec{v}'$ będzie skierowany ku środkowi koła wzdłuż promienia. A więc i przyśpieszenie chwilowe będzie skierowane wzdłuż promienia ku środkowi koła. Nazywamy je dlatego przyśpieszeniem dośrodkowym. W ruchu jednostajnym po okręgu przyśpieszenie styczne jest równe zeru.

Gdy punkt przebywa cały okręg koła ruchem jednostajnym w czasie T zwanym okresem, to jego promień wodzący opisuje kąt 2π. Zatem jego prędkość kątowa będzie

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Podstawiając to wyrażenie zamiast ω do wzoru (2. 47) otrzymamy następujący wzór na przyśpieszenie dośrodkowe:

$$a_n = \frac{4\pi^2 r}{T^2}. \tag{2.48}$$

Jeżeli punkt wykonywa n całkowitych obiegów w sekundzie, to jego promień wodzący opisuje w sekundzie kąt $2\pi n$. Zatem jego prędkość kątowa będzie

$$\omega = \frac{2\pi n}{1 \text{ sec}} = 2\pi n \text{ rd/sec},$$

przyśpieszenie dośrodkowe

$$a_n = r\omega^2 = 4\pi^2 n^2 r. \qquad (2.49)$$

Gdyby punkt poruszał się ruchem niejednostajnym po okręgu, wtedy istniałoby zarówno przyśpieszenie styczne, jak i normalne. Całkowite przyśpieszenie jest wtedy wektorem wypadkowym tych przyśpieszeń składowych.

Zadania

2.18. Statek płynie z prądem rzeki z prędkością 7,8 m/sec, zaś pod prąd z prędkością 5 m/sec (względem brzegów). Jaka jest prędkość wody w rzece?

Odpowiedź: 1,4 m/sec.

2.19. Wiatr pędzi łódź żaglową po morzu ku zachodowi z prędkością $v_1 = 3$ m/sec. Jednocześnie prąd morski unosi ją ku północy z prędkością $v_2 = 2$ m/sec. Jaka jest jej prędkość v i kąt α, jaki ona tworzy z kierunkiem wschodnio-zachodnim?

Odpowiedź: $v = 3{,}61$ m/sec, $\alpha = 33°21'$.

2.20. Woda w rzece płynie z prędkością $v_1 = 4$ m/sec. Po rzece płynie łódź w kierunku tworzącym z kierunkiem prądu kąt $\alpha = 120°$ z prędkością $v_2 = 2$ m/sec. Jaka jest prędkość łodzi v względem brzegów i jaki kąt tworzy z brzegiem rzeki?

Odpowiedź: $v = 3{,}46$ m/sec, 30°.

2.21. Wiatr wieje z prędkością $v = 12$ m/sec w kierunku tworzącym kąt 30° z kierunkiem wschodnio-zachodnim. Jakie są składowe północna v_1 i zachodnia v_2 jego prędkości?

Odpowiedź: północna $v_1 = 6$ m/sec, zachodnia $v_2 = 10{,}4$ m/sec.

2.22. Auto jedzie po szosie nachylonej do poziomu pod kątem 3° z prędkością 15 m/sec. Jakie są składowe pozioma i pionowa jego prędkości?

Odpowiedź: 14,98 m/sec, 0,78 m/sec.

2.23. Pociąg jadący z prędkością $v_1 = 17$ m/sec mija drugi pociąg jadący w tym samym kierunku po sąsiednim torze z prędkością $v_2 = 12$ m/sec. Jaka będzie prędkość pierwszego pociągu względem drugiego i odwrotnie — prędkość drugiego pociągu względem pierwszego?

Odpowiedź: 1) 5 m/sec, 2) — 5 m/sec.

2.24. Podróżny jadący pociągiem w kierunku od zachodu ku wschodowi z prędkością $v_1 = 40$ km/godz. widzi gołębia lecącego na północny wschód z prędkością $v_2 = 56{,}56$ km/godz. Jak on oceni prędkość gołębia względem pociągu i jej kierunek?

Wskazówka: $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$.

Odpowiedź: 40 km/godz. prostopadle do prędkości pociągu.

2.25. Dwa samochody wyjeżdżają dwiema drogami tworzącymi kąt $\alpha = 60°$ z ich skrzyżowania, jadąc ze stałą prędkością $v_1 = v_2 = 70$ km/godz. Z jaką prędkością jeden będzie się oddalał od drugiego i jaki będzie kierunek ruchu jednego względem drugiego?

Odpowiedź: 70 km/godz. wzdłuż linii łączącej samochody.

2.26. Jaka jest prędkość kątowa ω wskazówki 1) godzinnej, 2) minutowej, 3) sekundowej?

Odpowiedź: 1) 0,0001454 rd/sec, 2) 0,001745 rd/sec, 3) 0,1047 rd/sec.

2.27 Z jaką prędkością kątową ω obraca się Ziemia? (Czas obrotu Ziemi względem gwiazd: 86 164,1 sec.)

Odpowiedź: 0,00007292 rd/sec.

2.28. Jaką prędkość liniową v przy ruchu obrotowym Ziemi ma 1) punkt na równiku, 2) punkt pod szerokością geograficzną Warszawy (57°19′).

Odpowiedź: 1) 465 m/sec, 2) 284 m/sec.

2.29. Jaka jest prędkość kątowa ω koła parowozu o średnicy 1,5 m, który jedzie z prędkością 54 km/godz.?

Odpowiedź: $\omega = 20$ rd/sec.

2.30. Jakie jest przyśpieszenie kątowe ε koła zamachowego silnika benzynowego, który po upływie 20 sec od chwili puszczenia wykonywa 3000 obrotów na minutę?

Odpowiedź: $\varepsilon = 15{,}7$ rd/sec².

2.31. Jakie było przyśpieszenie liniowe styczne punktu na obwodzie tego koła (patrz poprzednie zadanie), jeżeli ma ono średnicę 24 cm?

Odpowiedź: 188,4 cm/sec².

2.32. Jaki jest okres T, prędkość kątowa ω i przyśpieszenie dośrodkowe a_n punktu na obwodzie wirnika silnika elektrycznego o średnicy 30 cm wykonywającego 1500 obrotów na minutę?

Odpowiedź: $T = 0{,}04$ sec, $\omega = 157{,}1$ rd/sec, $a_n = 370\,100$ cm/sec².

2.33. Ile obrotów w sekundzie powinno wykonywać koło o średnicy 1 m, aby przyśpieszenie dośrodkowe punktu na jego obwodzie równało się przyśpieszeniu siły ciężkości (981 cm/sec²).

Odpowiedź: 0,705 obrotów na sekundę.

2.34. Pociąg porusza się na zakręcie po torze kołowym o promieniu $r = 400$ m, a jego przyśpieszenie styczne $a_t = 0{,}2$ m/sec². Jakie jest jego przyśpieszenie normalne a_n i całkowite a w chwili, gdy jego prędkość $v = 10$ m/sec?

Odpowiedź: $a_n = 0{,}25$ m/sec², $a = 0{,}32$ m/sec².

Pytania do powtórzenia materiału

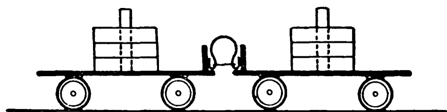
1. Jak się określa położenie punktu na prostej? na płaszczyźnie? w przestrzeni?
2. Jaki ruch nazywamy jednostajnym? Jakie są równania ruchu jednostajnego? Czemu się równa prędkość w ruchu jednostajnym?
3. Jak się określa prędkość średnią i chwilową w ruchu niejednostajnym prostoliniowym?
4. Jak się określa przyśpieszenie średnie i chwilowe w ruchu niejednostajnym prostoliniowym?
5. Jakie są jednostki prędkości i przyśpieszenia?
6. Jaką wartość ma przyśpieszenie ruchu jednostajnego?
7. Jaki ruch nazywamy jednostajnie zmiennym? jednostajnie przyśpieszonym? jednostajnie opóźnionym?
8. Jakie są równania ruchu jednostajnie przyśpieszonego? jednostajnie opóźnionego?
9. Jaką wartość ma przyśpieszenie w ruchu jednostajnie zmiennym?
10. Co nazywamy wymiarem wielkości fizycznej?
11. Jakie są wymiary prędkości, przyśpieszenia, pola, objętości, kąta?

12. Jakie wielkości nazywamy skalarami, jakie wektorami?
13. Jakie wektory nazywamy równymi? jakie przeciwnymi?
14. Co nazywamy wektorem zerowym? jaki jest jego kierunek?
15. Jak się określa kąt między wektorami?
16. Jak się dodaje i odejmuje wektory?
17. Jak się rozkłada wektory na składowe?
18. Czemu się równa iloczyn, iloraz wektora przez liczbę?
19. Jak się określa prędkość średnią i chwilową w ruchu krzywoliniowym?
20. Jak się określa średnią i chwilową prędkość kątową?
21. Jaki jest związek między prędkością kątową i liniową?
22. Jak się określa średnie i chwilowe przyśpieszenie kątowe?
23. Jaki jest związek między przyśpieszeniem kątowym a przyśpieszeniem liniowym stycznym?
24. Jakie są jednostki i wymiary prędkości i przyśpieszenia kątowego?
25. Jaką wartość ma przyśpieszenie dośrodkowe w ruchu po okręgu? Jak je znaleźć? Jakie są wzory na przyśpieszenie dośrodkowe?

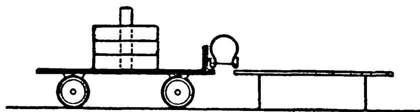
3. Zasady dynamiki

Dynamika jest częścią mechaniki zajmującą się ruchem w związku z warunkami, w jakich ruchy powstają, bierze zatem pod uwagę czynniki wywołujące ruch (działania, siły). Nazwa pochodzi od słowa greckiego δυναμις (dinamis) oznaczającego moc, działanie.

3.1. Trzecia zasada Newtona*. Zaczniemy od trzeciej spośród trzech zasad Newtona, zasady stwierdzającej ważną prawidłowość w przyrodzie. Następujące doświadczenie ilustruje tę zasadę: weźmy dwa wózki poruszające się z możliwie małym tarciem po poziomej płaszczyźnie. Umieśćmy między nimi zgiętą w łuk dostatecznie silną stalową sprężynę, której końce związane są mocną nitką (rys. 3.1).



Rys. 3.1. Wózki po przepaleniu nitki poruszają się w przeciwne strony



Rys. 3.2. Gdy sprężyna nie ma o co się oprzeć, wózek się nie poruszy

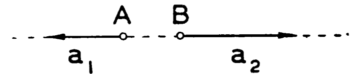
Wózki możemy ładować rozmaicie. Naładujmy je i przepalmy nitkę np. płomieniem zapałki. Sprężyna zacznie działać i pod jej wpływem wózki zaczną się poruszać w przeciwne strony. Gdy wózki są zupełnie jednakowe i posiadają jednakowe ładunki, przebędą one w równych czasach równe drogi. Stąd wniosek, że i ich prędkości końcowe musiały być jednakowe, a więc również i ich przyśpieszenia uzyskiwane podczas działania sprężyny. Lecz obładujmy wózki różnie, umieśćmy np. na jednym jedną płytkę ołowianą, na drugim — dwie lub trzy. Przekonamy się przy takim samym jak poprzednio doświadczeniu, że wózek mniej obładowany uzyska większą prędkość, a zatem i przyśpieszenie, natomiast wózek więcej obładowany będzie się poruszał wolniej, jego przyśpieszenie będzie mniejsze. Można stwierdzić doświadczeniem, że sprężyna tylko pośredniczy tu we wzajemnym działaniu na siebie wózków. Jeżeli jeden z wózków usuniemy i odpowiedni koniec sprężyny umieścimy na gładkiej płaszczyźnie, np. na szybie szklanej, to po prze-

---

* Zasadą nazywamy w fizyce prawo bardzo ogólne odnoszące się do wielu dziedzin zjawisk, albo takie, któremu podlegają w ogóle wszelkie zjawiska. Takim prawem jest np. zasada zachowania energii.

paleniu nitki tylko sprężyna odskoczy, a wózek się nie poruszy (rys. 3. 2), względnie poruszy się bardzo nieznacznie.

Zawsze w doświadczeniu przekonywamy się, że ilekroć jakieś ciało zaczyna się poruszać, zawsze temu ruchowi towarzyszy ruch innego ciała. Ten ruch nie zawsze da się spostrzec, w szczególności, jeżeli jednym z ciał jest Ziemia. Wiele doświadczeń jednak nas o tym przekonywa. Połóżmy na jednym korku pływającym na wodzie magnes, na drugim — kawałek żelaza. Oba te ciała zaczną się jednocześnie poruszać, zbliżając się ku sobie. Jeżeli człowiek stojący w łódce zacznie iść ku przodowi łódki, łódka jednocześnie zacznie się poruszać w tył (na spokojnej wodzie). Wioślarz wiosłując odpycha wiosłami wodę, woda odpowiada na to przeciwdziałaniem powodując ruch łódki naprzód. Karabin lub działo przy strzale cofa się w tył. Te fakty doświadczalne ujęte są w trzeciej zasadzie Newtona, która mówi, że działanie ciał materialnych jest zawsze wzajemne. Ciała udzielają nawzajem jedno drugiemu przyśpieszeń. Przyśpieszenia te są zawsze skierowane przeciwnie. Lecz to nie jest jeszcze całkowitą treścią trzeciej zasady. Trzecie prawo Newtona stwierdza jeszcze, że stosunek tych przyśpieszeń jest stały, niezależny od rodzaju działań między danymi dwoma ciałami. Jeżeli więc stwierdzimy, że ciało A uzyskało w jednym przypadku np. dwa razy większe przyśpieszenie niż ciało B przy ich wzajemnym działaniu, to we wszystkich przypadkach przyśpieszenie ciała A będzie dwa razy większe od przyśpieszenia ciała B bez względu na to, czy ciała te będą działały jedno na drugie za pośrednictwem sprężyny silnej czy słabiej, czy też dlatego, że będą naelektryzowane lub namagnesowane.



Rys. 3.3. Stosunek przyśpieszeń, jakich dwa ciała nawzajem sobie udzielają, jest stały

Możemy krótko wypowiedzieć trzecią zasadę Newtona w postaci następującej:

Dwa ciała udzielają jedno drugiemu nawzajem przyśpieszeń skierowanych przeciwnie. Stosunek tych przyśpieszeń jest stały, niezależny od rodzaju działań między tymi ciałami (rys. 3. 3)*:

$$\frac{a_1}{a_2} = \text{const.} \tag{3.1}$$

Stosunek ten jest stałą fizyczną właściwą zespołowi dwóch ciał A i B. Względne własności tych ciał ujmujemy za pomocą terminu *masa*, który określają następujące umowy:

1. Gdy ciała A i B nadają sobie równe przyśpieszenia, mówimy, że masy ich są równe. Jeżeli przyśpieszenie np. ciała B jest 2, 3,..., w ogóle n razy mniejsze od przyśpieszenia ciała A, to mówimy, że masa ciała B jest 2,3..., w ogóle n razy

* Wektory a_1 i a_2 są zawsze skierowane przeciwnie, ale niekoniecznie muszą być umiejscowione na tej samej prostej. Znamy działania elektrodynamiczne wywołujące przyśpieszenie nie leżące na tej samej prostej.

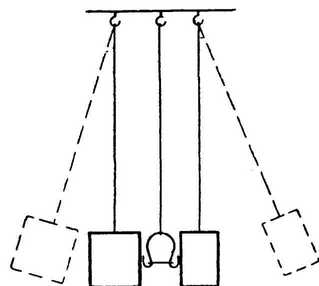
większa od masy ciała A. W ten sposób wprowadzamy nową wielkość fizyczną, którą możemy wyrazić liczbowo, jeżeli obierzemy jakąś określoną masę za jednostkową. Ponieważ masy ciał uważamy za odwrotnie proporcjonalne do przyśpieszeń uzyskiwanych przez nie przy ich wzajemnym oddziaływaniu, więc oznaczając przez m_1 i m_2 miary ich mas przy dowolnej jednostce — możemy napisać

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{a_2}{a_1}. \tag{3.2}$$

Po prawej stronie musimy napisać znak minus, gdyż przyśpieszenia jako przeciwnie skierowane mają znaki przeciwne, masy zaś są zawsze dodatnie. Jeżeli weźmiemy pod uwagę tylko wartości bezwzględne przyśpieszeń, wówczas możemy napisać

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|a_2|}{|a_1|}. \tag{3.3}$$

2. Równanie (3. 3) określa tylko stosunek dwóch mas. Aby je móc wyznaczać liczbowo, musimy przyjąć pewną masę za jednostkę. Za jednostkę masy przyjmujemy według umowy międzynarodowej masę walca sporządzonego ze stopu 90% platyny i 10% irydu, zwanego „Międzynarodowym Prototypem Kilograma". Każdą masę równą temu wzorcowi nazywamy kilogramem. W skróceniu nazwę kilograma piszemy kg. W praktyce często używana jest jednostka 1 tonna = 1000 kg. W układzie CGS używamy jako jednostki masy jednej tysięcznej części kilograma, zwanej gram, skrót g. Nie jest trudno zrobić doświadczenie, w którym ciało o masie 1 kg i drugie ciało o nieznanej masie wprawiałyby się wzajemnie w ruch. Można np. zawiesić masę 1 kg i ciało o nieznanej masie na sznurkach i umieścić między nimi zgiętą w łuk i związaną sprężynę (rys. 3. 4). Po przepaleniu nitki ściągającej sprężynę ta ostatnia rozprostuje się i oba ciała poruszą się w przeciwne strony. Każde z nich tworzy wahadło, które odchyli się o pewien kąt od położenia pionowego. Z wielkości tego kąta lub z wysokości, na jaką wzniesie się każde z tych ciał, można obliczyć ich początkowe przyśpieszenie. Jeżeli w tym doświadczeniu ciało o nieznanej masie m oraz 1 kg nadają nawzajem jedno drugiemu przyśpieszenia



Rys. 3.4. Prosty, lecz niezbyt dokładny sposób porównywania mas

$$a_m \quad \text{i} \quad a_1,$$

to możemy napisać

$$\frac{m}{1\,\text{kg}} = \frac{a_1}{a_m}, \tag{3.4}$$

skąd

$$m = \frac{a_1}{a_m} \text{ kg}. \tag{3.5}$$

Oczywiście nie byłby to sposób dokładny, znamy o wiele dokładniejsze, lecz chodzi na razie o zasadę.

3.2. Druga zasada Newtona. Pojęcie siły. Gdy ciało wykazuje przyśpieszenie, to mówimy, że na to ciało działa siła. Jak to później będzie usprawiedliwione, siłę możemy uważać za wektor o kierunku zgodnym z kierunkiem przyśpieszenia. Wartości liczbowe sił działających na to samo ciało lub na różne ciała o jednakowych masach uważamy za proporcjonalne do ich przyśpieszeń. Jeżeli ciała o różnych masach mają to samo przyśpieszenie, to siły na nie działające uważamy za proporcjonalne do mas tych ciał. Za siłę jednostkową przyjęto taką siłę, która jednostkowej masie nadaje jednostkowe przyśpieszenie. Wartość liczbową siły nadającej masie *m* przyśpieszenie *a* możemy znaleźć następującym prostym rozumowaniem:

Gdy masa $= 1$ wykazuje przyśpieszenie $= 1$, to siła działająca $F = 1$,
" " $= m$ " " $= 1$, " " " $F = m$,
" " $= m$ " " $= a$, " " " $F = ma$.

A więc wartość liczbowa siły równa się wartości liczbowej masy pomnożonej przez wartość liczbową przyśpieszenia. Ponieważ siła jest wektorem o kierunku przyśpieszenia, więc możemy napisać równanie

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{3.6}$$

które jednocześnie określa kierunek i miarę siły. Równanie to wyraża drugą zasadę Newtona.

W układzie MKS jednostką siły jest niuton (N). Niuton jest siłą, która masie 1 kg nadaje przyśpieszenie 1 m/sec^2. W układzie CGS jednostką siły jest dyna (dyn). Dyna jest siłą, która masie 1 g nadaje przyśpieszenie 1 cm/sec^2. 1N $= 10^5$dyn.

3.3. Zasada niezależności działania sił. Jeżeli na ciało *A* działa jednocześnie kilka ciał, to każde z nich nadaje mu takie przyśpieszenie, jakby innych ciał nie było. Znaczy to, że wielkość przyśpieszeń nabywanych przez ciało *A* wskutek działania drugiego ciała nie zależy od obecności innych ciał. Przyśpieszenia te, jak wykazuje doświadczenie, dodają się geometrycznie. Ponieważ siły są proporcjonalne do przyśpieszeń i mają ich kierunek, to stąd wynika, że i siły dodają się geometrycznie, są zatem wielkościami wektorowymi. Zasada ta usprawiedliwia to, co było wyżej powiedziane, że siła jest wektorem.

Oznaczając przez $\vec{a}$ wypadkowe przyśpieszenie ciała, zaś przez $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ — siły na nie działające, możemy napisać

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n \tag{3.7}$$

albo pisząc to symbolicznie w sposób przyjęty w matematyce

$$\boxed{m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i .} \tag{3.8}$$

Zatem iloczyn masy przez przyśpieszenie równa się sumie geometrycznej sił działających na ciało.

Mogłoby się zdawać, że związanie siły z przyśpieszeniem jest niesłuszne. Wiemy, że ciało puszczone swobodnie spada ruchem przyśpieszonym z pewnym określonym przyśpieszeniem. Jeżeli je zawiesimy na sprężynie, wówczas sprężyna rozciągnie się i ciało zawiśnie na niej bez ruchu. Czy byłoby logiczne przypuszczać, że siła przyciągania ziemskiego przestała działać na to ciało? Oczywiście nie. Powiemy, że teraz druga jeszcze siła zaczęła działać na to ciało, siła wywierana przez rozciągniętą sprężynę. Według równania (3. 7) napiszemy

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \tag{3.9}$$

Ponieważ $\vec{a} = 0$, zatem $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Dwie siły: ciężar i siła sprężyny dają wypadkową zero albo, jak mówimy, równoważą się. Zatem, gdy przyśpieszenie ciała równa się zeru, nie możemy wnioskować, że nie działa nań żadna siła. Mogą działać dwie, trzy lub więcej sił, które równoważą się wzajemnie. Siły te objawiają się przez odkształcenia ciał, na które działają.

3.4. Trzecia zasada Newtona ujęta za pomocą pojęcia siły. Przy użyciu pojęcia siły możemy trzecią zasadę Newtona wysłowić w innej niż poprzednio formie. Poprzednio wyraziliśmy tę zasadę równaniem (3. 2)

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{a_2}{a_1}. \tag{3.2}$$

Z równania (3. 2) możemy napisać

$$m_1 a_1 = -m_2 a_2 .$$

Lecz iloczyn $m_1 a_1$ równa się sile działającej na pierwsze ciało, a iloczyn $m_2 a_2$ równa się sile działającej na ciało drugie. Wynika stąd równość

$$\boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 .} \tag{3.10}$$

Siły, jakie dwa ciała wywierają nawzajem jedno na drugie, mają równe wartości liczbowe, a kierunki przeciwne. Przyśpieszenia, jakie te ciała uzyskują pod działaniem tych równych sił, są, oczywiście, jak wskazuje równanie (3. 2), odwrotnie proporcjonalne do ich mas. A więc np. podczas wystrzału działowego jednakowe siły działają na pocisk i na działo. Pocisk jednak uzyskuje wielkie przyśpieszenie dzięki mniejszej masie. Gdy kamień puszczony z dużej wysokości spada na

Ziemię, spada pod wpływem przyciągania Ziemi. Siła, z jaką Ziemia przyciąga kamień, równa jest sile, z jaką kamień przyciąga Ziemię. Jednak masa Ziemi jest tak wielka w porównaniu do masy kamienia, że Ziemia uzyskuje niedostrzegalne przyśpieszenie. Aby pociąg wprawić w ruch, koła lokomotywy obracają się odpychając szyny w tył. Pociąg wskutek oddziaływania szyn rusza naprzód, szyny wraz ze związaną z nimi Ziemią poruszą się w tył. Ruch Ziemi wskutek jej olbrzymiej masy będzie oczywiście niedostrzegalny. Można jednak zrobić doświadczenie wykazujące wzajemne działanie lokomotywy na szyny i szyn na lokomotywę. Jeżeli puścimy małą lokomotywkę nakręcaną (służącą jako zabawka) po szynach umieszczonych na lekko obracających się kółkach, to, gdy tylko lokomotywka zacznie się poruszać naprzód, szyny natychmiast zaczną się poruszać wstecz.

Trzecią zasadę Newtona wyrażają często krótko: akcja równa się reakcji.

3.5. Pierwsza zasada Newtona albo zasada bezwładności. Pierwsza zasada Newtona jest wnioskiem z zasady drugiej. Drugą zasadę Newtona wyrażało równanie

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Na podstawie zasady niezależności działania sił możemy ją również wyrazić w postaci

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots \tag{3.11}$$

Jeżeli w pierwszym z tych równań $F = 0$, czyli jeżeli na ciało nie działa żadna siła, to ponieważ masa ciała m jest zawsze odmienna od zera, musi być $a = 0$, przyśpieszenie musi być równe zeru. Gdy przyśpieszenie ciała równa się zeru, to ciało porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej lub też pozostaje w spoczynku. Jeżeli więc na ciało nie działa żadna siła, to ciało to pozostaje w spoczynku lub też porusza się po torze prostoliniowym ruchem jednostajnym, jak mówimy, na mocy bezwładności. Toteż zasadę tę nazywają zwykle *zasadą bezwładności*. Doświadczalnie zasada ta sprawdzić się nie da, ponieważ nie możemy zrealizować w naszych warunkach doświadczenia, w którym by na ciało nie działała żadna siła. Możemy tylko stwierdzić, że im mniejsza siła działa na ciało poruszające się, tym dłużej się ono porusza. Normalnie, w naszych ziemskich warunkach ruch hamuje tarcie. Kawał drewna pchnięty po podłodze zatrzyma się szybko, kula będzie się toczyć długo, tym dłużej, im gładsza jest podłoga. Jeszcze dłużej porusza się po torze poziomym wagon pchnięty przez lokomotywę. Słońce wraz z planetami porusza się w kierunku gwiazdozbioru Herkulesa z prędkością przeszło 20 km/sec. Jakiejkolwiek zmiany w tym ruchu nie można stwierdzić w przeciągu wielu lat. Ruch pocisku karabinowego na krótkim odcinku drogi jest w przybliżeniu prostoliniowy i jednostajny. Na większej przestrzeni tor pocisku odchyla się od linii prostej pod wpływem przyciągania ziemskiego. Prędkość pocisku w kierunku poziomym zmienia się bardzo powoli tylko wskutek oporu powietrza. Do prędkości tej dodaje

się prędkość nabywana w kierunku pionowym w dół pod wpływem przyciągania Ziemi. Malutkie, najmniejsze, jakie znamy, ciałka o nadzwyczaj małej masie, elektrony, biegnące w rurze próżniowej z prędkościami przewyższającymi wielokrotnie prędkość kuli karabinowej, biegną dokładnie po liniach prostych, jeżeli nie działają na nie inne siły prócz siły ciężkości.

Jeżeli w drugim z powyższych równań prawa strona równa się zeru, to znaczy, jeżeli siły działające na ciało dają wypadkową równą zeru, czyli są to siły równoważące się, to z równania tego wynika, że przyśpieszenie ciała równa się zeru, a więc ruch jest jednostajny prostoliniowy lub też ciało znajduje się w spoczynku.

Odwrotnie, jeżeli $a = 0$, to znaczy, jeżeli ciało znajduje się w spoczynku lub też w ruchu jednostajnym prostoliniowym, to albo nie działa na nie żadna siła, albo też siły działające na nie równoważą się. Ten ostatni przypadek w naszych warunkach ziemskich spotykamy nadzwyczaj często. Jeżeli pociąg w znacznej odległości od stacji porusza się ruchem jednostajnym, to wszystkie siły działające nań muszą się równoważyć. Jeżeli weźmiemy pod uwagę jeden wagon tego pociągu, to wiemy, że wagon znajdujący się przed nim ciągnie go naprzód, wagon znajdujący się za nim ciągnie go w tył. Ciężar wagonu działa w dół cisnąc na szyny. Szyny wskutek sprężystości toru cisną na koła w górę. Prócz tego działa jeszcze tarcie w kierunku przeciwnym do ruchu. Jeżeli wagon porusza się jednostajnie po linii prostej, wszystkie te siły muszą dawać wypadkową równą zeru.

3.6. Zasada zachowania masy. W mechanice ważną rolę odgrywa *zasada zachowania masy*, według której masa układu dowolnej liczby ciał równa się sumie mas tych ciał. Jeżeli do układu przybędzie jakieś ciało, to masa układu powiększy się dokładnie o tyle, ile wynosi masa dołączonego ciała. Na przykład masa związku chemicznego równa się zawsze sumie mas pierwiastków wchodzących do tego związku.

Zasada ta wydaje się prawie oczywista. Jeżeli jednak zastanowimy się nad jej treścią, to łatwo stwierdzimy, że fakt przez nią wyrażony wcale oczywisty nie jest. Poddajmy np. dwa ciała A i B działaniu tej samej siły F. Nabędą one przyśpieszeń a_A i a_B. Ich masy będą określone przez równania:

$$m_A = \frac{F}{a_A}, \qquad m_B = \frac{F}{a_B}. \tag{3.12}$$

Jeżeli teraz oba ciała połączymy w jedną całość i poddamy działaniu tej samej siły F, to musimy mieć

$$m_A + m_B = \frac{F}{a_{AB}}, \tag{3.13}$$

gdzie a_{AB} jest przyśpieszeniem obu mas złączonych w jedną całość. Z tych trzech równań otrzymujemy

$$\frac{F}{a_{AB}} = \frac{F}{a_A} + \frac{F}{a_B}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{a_{AB}} = \frac{1}{a_A} + \frac{1}{a_B}, \tag{3.14}$$

że taki związek zachodzi między przyśpieszeniami a_A, a_B i a_{AB} może nas pouczyć tylko doświadczenie.

3.7. Streszczenie zasad dynamiki. Układ współrzędnych, w którym stosują się zasady Newtona. Możemy streścić zasady dynamiki w sposób następujący:

Ciała materialne wywierają zawsze na siebie siły równe i przeciwne co do kierunku. Jedno drugiemu udziela zatem przyśpieszenia. Przyśpieszenia ich są skierowane przeciwnie. Stosunek tych przyśpieszeń jest stały i równa się odwrotnemu stosunkowi mas (ze znakiem minus) (III zasada Newtona).

Siła jest wprost proporcjonalna do przyśpieszenia ciała, na które ta siła działa: $F = ma$ (II zasada Newtona). Współczynnikiem proporcjonalności jest masa, cecha niezmienna, charakteryzująca dane ciało, w ogólności dla każdego ciała inna. Tak jak przyśpieszenie, siła jest wektorem i ma jego kierunek. Jeżeli siła ma stałą wartość i stały kierunek, przyśpieszenie również ma stałą wartość i stały kierunek; ruch ciała, jeżeli nie miało początkowej prędkości, jest jednostajnie przyśpieszony, prostoliniowy. Jeżeli ciało miało już nadaną początkową prędkość, ruch jest złożony, w ogólności krzywoliniowy.

Jeżeli na pewne ciało działa jednocześnie kilka innych ciał, siły wywierane przez nie składają się według zasady dodawania wektorów. Według tej samej zasady siły można rozkładać.

Przyśpieszenie proporcjonalne do siły znika razem z nią. Ciało usunięte spod działania sił poruszałoby się ruchem prostoliniowym jednostajnym, względnie pozostawałoby w spoczynku (I zasada Newtona). Tę własność ciał nazywamy bezwładnością. Również gdy siły działające na ciało równoważą się, ruch jest prostoliniowy i jednostajny (albo spoczynek). Ruch jednostajny prostoliniowy na mocy bezwładności trwa niezależnie od ruchów wytwarzanych przez przyłożone do ciała siły dodając się do nich geometrycznie.

Trzy zasadnicze, streszczone powyżej prawa dynamiki wypowiedział Newton w następującej formie:

1. Każde ciało pozostaje w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego prostoliniowego, dopóki siła na nie działająca nie zmusi go do zmiany tego stanu.

2. Zmiana ruchu* jest proporcjonalna do działającej siły i odbywa się w jej kierunku.

3. Każdemu działaniu odpowiada zawsze równe mu i przeciwnie skierowane przeciwdziałanie albo: działania dwóch ciał jednego na drugie są zawsze równe i skierowane przeciwnie.

W każdym podręczniku mechaniki zawsze naczelne miejsce zajmują te jej podstawowe zasady. Mimo iż różni autorzy przytaczają je w rozmaitej kolejności i często różnie sformułowane, tradycyjne nazwy tych zasad są zawsze zachowywane. Prawo bezwładności nosi nazwę I zasady Newtona, związek między siłą,

---

* Pod wyrażeniem „zmiana ruchu" należy tu rozumieć zmianę prędkości.

masą i przyśpieszeniem: $F = ma$ nazywamy II zasadą Newtona, zaś zasadę działania i przeciwdziałania — III zasadą Newtona.

Zasady Newtona są uogólnieniami obserwacji wielu zjawisk. Chociaż bezpośrednio doświadczeniem sprawdzić ich nie możemy, to jednak są one potwierdzone przez stałe sprawdzanie się niezliczonych wniosków, jakie możemy z nich wyprowadzić.

W kinematyce układ odniesienia mógł być zupełnie dowolnie wybrany, czy też związany z jakimkolwiek ciałem. W dynamice jest inaczej. Zasady Newtona nie są ważne w każdym układzie odniesienia. Bardzo dokładnie stosują się do ruchów odniesionych do układu współrzędnych, których początek jest związany ze Słońcem, a trzy osie współrzędnych są skierowane ku trzem gwiazdom stałym. Jak zobaczymy w drugiej części podręcznika (patrz 24. 1), prawa te są również słuszne w każdym układzie współrzędnych poruszającym się względem poprzedniego bezobrotowo ruchem prostoliniowym jednostajnym. Każdy z takich układów, w którym stosują się zasady Newtona nazywamy układem inercjalnym. Wynika stąd, że właściwie te zasady nie stosuje się do układu współrzędnych związanego z Ziemią, która obraca się względem gwiazd stałych. Można istotnie w niektórych zjawiskach to wykazać. Jednakże w większości przypadków odstępstwa od zasad Newtona w zjawiskach odbywających się na Ziemi są tak małe, że najczęściej można je zaniedbać, uważać układ współrzędnych sztywnie związany z Ziemią za układ inercjalny i stosować zasady Newtona do zjawisk ruchu odbywających się na Ziemi.

3.8. Siły bezwładności. Zasada d'Alemberta. Według II zasady Newtona, aby nadać ciału o masie m przyśpieszenie a trzeba na to siły o wartości F danej wzorem

$$F = ma.$$

Według d'Alemberta można równanie to interpretować w sposób następujący. Przenosząc wyraz ma na drugą stronę równania

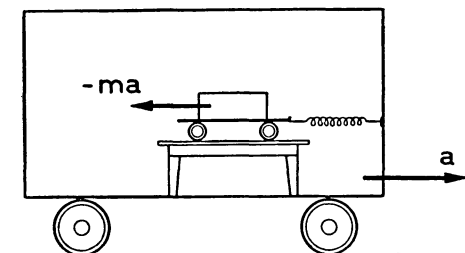
$$\vec{F} - m\vec{a} = 0 \tag{3.15}$$

i oznaczając $-m\vec{a} = F_1$ możemy napisać

$$\vec{F} + \vec{F}_1 = 0. \tag{3.16}$$

Mamy tu równanie wyrażające jak gdyby warunek równowagi. Dwie siły $\vec{F}$ i $\vec{F}_1$ dają wypadkową równą zeru, zatem się równoważą. Siłę $\vec{F}_1 = -m\vec{a}$ nazywamy siłą bezwładności albo siłą d'Alemberta. W ten sposób zagadnienie ruchu sprowadzamy do zagadnienia równowagi, co jest często w rozmaitych zagadnieniach wygodne. Sprowadzenie zagadnienia dynamicznego do zagadnienia statycznego przez dodanie sił bezwładności nazywamy zasadą d'Alemberta. Aby dobrze zrozu-

mieć taki sposób traktowania zagadnienia, wyobraźmy sobie, że w wagonie kolejowym ustawiliśmy na stole wózek, który może się po nim poruszać ze znikomym tarciem (rys. 3. 5). Przypuśćmy, że wagon zaczyna jechać w prawo z przyśpieszeniem $\vec{a}$. Wózek, który był nieruchomy względem ziemi, pozostanie dzięki bezwładności nieruchomy (względem ziemi). Lecz dla obserwatora znajdującego się wewnątrz wagonu zacznie się poruszać w lewo, z przyśpieszeniem zatem $-\vec{a}$. Jeżeli obserwator przyczepi go do sprężyny umocowanej do ściany wagonu, sprężyna rozciągnie się tak, jak gdyby wózek był ciągnięty w lewo siłą $\vec{F}_1 = -m\vec{a}$.



Rys. 3.5. Przy ruchu przyśpieszonym wagonu sprężyna rozciągnie się, jak gdyby do wózka była przyłożona siła — *ma*

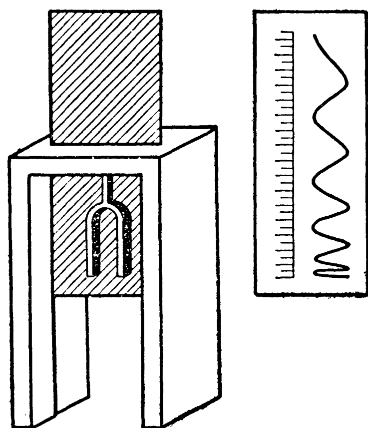
Oczywiście jest to siła pozorna, występująca w układzie poruszającym się względem ziemi wraz z wagonem ruchem przyśpieszonym, a więc w układzie nie inercjalnym. Siłę rzeczywistą związaliśmy z przyśpieszeniem nadawanym przez nią ciału w układzie odniesienia, w którym ważne są zasady Newtona, w tym przypadku w układzie związanym z ziemią.

Gdy obserwator porusza się wraz z układem ruchem przyśpieszonym nie zdając sobie sprawy z ruchu tego układu, przypisze ewentualne ruchy ciał w tym układzie działaniu sił, które są tylko pozornymi siłami, siłami bezwładności. Tak podróżnemu znajdującemu się w wagonie ruszającym z miejsca ruchem przyśpieszonym będzie się wydawało, że na wszystkie ciała wewnątrz wagonu nie wyłączając jego samego działają siły w kierunku przeciwnym do przyśpieszenia wagonu. Aby ustać w miejscu, będzie musiał pochylić się w kierunku ruchu wagonu. Szczególnie wyraźnie występują siły d'Alemberta w przypadku gwałtownego zahamowania wagonu. Walizki spadają wtedy z półek, jak gdyby ściągnięte jakimiś niewidzialnymi siłami, podróżni stojący przewracają się naprzód itd.

3.9. Spadanie ciał, ciężar. Doświadczenia życia codziennego zdają się nas przekonywać, że ciała puszczone swobodnie spadają na ziemię rozmaicie. Nie trudno jednak wykazać, że te różnice powoduje opór, jaki stawia powietrze ciałom spadającym. Kulka ołowiana lub żelazna spada szybko, papierek lub piórko — powoli. Jeżeli jednak ciała spadają w próżni, różnice te znikają. Do wykazania tego faktu służy zwykle długa na metr lub nieco więcej rura szklana, w której umieszczone są rozmaite małe ciała: kawałek ołowiu, słomki, piórka itd. Dopóki wewnątrz rury znajduje się powietrze, wyraźnie widać różnicę w prędkości spadania. Po wypompowaniu powietrza z rury wszystkie wewnątrz umieszczone ciała spadają jednakowo.

Spadanie odbywa się zawsze w kierunku, który nazywamy pionowym w dół. Kierunek spadania wskazuje tzw. pion, ciężarek umocowany na nitce. Nitka wskazuje kierunek pionowy.

Ponieważ spadanie odbywa się bardzo szybko, więc z bezpośredniej obserwacji trudno jest wywnioskować, jaki to jest ruch. Można jednak zrobić doświadczenie, które stwierdza, jak droga przebyta przy spadaniu zależy od czasu. Przyrząd do tego służący możemy urządzić w sposób następujący: umieszczamy okopconą szybę w ramce, w której zrobione są rowki prowadzące (rys. 3. 6), tak, żeby po puszczeniu jej mogła spadać swobodnie pionowo. Obok umieszczamy przymocowaną do ramki sprężynkę (pręcik stalowy) lub widełki strojowe z przyklejonym do jednego ramienia włoskiem dotykającym szyby. Gdy wprawimy widełki w drganie przez uderzenie, a następnie puścimy szybę, włosek wykreśli na niej linię krzywą. Na krzywej tej możemy zmierzyć drogi przebywane przez szybę w równych, bardzo krótkich przedziałach czasu (ponieważ wahnięcia widełek odbywają się w równych czasach). Przekonywamy się wtedy, że odcinki te rosną jak kolejne liczby nieparzyste. Stąd otrzymujemy natychmiast, że całkowita droga przebyta przy swobodnym spadaniu jest proporcjonalna do kwadratu czasu, który upływa od początku ruchu. Wiemy, że taki ruch jest ruchem jednostajnie przyśpieszonym. Wielkość przyśpieszenia wyznacza się zwykle za pomocą wahadła, o którym będzie mowa później. Przyśpieszenie ruchu jakim ciała spadają oznaczamy zawsze literą g. Wartości przyśpieszenia ciężkości g w różnych miejscach Ziemi są nieco różne. Zmieniają się mniej więcej w granicach od 980 cm/sec^2 do 983 cm/sec^2. W Polsce wielkości przyśpieszenia g w przybliżeniu wynosi 981 cm/sec^2. Niektóre wielkości zależne od przyśpieszenia siły ciężkości odnosi się do tzw. normalnego przyśpieszenia siły ciężkości. Wynosi ono 980,665 cm/sec^2.



Rys. 3.6. Drgające widełki strojowe kreślą przy spadaniu na szybie okopconej linię, która pozwala stwierdzić, jak rosną przemieszczenia przebywane w równych przedziałach czasu

Równania ruchu ciała swobodnie spadającego będą:

$$v = gt, \qquad s = \frac{1}{2}gt^2. \tag{3.17}$$

Jeżeli wyrugujemy z tych równań czas, otrzymamy wzór dający zależność końcowej prędkości od wysokości spadania:

$$v = \sqrt{2gs}. \tag{3.18}$$

Jeżeli ciało zostanie rzucone w dół z początkową prędkością v_0, to równania jego ruchu będą:

$$v = v_0 + gt, \qquad s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2, \tag{3.19}$$

zaś równania ruchu ciała rzuconego pionowo w górę będą następujące:

$$v = v_0 - gt, \qquad s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{3.20}$$

Ruch ciała rzuconego do góry będzie jednostajnie opóźniony, będzie się odbywał z coraz mniejszą prędkością. Wreszcie prędkość stanie się równa zeru, ciało się zatrzyma i od tego momentu zacznie z powrotem spadać. Wysokość wzniesienia możemy znaleźć podstawiając w pierwszym równaniu (3.20) $v = 0$ i rugując czas z otrzymanych równań. Otrzymamy wówczas wysokość wzniesienia

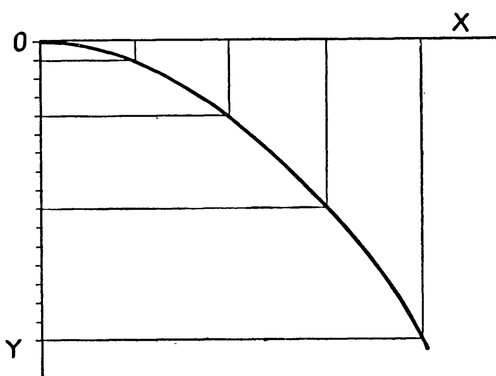
$$s = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}. \tag{3.21}$$

Ponieważ przyśpieszenie przy spadaniu ciał jest stałe, wynika stąd, że siły działające na ciała, siły, jakimi je Ziemia przyciąga, są również stałe. Siłę stałą wywieraną przez Ziemię na każde ciało pionowo w dół nazywamy jego ciężarem. Będziemy oznaczać stale ciężar literą G. Według II zasady Newtona

$$G = mg. \tag{3.22}$$

Oczywiście nie mamy żadnego powodu przypuszczać, że gdy ciało znajduje się w spoczynku, dajmy na to, leży na stole, to ciężar przestaje nań działać. Wiemy dobrze, że jeżeli ciało zsuniemy ze stołu, natychmiast zacznie ono spadać. Na stole spoczywa tylko dlatego, że stół pod działaniem ciężaru ugina się i wskutek swej sprężystości wywiera na ciało siłę skierowaną ku górze. Dwie te siły równoważą się. Ugięcie stołu jest zwykle tak nieznaczne, że obserwować je można tylko za pomocą specjalnego urządzenia. Jednakże przy odpowiednim urządzeniu odkształcenia ciała, na które działa ciężar, mogą być łatwo uwidocznione. Weźmy spiralnie zwiniętą stalową sprężynę. Przytwierdźmy jeden jej koniec nieruchomo, na drugim zaś końcu zawieśmy szalkę. Kładźmy na szalce ciała o rozmaitych ciężarach. Za każdym razem stwierdzimy, że sprężyna się wydłuży więcej lub mniej, po czym nastąpi równowaga. Ciało zawiśnie nieruchomo, sprężyna pozostanie wydłużona. Zatem rozciągnięta sprężyna wywiera na ciało siłę skierowaną do góry, której wielkość równa się ciężarowi tego ciała. Dwie te siły znoszą się. Łatwo stwierdzić, że im większy ciężar położymy na szalce, tym większe będzie wydłużenie sprężyny. Obciążając sprężynę coraz większymi ciężarkami i notując na skali wydłużenie sprężyny możemy ją wykalibrować i używać potem do mierzenia sił. Tak wykalibrowaną sprężynę nazywamy dynamometrem. Możemy więc siły albo oceniać dynamicznie, z przyśpieszenia ciała, albo statycznie — z wydłużenia sprężyny.

3.10. Rzut poziomy. Weźmy pod uwagę ciało rzucone z punktu O, który obieramy za początek współrzędnych, poziomo z prędkością v_0. Poprowadźmy oś odciętych poziomo, oś rzędnych pionowo w dół. Przemieszczenie ciała w kierunku poziomym będzie się odbywało ruchem jednostajnym, zatem



Rys. 3.7. Tor ciała rzuconego poziomo

$$x = v_0 t,$$

zaś przemieszczenie w kierunku pionowym odbywające się ruchem jednostajnie przyśpieszonym będzie dane przez równanie

$$y = \frac{1}{2} g t^2.$$

Rugując z dwóch powyższych równań czas t otrzymamy zależność y od x, czyli równanie określające kształt toru:

$$y = \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2. \quad (3.23)$$

Oznaczając wyrażenie

$$\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} = p \quad (3.24)$$

otrzymamy

$$y = 2p x^2. \quad (3.25)$$

Jest to równanie paraboli. Zatem ciało rzucone poziomo porusza się po paraboli (rys. 3.7).

3.11. Rzut ukośny. Weźmy teraz pod uwagę ciało rzucone pod kątem α do poziomu z prędkością v_0. Jaki będzie ruch tego punktu? Poprowadźmy oś odciętych X poziomo, oś rzędnych Y — pionowo do góry (rys. 3.8). Rozłóżmy prędkość v_0 na składową poziomą i pionową. Składowa pozioma będzie miała wartość $v_0 \cos \alpha$, składowa pionowa — $v_0 \sin \alpha$. Prędkość w kierunku poziomym na mocy zasady bezwładności nie ulega zmianie, gdyż żadna siła w tym kierunku nie działa. Natomiast w kierunku pionowym ruch będzie jednostajnie opóźniony z opóźnieniem g wskutek działania siły ciężkości. Prędkość będzie dana wzorem

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt. \quad (3.26)$$

Możemy zatem na przemieszczenie x w kierunku poziomym i przemieszczenie y w kierunku pionowym napisać równania:

$$x = v_0 \cos \alpha t, \quad (3.27)$$

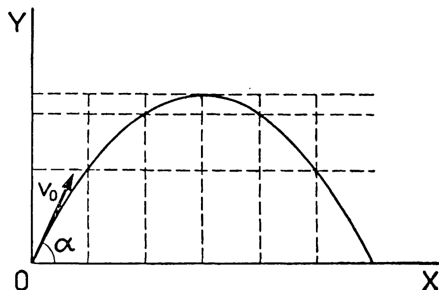
$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (3.28)$$

Jeżeli z tych równań wyrugujemy parametr t, otrzymamy związek między x i y, czyli równanie toru. Z pierwszego równania mamy

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}, \tag{3.29}$$

podstawiając do równania (3.28) otrzymamy

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \tag{3.30}$$



Rys. 3.8. Rzut ukośny

Jest to również równanie paraboli. Parabola ta przecina oś X w dwóch punktach danych przez równanie $y = 0$, tj.

$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 = 0.$$

Stąd otrzymamy dwie odpowiedzi na x:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \tag{3.31}$$

Z wzoru tego widać, że najdalszym rzutem będzie rzut pod kątem takim, aby $\sin 2\alpha = 1$, czyli $\sphericalangle \alpha = 45°$.

Najwyższy punkt paraboli łatwo znaleźć zważywszy, że w najwyższym punkcie składowa pionowa prędkości staje się równa zeru:

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt = 0,$$

skąd

$$t = \frac{v_0}{g} \sin \alpha.$$

Po podstawieniu do równania (3.28) otrzymujemy

$$y_{max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha. \tag{3.32}$$

3.12. Układ CGS, MKS i techniczny jednostek. Jak już wspomniano we wstępie, między wielkościami, z którymi mamy do czynienia w fizyce, odróżniamy wielkości zasadnicze lub podstawowe oraz pochodne. Można powiedzieć, że wielkościami podstawowymi są wielkości, których jednostki przyjęte przez pewne umowy nie zależą od innych jednostek, są zupełnie niezależne. Takimi są np. w układzie CGS i MKS długość, masa i czas. Jednostką długości jest długość prototypu metra, jednostką masy — masa prototypu kilograma. Oczywiście długość metra nie zmieni się, jeżeli zmienimy jednostkę masy czy czasu. Podobnie rzecz się ma z innymi zasadniczymi jednostkami. Natomiast jednostki wielkości pochodnych ulegają zmianie przy zmianie jednostek wielkości podsta-

wowych. Tak np. prędkość jest wielkością pochodną. Jej jednostka zależy od jednostek długości i czasu. Gdy za jednostkę długości przyjmiemy metr, a za jednostkę czasu — sekundę, jednostką prędkości będzie m/sec, gdy posługujemy się kilometrem jako jednostką długości, a godziną jako jednostką czasu — jednostką prędkości będzie km/godz. itd. Zwykle w mechanice przyjmuje się trzy wielkości za podstawowe, wszystkie inne są pochodnymi. W układach CGS i MKS te same wielkości są przyjęte za podstawowe: długość, czas i masa, a tylko j e d n o s t k i długości i masy są różne. Układ CGS nosi nazwę od nazw jednostek podstawowych, którymi są: centymetr, kilogram, sekunda. Podobnie układ MKS wziął nazwę od jednostek podstawowych, którymi są: metr, kilogram, sekunda. Lecz w naukach technicznych używany jest jeszcze inny układ zwany technicznym lub czasami ciężarowym. W tym układzie dwie wielkości podstawowe są te same co w poprzednich układach, mianowicie długość i czas. Ich jednostkami są jednostki układu MKS — metr i sekunda. Lecz trzecią wielkością podstawową jest nie masa, lecz siła. Za jednostkę siły przyjmuje się siłę, z jaką Ziemia przyciąga masę jednego kilograma w takim punkcie Ziemi, w którym przyśpieszenie siły ciężkości wynosi 980,665 cm/sec^2. Ciężar masy jednego kilograma nazywany jest również kilogramem. Dla odróżnienia jednostki siły od jednostki masy siłę nazywamy: kilogram-siła. W piśmie odróżnia się je w ten sposób, że w skrócie piszemy kG przez G duże. Podobnie czasami używaną jednostkę gram-siła piszemy w skrócie G.

W każdym układzie jednostek musi być prawdziwe równanie:

$$F = ma.$$

Jeżeli $F = 1$ kG, $a = 1$ m/sec^2, to m musi się równać jednostce. Zatem w układzie technicznym za jednostkę masy musimy przyjąć masę takiego ciała, któremu siła 1 kG nadaje przyśpieszenie 1 m/sec^2. Jednostka ta będzie w układzie technicznym jednostką pochodną. Nie nadano jej niestety żadnej nazwy.

Istnieje projekt (niemiecki), aby gram-siłę nazywać pondem, skrót — *p* (od słowa *pondus*, po łacinie ciężar), a kilogram-siłę — kilopondem. Niewątpliwie byłoby to korzystne i zapobiegłoby częstym błędom wynikającym z pomieszania jednostek. Jednakże nazwy te nie zostały dotychczas przyjęte przez Międzynarodową Konferencję Miar.

Wartość kilograma-siły łatwo przeliczyć na jednostki układu MKS czy CGS. Zważywszy na to, że kilogram-siła nadaje masie jednego kilograma przyśpieszenie 9,80665 m/sec^2 możemy napisać według II-ej zasady Newtona:

$$1\ \text{kG} = 1\ \text{kg} \cdot 9{,}80665\ \text{m/sec}^2 = 9{,}80665\ \text{niutonów}$$

(prawa strona tego równania jest wyrażona w jednostkach układu MKS). Odwrotnie, 1 N = 0,102 kG. Podobnie możemy obliczyć wartość liczbową kilograma-siły w jednostkach układu CGS:

$$1\ \text{kG} = 1000\ \text{g} \cdot 980{,}665\ \text{cm/sec}^2 = 980\,665\ \text{dyn}.$$

Możemy teraz obliczyć, ile jednostek układu MKS lub CGS ma jednostka masy układu technicznego. Ponieważ

$$1 \text{ kG} = 1 \text{ jednostka masy układu technicznego} \times 1 \text{ m/sec}^2,$$

zatem

$$1 \text{ jednostka masy układu technicznego} = \frac{1 \text{ kg}}{1 \text{ m/sec}^2} = \frac{9{,}80665 \text{ N}}{1 \text{ m/sec}^2} = 9{,}80665 \text{ kg}$$

albo 9806,65 gramów. W rachunkach przybliżonych można używać na jednostkę techniczną masy wartości 9810 gramów. Również możemy na wartość kilograma siły przyjmować przybliżoną liczbę 9,81 niutonów albo 981 000 dyn.

Poniższa tabela daje porównanie wszystkich trzech układów jednostek.

Układ	Wielkości zasadnicze i ich jednostki	Wielkości pochodne i ich jednostki
Układ CGS	długość cm masa g czas sec	prędkość cm/sec przyśpieszenie cm/sec^2 siła dyna = $= \text{g cm sec}^{-2}$
Układ MKS	długość m masa kg czas sec	prędkość m/sec przyśpieszenie m/sec^2 siła niuton = $= \text{kg m sec}^{-2} =$ = 100 000 dyn = 0,102 kG.
Układ techniczny	długość m siła kG = 980 665 dyn = = 9,80665 N czas sec	prędkość m/sec przyśpieszenie m/sec^2 masa $\text{kG m}^{-1} \text{sec}^2 =$ = 9806,65 g ≈ ≈ 9,81 kg

Zadania

3.1. Dwa wózki pod działaniem umieszczonej między nimi sprężyny działającej przez czas 0,5 sekundy nabywają prędkości skierowanych w przeciwne strony, wózek A uzyskuje prędkość $v_A = 42$ cm/sec, wózek $B - v_B = 54$ cm/sec. Jakie były ich średnie przyśpieszenia a_A i a_B i stosunek ich mas?

Odpowiedź: $a_A = 84 \text{ cm/sec}^2$, $a_B = 108 \text{ cm/sec}^2$, $m_A : m_B = 9:7$.

3.2. Człowiek stojący w łódce znajdującej się na jeziorze rzuca w tył kamień o masie $m_1 = 2$ kg z prędkością $v_1 = 18$ m/sec. Masa człowieka razem z łódką wynosi $m_2 = 90$ kg. Z jaką prędkością v_2 pojedzie naprzód łódka?

Odpowiedź: $v_2 = 0{,}4$ m/sec.

3.3. Pocisk działowy o masie 300 kg został wystrzelony poziomo z prędkością 800 m/sec z działa ustawionego na wozie kolejowym stojącym na szynach. Wóz, który ma razem z lawetą masę 24 tonny, zapomniano zahamować. Z jaką prędkością v odjedzie wóz z lawetą?

O d p o w i e d ź: $v = 10$ m/sec $= 36$ km/godz.

3.4. Jaką siłę pociągową F musi rozwinąć lokomotywa, aby na drodze $s = 200$ m nadać pociągowi o masie $m = 200$ tonn prędkość $v = 42$ km/godz (nie uwzględniać tarcia)

O d p o w i e d ź: $F = 68\,000$ N ≈ 6900 kG.

3.5. Wagon tramwajowy o masie 16 tonn porusza się po torze poziomym z prędkością 6 m/sec. Jakiej wielkości siła hamująca może go zatrzymać na drodze $s = 10$ m i po jak długim czasie t to nastąpi?

O d p o w i e d ź: $F = 2936$ kG, $t = 3\frac{1}{3}$ sec.

3.6. Wskutek działania hamulców na pociąg o masie $m = 196{,}2$ tonn powstaje siła hamująca $F = 7200$ kG. W jakiej odległości s od stacji musi maszynista zacząć hamować, jeżeli pociąg ma prędkość $v_0 = 18$ m/sec? Jak długo będzie jechał pociąg od chwili zahamowania do chwili zatrzymania się?

O d p o w i e d ź: $s = 450$ m, $t = 50$ sec.

3.7. Samochód ciężarowy o masie $m = 4$ tonny jadący z prędkością $v_0 = 36$ km/sec zahamowany został przed przeszkodą, zatrzymując się po upływie $t = 5$ sec. Jaka była siła hamująca F i jak długą drogę s przejechał samochód do chwili zatrzymania się?

O d p o w i e d ź: $F \approx 8000$ N$\approx$815 kG, $s = 25$ m.

3.8. Pocisk karabinowy wylatuje z lufy długości $s = 60$ cm z prędkością $v = 600$ m/sec. Jaka jest masa pocisku m, jeżeli siła gazów prochowych wynosiła średnio 7500 niutonów?

O d p o w i e d ź: $m = 25$ g.

3.9. Pociąg jadący z prędkością $v_0 = 90$ km/godz po zahamowaniu poruszał się ruchem jednostajnie opóźnionym i zatrzymał się po przejechaniu drogi $s = 160$ m. Jakie było jego opóźnienie a, po jakim czasie t zatrzymał się i pod jakim kątem α do kierunku pionowego podróżni musieli się nachylić, aby się nie przewrócić?

O d p o w i e d ź: $a = 1{,}95$ m/sec^2, $t = 12{,}8$ sec, $\alpha = 11°14'$.

3.10. Pocisk o masie $m = 6{,}2$ kg wylatuje z działa z prędkością $v = 680$ m/sec. Jaka jest średnia siła parcia gazów prochowych F, jeżeli czas przelotu pocisku przez lufę wynosi $t = 0{,}008$ sec?

O d p o w i e d ź: $F = 527\,000$ N $\approx 54\,000$ kG.

3.11. Ciężar $G = 50$ kG podniesiono za pomocą sznura pionowo do góry w ciągu $t = 2$ sec na wysokość $h = 10$ m. Znaleźć siłę F napinającą sznur, jeżeli ruch, którym podnoszono ciężar był jednostajnie przyśpieszony?

O d p o w i e d ź: $F = 75{,}4$ kG.

3.12. Z jaką prędkością v_0 trzeba rzucić kamień pionowo do góry, aby on się wzniósł do wysokości $h = 50$ m?

O d p o w i e d ź: $v_0 = 31{,}3$ m/sec.

3.13. Kamień spada z wysokości h i ostatnie 196,2 m przebywa w 4 sec. Jak długo spadał kamień i z jakiej wysokości?

O d p o w i e d ź: $t = 7$ sec, $h = 240{,}3$ m.

3.14. Spadający kamień przebywa w ostatniej sekundzie swego spadania połowę całej przebytej drogi. Z jakiej wysokości h i jak długo (t) spadał?
Odpowiedź: $h = 57{,}1$ m, $t = 3{,}41$ sec.

3.15. Jak głęboka jest przepaść, jeżeli odgłos spadającego na dno kamienia słychać po upływie $t = 6$ sec? (przyjąć dla uproszczenia rachunków $g = 10$ m/sec², prędkość dźwięku $v = \frac{1000}{3}$ m/sec)

Odpowiedź: Głębokość $s = \frac{v^2}{g} + vt \pm v\sqrt{\frac{v^2}{g^2} + 2\frac{vt}{g}}$.
Należy wziąć rozwiązanie ze znakiem minus, gdyż dla $t = 0$ powinno być $s = 0$, $s = 157$ m.

3.16. Pocisk został wystrzelony poziomo z karabinu z prędkością $v = 500$ m/sec. Po jakim czasie t trafił on w cel oddalony o 300 m i o ile obniżył się od linii poziomej?
Odpowiedź: $t = 0{,}6$ sec, 176 cm.

3.17. Kamień rzucony poziomo na wysokości $h = 1{,}5$ m nad ziemią upadł na ziemię w odległości $s = 10$ m. Jaka była jego początkowa prędkość v_0 i końcowa v?

Odpowiedź: $v_0 = s\sqrt{\frac{g}{2h}} \approx 18{,}1$ m/sec, $v = \sqrt{\frac{s^2 g}{2h} + 2gh} \approx 18{,}9$ m/sec.

3.18. Pod jakim kątem α do poziomu należałoby strzelić z karabinu, aby pocisk nabywający przy wylocie prędkości $v_0 = 600$ m/sec trafił w cel oddalony o 2 km leżący na tej samej wysokości nad ziemią co karabin?
Odpowiedź: 1° 27′.

3.19. Rzucono kamień pod kątem $\alpha = 30°$ względem poziomu nadając mu prędkość $v_0 = 12$ m/sec; znaleźć jego największą wysokość h oraz zasięg rzutu s.

Odpowiedź: $h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = 1{,}83$ m; $s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 12{,}7$ m.

3.20. Kamień rzucony z powierzchni ziemi pod kątem $\alpha = 45°$ do poziomu upadł na ziemię w odległości $s = 15$ m. Z jaką prędkością v_0 został rzucony, jak długo biegł w powietrzu i do jakiej wysokości h się wzniósł?

Odpowiedź: $v_0 = \sqrt{\frac{gs}{\sin 2\alpha}} = 12{,}13$ m/sec; $t = \sqrt{2\frac{s}{g}\operatorname{tg}\alpha} = 1{,}75$ sec; $h = \frac{1}{4} s \operatorname{tg}\alpha = 3{,}75$ m.

3.21. Siłę $F = 5 \cdot 10^6$ dyn wyrazić w jednostkach układu MKS i technicznego.
Odpowiedź: $F = 50$ N $= 5{,}1$ kG.

3.22. Wyrazić masę $m = 2943$ g w jednostkach układu MKS i technicznego.
Odpowiedź: $m = 2{,}943$ kg $= 0{,}3$ jednostek układu technicznego.

3.23. Wyrazić masę $m = 5$ kg w jednostkach układu CGS i technicznego.
Odpowiedź: $m = 5000$ g $= 0{,}5097$ jednostek układu technicznego.

3.24. Wyrazić masę $m = 5$ jednostek układu technicznego w jednostkach układu MKS i CGS.
Odpowiedź: $m = 49{,}033$ kg $= 49\,033$ g.

3.25. Wyrazić siłę $F = 24$ kG w dynach i niutonach.
Odpowiedź: $F = 2{,}3536 \cdot 10^7$ dyn $= 235{,}36$ N.

3.13. Masa właściwa (gęstość) i ciężar właściwy ciał. Ciała z rozmaitych materiałów, np. z drewna, stali, mosiądzu, ołowiu itd. przy tych samych objętościach różnią się masami. Tę własność ciał ujmujemy za pomocą pojęcia masy właściwej albo gęstości. Masą właściwą ciała nazywamy stosunek jego masy do objętości:

$$\boxed{\varrho = \frac{m}{V}.} \tag{3.33}$$

W układzie CGS gęstość wyraża się w g/cm^3 (w gramach na centymetr sześcienny). Używa się również jednostki g/ml (gram na mililitr).

W układzie MKS gęstość wyraża się w kg/m^3 (w kilogramach na metr sześcienny). Dla masy właściwej zwykle nie używa się jednostek układu technicznego.

Ciężarem właściwym ciała γ nazywamy stosunek ciężaru do jego objętości:

$$\boxed{\gamma = \frac{G}{V}.} \tag{3.34}$$

W układzie CGS ciężar właściwy wyraża się w $dynach/cm^3$, w układzie MKS w niutonach na metr sześcienny, N/m^3. W układzie technicznym wyraża się w kG/m^3. Czasami wyrażają również ciężar właściwy w G/cm^3. Trzeba jednak pamiętać, że w tym przypadku jednostki siły i objętości są wzięte z różnych układów.

Między ciężarem właściwym a masą właściwą istnieje związek taki sam jak między ciężarem a masą. Ponieważ ciężar $G = mg$, zatem

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{mg}{V} = \frac{m}{V}g = \varrho g\,. \tag{3.35}$$

Ponieważ 1 dm^3 wody ma masę prawie dokładnie równą 1 kg, 1 cm^3 ma masę 1 g, zatem masa właściwa wody w układzie CGS będzie 1 g/cm^3. W układzie MKS natomiast wyrazi się liczbą 1000 kg/m^3. Ciężar właściwy wody będzie odpowiednio: w układzie CGS 981 dyn/cm^3, w układzie MKS 9810 N/m^3, w układzie technicznym: 1000 kG/m^3.

3.14. Praca mechaniczna. Jeżeli do ciała jest przyłożona siła i ciało się przemieszcza (niekoniecznie wskutek działania tej siły), to mówimy, że siła ta wykonuje pracę mechaniczną. Jeżeli siła ma kierunek zgodny z kierunkiem przemieszczenia, to wielkość pracy mechanicznej uważamy:

1) za proporcjonalną do wielkości działającej siły,

2) za proporcjonalną do wielkości przemieszczenia.

Za jednostkę pracy przyjmujemy pracę siły jednostkowej na drodze równej jednostce. Odpowiednio do różnych jednostek siły i długości w różnych układach jednostek mamy różne jednostki pracy.

W układzie CGS jednostką pracy jest erg. Jest to praca 1 dyny na drodze równej 1 centymetrowi.

W układzie MKS (metr, kilogram, sekunda) jednostką pracy jest dżul (symbol J, od nazwiska Joule). Jest to praca siły 1 niutona na drodze 1 metra.

W układzie technicznym jednostką pracy jest kGm (kilogramometr) albo kpm (kilopondometr). Jest to praca siły 1 kG na drodze równej 1 metrowi.

Według wyszczególnionych poprzednio umów możemy napisać:
jednostka siły na drodze równej 1 wykonuje pracę równą 1 jednostce pracy,
siła F „ „ „ 1 „ „ „ F jednostek pracy,
„ F „ „ „ s „ „ „ Fs „ „ .

Oznaczając wykonaną pracę literą L otrzymujemy wzór słuszny we wszystkich układach:

$$\boxed{L = Fs.} \tag{3.36}$$

Za pomocą tego wzoru łatwo przeliczyć pracę wyrażoną w jednostkach któregokolwiek układu na jednostki innych układów. Wyrazimy jednostki pracy układu technicznego i MKS w ergach:

$$1\ \text{kGm} = 1\ \text{kG} \times 1\ \text{m} = 980\,665\ \text{dyn} \times 100\ \text{cm} =$$
$$= 98\,066\,500\ \text{ergów} \approx 98\,100\,000\ \text{ergów} = 9{,}81\ \text{J}.$$

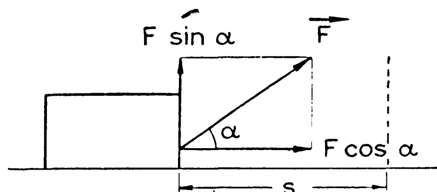
$$1\ \text{dżul} = 1\ \text{N} \times 1\ \text{m} = 10^5\ \text{dyn} \times 100\ \text{cm} = 10^7\ \text{ergów} = 0{,}102\ \text{kGm}.$$

W przypadku, gdy siła jest prostopadła do drogi, przyjmujemy, że praca jej jest równa zeru. Jeżeli zaś kierunek siły tworzy kąt α z kierunkiem przemieszczenia, to rozkładamy wtedy siłę na dwie składowe, równoległą do przemieszczenia i prostopadłą do niej. Pracę wykonywa tylko składowa zgodna z kierunkiem przemieszczenia (rys. 3.9). Ponieważ ta składowa jest

$$F \cos \alpha,$$

zatem otrzymamy w tym przypadku wzór, który również obejmuje wszystkie poprzednie przypadki:

$$\boxed{L = Fs \cos \alpha.} \tag{3.37}$$



Rys. 3.9. Praca siły tworzącej pewien kąt z kierunkiem przemieszczenia równa się pracy jej składowej w kierunku przemieszczenia

Należy jeszcze uzupełnić tę definicję przez podkreślenie, że do tego wzoru wstawiamy bezwzględne wartości siły i drogi, tak że znak pracy, a więc to, czy ona będzie dodatnia, czy ujemna, zależy jedynie od wartości kąta α:

$$L = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos \alpha.$$

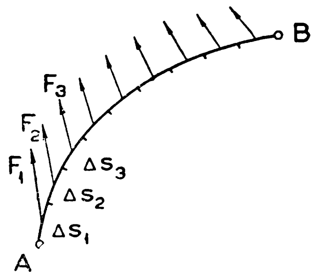
Gdy więc

$$0° \leqslant \alpha < 90°$$

praca będzie dodatnia, gdy zaś $90° < \alpha < 180°$ — praca będzie ujemna. Praca jest skalarem o wymiarach, które łatwo obliczyć z równania

$$[L] = [F]\,[s] = [l^2mt^{-2}]. \tag{3.38}$$

Wzór (3.37) może być jednak używany tylko wtedy, gdy tak siła F, jak i kąt α mają wartości stałe. Jeżeli siła zmienia się podczas przemieszczania się ciała, to oczywiście wzoru (3.37) nie możemy użyć, gdyż wartość siły i kąta między siłą a przemieszczeniem ulega ciągłej zmianie i w każdym punkcie przemieszczenia jest inna. W takim przypadku możemy w przybliżeniu obliczyć wykonaną pracę stosując postępowanie następujące: dzielimy całą drogę AB przebytą przez punkt przyłożenia siły na małe odcinki (rys. 3.10). Obliczamy pracę na każdym odcinku biorąc do wzoru którąkolwiek z wartości siły, jaką posiada ona we wnętrzu tego odcinka. Tak samo bierzemy jedną z wartości, jaką przybiera kąt we wnętrzu danego odcinka. Jeżeli tak siła, jak i kąt zmieniają się stopniowo (jak mówimy w matematyce: są ciągłymi funkcjami współrzędnych), to błąd popełniony wskutek takiego sposobu obliczenia będzie niewielki. Sumujemy następnie prace obliczone w powyżej opisany sposób na poszczególnych, niewielkich odcinkach drogi. Dzieląc więc całą drogę AB na małe odcinki Δs_1, Δs_2, $\Delta s_3, \ldots, \Delta s_n$ i oznaczając wybrane wartości siły na tych odcinkach odpowiednio przez F_1, F_2, $F_3, \ldots, F_n$ oraz wybrane wartości kątów przez $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ otrzymamy na całkowitą pracę wzór



Rys. 3.10. W razie, gdy siła podczas przemieszczania się ciała zmienia wartość i kierunek, obliczamy pracę na małych odcinkach, uważając siłę na każdym odcinku za stałą

$$L = F_1\,\Delta s_1 \cos\alpha_1 + F_2\,\Delta s_2 \cos\alpha_2 + \ldots + F_n\,\Delta s_n \cos\alpha_n \tag{3.39}$$

albo pisząc w sposób symboliczny

$$L = \sum_{i=1}^{n} F_i\,\Delta s_i \cos\alpha_i\,. \tag{3.40}$$

Dokładniejszą wartość pracy uzyskamy dzieląc całą drogę na większą liczbę mniejszych odcinków i obliczając pracę w sposób poprzednio opisany. Postępowanie takie moglibyśmy dalej przedłużać dzieląc drogę na coraz mniejsze odcinki. Można udowodnić, że w wielu przypadkach — a w przypadku ruchu ciała materialnego zawsze — otrzymane przy takim postępowaniu wyniki będą się różnić coraz mniej między sobą. Będą się również różnić coraz mniej od wartości

określonej liczby stałej. Oznacza to, że ciąg otrzymanych wartości na pracę dąży do wartości, którą nazywamy granicą ciągu. Granica ta da nam dokładną wartość poszukiwanej pracy. Granicę, do której dążą sumy (3. 40), gdy $\Delta s_i \to 0$, nazywamy całką krzywoliniową wziętą po łuku AB i oznaczamy symbolem

$$\int_A^B F(x,y,z) \cos \alpha(x,y,z)\, ds\,. \tag{3.41}$$

Piszemy w tym wzorze $F(x, y, z)$ i $\alpha\,(x, y, z)$ dla zaznaczenia, że obie te wielkości są funkcjami współrzędnych, to znaczy zmieniają się wraz ze zmianą tych współrzędnych.

W przypadkach szczególnych, o których będzie mowa później, wielkości F i α zależą tylko od jednej współrzędnej. Wtedy całka krzywoliniowa przechodzi w zwykłą całkę, tzw. oznaczoną.

Otrzymamy wówczas wzór:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx \cos \alpha(x)\,. \tag{3.42}$$

3.15. Układy materialne. Energia. Układem materialnym nazywamy jakikolwiek zbiór ciał A, B, C itd. Między tymi ciałami mogą w ogólności działać siły, mogą one również znajdować się w ruchu. Ciała wchodzące do układu nazywamy *częściami układu*. Które ciała zaliczamy do układu, zależy to od nas. Możemy zawsze z jakiegoś większego układu wyodrębnić pewną liczbę ciał i rozpatrywać układ tylko z nich złożony.

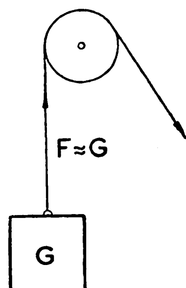
Mówimy często o *stanie układu*. Stan układu w mechanice jest określony przez położenie i prędkości jego części. Jeżeli je znamy, to mówimy, że znamy stan układu.

Na części układu w ogólności działają siły. Siły przyłożone do części układu dzielimy na wewnętrzne i zewnętrzne. Wewnętrznymi nazywamy siły działające między częściami układu. A więc pewne części układu wywierają na inne części układu siły wewnętrzne. Siły innego pochodzenia, to znaczy wywierane przez ciała nie należące do układu, nazywamy siłami zewnętrznymi. Jeżeli więc np. weźmiemy pod uwagę układ Ziemia-Księżyc, to siły ich wzajemnego przyciągania się będą siłami wewnętrznymi. Siły zaś wywierane przez Słońce na oba te ciała będą siłami zewnętrznymi.

Jeżeli siły zewnętrzne wykonują pracę dodatnią podczas zmiany stanu układu, to mówimy, że *układ pobiera pracę*. *Jeżeli siły zewnętrzne wykonują pracę ujemną* to mówimy, że *układ wydaje pracę*. Wynika stąd oczywiście, że gdy nie ma wcale sił zewnętrznych, to układ nie może ani pobierać, ani wydawać pracy. Gdy np. weźmiemy pod uwagę układ złożony z Ziemi i ciężaru G (rys. 3. 11) i gdy za pomocą liny przerzuconej przez blok podnosimy ciężar G do góry, to siła zewnętrzna F wywierana za pomocą liny wykonywa pracę dodatnią (gdyż przemieszczenie jest zgodne z kierunkiem siły zewnętrznej). Układ pobiera więc pracę. Przy opusz-

czaniu ciężaru w dół siła zewnętrzna wykonywa pracę ujemną, a więc układ wydaje pracę.

Zasób pracy posiadanej przez układ nazywamy jego *energią*. Jest to określenie poglądowe, ale niedokładne. Aby to pojęcie lepiej określić, weźmy pod uwagę jakikolwiek układ materialny. Układ ten może się znajdować w rozmaitych stanach. Wyobraźmy sobie jakiś stan tego układu scharakteryzowany przez położenia i prędkości jego części. Oznaczmy go liczbą *I*. Weźmy następnie inny stan tego samego układu i oznaczmy go liczbą *II*. *Energią układu w stanie I względem stanu II nazwiemy pracę, jaką układ wyda przy przejściu od stanu I do stanu II* w założeniu, że przy zmianie stanu układu nie pojawia się ciepło ani żadne inne rodzaje energii niedynamicznej, o których później będzie mowa. A więc energia będzie równa pracy sił zewnętrznych ze znakiem przeciwnym.



Rys. 3.11. Podczas podnoszenia ciężaru siła zewnętrzna wykonywa pracę dodatnią, przy opuszczaniu — ujemną

Zatem możemy określić tylko energię względem jakiegoś stanu, tj. możemy obliczyć zmiany energii, natomiast nie możemy nigdy określić bezwzględnej wartości energii.

Energię układu wynikającą z istnienia sił wewnętrznych nazywamy energią potencjalną. A więc układ Ziemia-kamień ma energię potencjalną, gdy kamień jest wzniesiony na pewną wysokość ponad Ziemię; również energię potencjalną ma układ dwóch ciał naelektryzowanych, układ dwóch magnesów znajdujących się w pewnej odległości jeden od drugiego, łuk napięty, nakręcona sprężyna itd. Oczywiście, żeby dokładnie określić energię układu, trzeba podać, względem jakiego stanu końcowego ją obliczamy. Jeżeli kamień o ciężarze 10 kG jest np. wzniesiony ponad powierzchnię Ziemi na 10 m, to energia układu kamień-Ziemia będzie inna względem takiego stanu, gdy kamień leży na powierzchni Ziemi, inna zaś będzie, gdy będziemy ją obliczali względem takiego stanu, gdy kamień leży na dnie głębokiej studni. W tym drugim przypadku praca, którą układ wyda, będzie znacznie większa, czyli znacznie większa energia. Może się również zdarzyć przypadek, że energia względem pewnego stanu będzie ujemna, jeżeli układ przy przejściu do tego stanu nie wyda pracy, tylko ją pobierze.

Nie można podać ogólnego wzoru na energię potencjalną. Możemy ją obliczyć w rozmaitych przypadkach, gdy znamy siły działające między częściami układu i wiemy, jak się one zmieniają przy zmianie położenia części. Jednym z najprostszych przypadków, w których możemy łatwo obliczyć energię potencjalną, jest przypadek układu, którego części podlegają działaniu sił ciężkości. Przypuśćmy, że mamy ciało o ciężarze G wzniesione na wysokość h nad powierzchnię Ziemi. Przyłóżmy do ciała tego siłę zewnętrzną zapobiegającą spadkowi ciała, np. powieśmy je na sznurze. Za pomocą sznura spuśćmy ciało tak powoli, aby nie nabyło ono dostrzegalnej prędkości. Siła, jaką w tym celu musimy przyłożyć,

będzie prawie dokładnie równa ciężarowi ciała G. Praca wykonana przez siłę zewnętrzną podczas obniżania ciała o h będzie wynosić

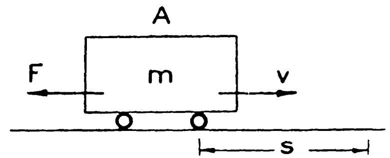
$$L = Gh \cos 180° = -Gh. \tag{3.43}$$

Znak minus stwierdza, że praca jest wydana przez układ. A więc na energię potencjalną otrzymamy wzór

$$E_p = Gh. \tag{3.44}$$

Energię, jaką układ posiada dzięki prędkościom swoich części, nazywamy energią kinetyczną.

W szczególności ciało poruszające się z pewną prędkością względem Ziemi może wykonać pewną pracę, która będzie miarą posiadanej przez to ciało energii kinetycznej. Niech ciało A, np. wagon o masie m, porusza się z prędkością v (rys. 3. 12). Aby obliczyć jego energię, przyłóżmy w kierunku przeciwnym jego ruchowi siłę stałą F. Ruch ciała będzie wtedy jednostajnie opóźniony z opóźnieniem określonym równaniem



Rys. 3.12. Rozpędzony wagon może wykonać pracę

$$a = \frac{F}{m}. \tag{3.45}$$

Droga przebyta przez ciało A do chwili, gdy się ono zatrzyma, będzie określona wzorem

$$s = vt - \frac{1}{2} at^2. \tag{3.46}$$

Ponieważ prędkość końcowa jest równa zeru, będziemy mieli jeszcze równanie

$$0 = v - at. \tag{3.47}$$

Określając z tego ostatniego równania czas t i podstawiając do równania (3.46) otrzymamy na drogę s wyrażenie

$$s = \frac{v^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{a} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a}. \tag{3.48}$$

Wzór na wykonaną przez siłę zewnętrzną pracę będzie w tym przypadku następujący:

$$L = Fs \cos 180° = -Fs. \tag{3.49}$$

Podstawiając za F wyrażenie ma, a za s wyrażenie (3. 48) otrzymamy na wykonaną pracę wzór:

$$L = -ma\frac{1}{2}\frac{v^2}{a} = -\frac{mv^2}{2}. \tag{3.50}$$

Znak minus wskazuje, że praca będzie wydana przez układ. A więc zapas pracy ciała rozpędzonego, czyli jego energia kinetyczna, wyrazi się wzorem

$$\boxed{E_k = \frac{mv^2}{2}.} \tag{3.51}$$

Nie trudno wykazać, że jeżeli na ciało zupełnie swobodne działa siła powiększając jego prędkość, to energia kinetyczna tego ciała powiększy się o wartość pracy wykonanej przez tę siłę. Weźmy pod uwagę ciało zupełnie swobodne o masie m poruszające się z prędkością v_0. W pewnym momencie zaczyna działać na nie siła stała F w kierunku jego ruchu i działa na drodze s. Oczywiście ruch ciała będzie jednostajnie przyśpieszony z przyśpieszeniem $a = \dfrac{F}{m}$. Praca wykonana przez siłę F będzie

$$L = Fs.$$

Ponieważ ruch jest jednostajnie przyśpieszony, więc prędkość końcowa i droga będą się wyrażać wzorami:

$$v = v_0 + at, \tag{3.52}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \tag{3.53}$$

Wyrugujmy z tych równań czas t określając go z pierwszego z tych równań i podstawiając do drugiego:

$$t = \frac{v - v_0}{a}, \qquad s = \frac{1}{2} \frac{v^2 - v_0^2}{a}.$$

Na pracę siły F otrzymamy

$$L = Fs = ma \frac{1}{2} \frac{v^2 - v_0^2}{a} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \tag{3.54}$$

Po prawej stronie mamy przyrost energii kinetycznej. Otrzymaliśmy zatem wynik: wykonana przez siłę praca równa się przyrostowi energii kinetycznej.

Wymiar energii tak potencjalnej, jak i kinetycznej, jak łatwo obliczyć, jest taki sam jak wymiar pracy: $[\mathrm{l^2 m t^{-2}}]$. Również jednostki energii są takie same jak jednostki pracy.

Energia mechaniczna całkowita układu jest sumą jego energii potencjalnej i kinetycznej:

$$E = E_p + E_k\,. \tag{3.55}$$

3.16. Układy zachowawcze i rozpraszające. Zasada zachowania energii. Układy przechodząc od jednego stanu do drugiego mogą pobierać lub wydawać pracę. Przypuśćmy, że jakiś układ materialny przechodząc od stanu *I* do stanu *II*

pobiera pracę L. Jeżeli przechodząc z powrotem od stanu II do stanu I odda nam tę pracę w nieuszczuplonej ilości, to układ taki nazywamy zachowawczym, a siły wewnętrzne w nim działające — siłami zachowawczymi. W przeciwnym razie będziemy go nazywali układem rozpraszającym. A więc np. układ kamień-Ziemia będzie układem zachowawczym. Gdy podniesiemy kamień o ciężarze G na wysokość h, układ ten pobierze pracę w ilości Gh. Przy obniżaniu z powrotem do pierwotnej wysokości odda nam pobraną poprzednio pracę. Korzystamy z tego w zegarze wagowym. Nakręcając zegar podnosimy ciężarek do góry na pewną wysokość. Ciężarek następnie opada powoli poruszając mechanizm zegara. Sprężyna spiralna stalowa przy ściskaniu lub rozciąganiu pobiera pracę i następnie może ją oddać. Przy nakręcaniu zegarka kieszonkowego skręcamy sprężynę i układ ten wtedy pobiera pracę. Rozkręcająca się następnie sprężyna oddaje tę pracę mechanizmowi zegarka. Można stwierdzić, że siły, które nie zmieniają swego kierunku przy zmianie kierunku przemieszczenia części układu, są siłami zachowawczymi. Natomiast siła tarcia jest typową siłą rozpraszającą. Zmienia ona kierunek przy zmianie kierunku przemieszczenia tak, że zawsze przeszkadza ruchowi.

Gdy do układu zachowawczego o energii E_1 doprowadzimy pracę L, to zasób pracy w tym układzie powiększy się o L, a więc o tyleż powiększy się jego energia. Oznaczmy jego energię po pobraniu pracy L literą E_2. Napiszmy równanie wyrażające ten fakt:

$$E_2 = E_1 + L \tag{3.56}$$

albo

$$\boxed{E_2 - E_1 = L.} \tag{3.57}$$

Równanie to mówi nam, że przyrost energii układu zachowawczego równa się pobranej przez ten układ pracy. Równanie to wyraża zatem fakt niezniszczalności pracy. Praca wykonana nad układem nie ginie, tylko powiększa jego energię i może być z powrotem przez ten układ oddana. Stwierdzenie tego faktu nazywamy zasadą zachowania energii mechanicznej. Z równania tego widać, że jeżeli $L > 0$, to znaczy, jeżeli układ pobiera pracę, to przyrost energii jest dodatni, $E_2 > E_1$, energia końcowa jest większa niż początkowa. Przy pobieraniu pracy energia układu wzrasta.

Gdy układ wydaje pracę, czyli $L < 0$, wtedy $E_2 - E_1 < 0$, skąd $E_2 < E_1$, a więc energia w stanie końcowym jest mniejsza od energii w stanie początkowym o ilość wydanej pracy. Przy wydawaniu pracy energia układu maleje. Stąd wynika niemożliwość zbudowania *perpetuum mobile*, tj. takiej maszyny czy układu, który by wiecznie wydawał pracę. Według zasady zachowania energii musiałaby maleć energia układu, który by stale wydawał pracę i wreszcie musiałaby się wyczerpać.

Gdy na układ nie działają żadne siły zewnętrzne, układ nazywamy odosobnionym albo izolowanym. Praca wtedy nie może być ani pobierana, ani wydawana:

$L = 0$. Z równania (3.57) otrzymamy wówczas

$$E_2 - E_1 = 0, \quad \text{czyli} \quad E_2 = E_1 = \text{const.} \tag{3.58}$$

Energia układu w jakimkolwiek stanie późniejszym równa się energii tegoż układu w stanie początkowym. Możemy więc dla układu odosobnionego napisać

$$\boxed{E = \text{const},} \tag{3.59}$$

gdzie E jest całkowitą energią mechaniczną układu. To równanie często nazywają zasadą zachowania energii. Właściwie jest to szczególny przypadek tej ogólnej zasady.

Ponieważ energia mechaniczna układu materialnego składa się w ogólności z energii potencjalnej i energii kinetycznej, możemy dla układu odosobnionego napisać:

$$E_p + E_k = \text{const.} \tag{3.60}$$

Zatem suma obu rodzajów energii pozostaje niezmienna, natomiast jeden rodzaj energii może się zamieniać na drugi. Jeżeli energia potencjalna maleje, musi wzrastać energia kinetyczna i odwrotnie, tak że suma pozostaje stała.

W naszych warunkach ziemskich nie mamy układów ściśle zachowawczych i odosobnionych. Niektóre układy zbliżają się nieco do tego idealnego przypadku. Weźmy np. pod uwagę odchylone i puszczone wahadło. Układ: Ziemia-wahadło jest układem odosobnionym. Siła, jaką wywiera Ziemia na wahadło, jest siłą zachowawczą. Lecz działają tu również siły rozpraszające. Są nimi: tarcie w punkcie zawieszenia oraz opór powietrza. Jeżeli tarcie możliwie zmniejszymy przez odpowiednie zawieszenie, a opór powietrza przez odpowiedni kształt wahadła (soczewkowy) albo przez umieszczenie go w próżni, to wahadło może się wtedy wahać długo przy powolnej stosunkowo utracie energii. Podczas wahania obserwujemy ciągłe przemiany energii potencjalnej w kinetyczną i odwrotnie. Gdy wahadło znajduje się w najwięcej odchylonym położeniu, ma największą energię potencjalną, a energia kinetyczna równa się zeru. Następnie wahadło rozpędza się, nabywa coraz większej prędkości, a jednocześnie obniża się. Jego energia potencjalna maleje, kinetyczna wzrasta. W najniższym położeniu wahadło ma największą prędkość, a więc i największą energię kinetyczną, energia potencjalna zaś równa się zeru. Następnie znowu energia kinetyczna stopniowo przechodzi w potencjalną.

Układem w wysokim stopniu zachowawczym i niemal odosobnionym jest układ Słońce-Ziemia. Ziemia w swoim ruchu po orbicie w jednym okresie roku zbliża się do Słońca, w drugim — oddala. Przy zbliżaniu się maleje energia potencjalna układu, natomiast Ziemia zyskuje na prędkości, jej energia kinetyczna rośnie. Przy oddalaniu się Ziemi od Słońca prędkość jej maleje, a więc maleje energia kinetyczna, a wzrasta energia potencjalna.

Rozpatrzmy szczegółowiej następujący przypadek układu odosobnionego. Weźmy pod uwagę układ kamień-Ziemia. Niech kamień będzie wzniesiony na

wysokość h nad powierzchnią Ziemi. Przypuśćmy, że kamień ma masę m. Jego ciężar będzie

$$G = mg, \tag{3.61}$$

jego energia potencjalna:

$$E_p = mgh, \tag{3.62}$$

kinetyczna zaś

$$E_k = 0. \tag{3.63}$$

A więc całkowita energia

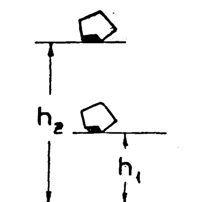
$$E = E_p + E_k = mgh = Gh. \tag{3.64}$$

Puśćmy teraz kamień. Zacznie on spadać, jego energia potencjalna zacznie maleć wraz z wysokością, natomiast zacznie on nabywać energii kinetycznej, gdyż jego prędkość będzie wzrastać. Obliczmy, jaka będzie jego energia potencjalna i kinetyczna po pewnym czasie spadania, gdy kamień znajduje się na wysokości h_1 nad Ziemią (rys. 3.13). Jego energia potencjalna będzie

$$E_p = Gh_1 = mgh_1\,, \tag{3.65}$$

energia kinetyczna zaś

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \tag{3.66}$$



Rys. 3.13. Suma energii potencjalnej i kinetycznej podczas spadania ciała pozostaje stała

Aby obliczyć energię kinetyczną, musimy obliczyć jego prędkość z równań ruchu. Możemy mianowicie napisać wzór na prędkość

$$v = gt \tag{3.67}$$

oraz wzór na drogę przebytą

$$h - h_1 = \frac{1}{2}gt^2. \tag{3.68}$$

Obliczając z równania (3.67) czas t i podstawiając do (3.68) otrzymamy

$$h - h_1 = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g}, \tag{3.69}$$

skąd

$$v^2 = 2g\,(h - h_1). \tag{3.70}$$

Podstawiając tę wartość prędkości do wzoru (3.66) na energię kinetyczną otrzymamy

$$E_k = mg\,(h - h_1), \tag{3.71}$$

a więc całkowita energia

$$E = E_p + E_k = mgh_1 + mg(h - h_1) = mgh = Gh. \tag{3.72}$$

Widzimy więc, że energia całkowita w dowolnej chwili późniejszej równa się energii początkowej. Energia układu nie zmienia się podczas spadania kamienia. Dopiero gdy kamień uderzy o Ziemię, wszystko się zmienia. Lecz wtedy układ przestaje być zachowawczy.

Większość układów, z jakimi się spotykamy na Ziemi, są to układy niezachowawcze, a więc rozpraszające energię mechaniczną. Takimi układami niezachowawczymi są zawsze układy, w których działają siły tarcia lub oporu środowiska, siły, które przy zmianie kierunku ruchu również zmieniają kierunek na przeciwny. Gdy np. przesuniemy jakiś ciężar po ziemi wbrew sile tarcia, praca wykonana przez nas nie zostanie przez układ zwrócona. Tarcie nie cofnie nigdy przesuniętego przedmiotu do poprzedniego położenia. Aby go cofnąć, siły zewnętrzne muszą znowu wykonać pracę dodatnią, zatem układ pobierze przy tym nową ilość pracy. W takich przypadkach praca nie powiększa energii układu, zostaje zniszczona. Jak później to szczegółowo omówimy, w takich przypadkach powstaje pewna ilość ciepła. W termodynamice i w teorii kinetycznej materii będziemy rozpatrywać przypadki, w których praca mechaniczna lub energia mechaniczna przechodzi w energię ruchów molekularnych, które odczuwamy jako ciepło. Również, jak wiemy obecnie, w określonych warunkach możemy ciepło zamieniać na pracę mechaniczną, czego dowodem są silniki cieplne. Musimy zatem i ciepło uważać za energię. Stąd wynika dalszy wniosek, że np. węgiel w atmosferze powietrza musi mieć jakąś odmianę energii, gdyż przy paleniu się wydziela znaczne ilości ciepła. Taką energię, którą posiadają różne ciała mogące się łączyć chemicznie, nazywamy energią chemiczną. Znamy także układy, które mogą wydawać pracę dzięki działającym w nich siłom natury elektrycznej lub magnetycznej. Pojęcie energii uległo znacznemu uogólnieniu. Obecnie rozróżniamy wiele rodzajów energii. Należą do nich:

1) odmiany energii mechanicznej: energia potencjalna i kinetyczna,
2) ciepło, energia wewnętrzna,
3) energia chemiczna,
4) energia elektryczna,
5) energia magnetyczna,
6) energia fal elektromagnetycznych i wszelkiego promieniowania,
7) energia wewnątrzatomowa.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę wszelkie rodzaje energii, wówczas możemy wypowiedzieć zasadę zachowania energii w jej najogólniejszej postaci, zasadę, która jest naczelną zasadą fizyki: energia jest niezniszczalna, nie można jej ani stworzyć, ani zniszczyć żadnym sposobem. Całkowity zasób energii w układzie może się

powiększyć tylko w razie doprowadzenia energii z zewnątrz, zmniejszyć zaś tylko wskutek wydania energii na zewnątrz. Możemy to krótko wyrazić:

$$E\,\text{końcowa} - E\,\text{początkowa} = E\,\text{wydanej lub pobranej} \quad (3.73)$$

W układzie odosobnionym, w którym nie ma wymiany energii między rozpatrywanym układem a innymi układami, całkowita energia musi być niezmienna:

$$E\,\text{całkowita} = \text{const.} \quad (3.74)$$

Mogą w takim układzie zachodzić tylko przeobrażenia energii, przemiany jej z jednej postaci w inne.

Z ogólnej zasady zachowania energii wynika, że zbudowanie jakiegokolwiek *perpetuum mobile* fizycznego, tj. urządzenia, które wydawałoby stale energię w jakiejkolwiek postaci nie pobierając jej z zewnątrz, jest rzeczą niemożliwą.

Zadania

3.26. Kula ołowiana o średnicy $d = 2$ cm waży 47,47 g. Jaka jest masa właściwa i ciężar właściwy ołowiu w układzie CGS i MKS?

Odpowiedź: $\varrho = \frac{6m}{\pi d^3} = 11{,}34$ g/cm^3 $= 11\,340$ kg/m^3,

$\gamma = \frac{6mg}{\pi d^3} = 11\,130$ dyn/cm^3 $= 111\,300$ N/m^3.

3.27. Drut miedziany długości $l = 6$ m waży 671,1 g. Gęstość miedzi jest $\varrho = 8{,}9$ g/cm^3. Jaka jest średnica d tego drutu?

Odpowiedź: $d = \sqrt{\frac{m}{\pi \varrho l}} = 0{,}2$ cm $= 2$ mm.

3.28. Robotnik za pomocą kołowrotu podnosi ładunek cegieł o ciężarze $G = 120$ kG ruchem jednostajnym na wysokość $h = 15$ m. Jaką pracę wykonał (obliczyć w układzie MKS i technicznym jednostek)?

Odpowiedź: $L = Gh = 17\,658$ J $= 1800$ kGm.

3.29. Jaką pracę będzie musiał wykonać robotnik, jeżeli ten sam ciężar wciągnie na tę samą wysokość ruchem jednostajnie przyśpieszonym z przyśpieszeniem $a = 0{,}5$ m/sec^2?

Odpowiedź: $L = (G + ma)h = 1891{,}8$ kGm.

3.30. Walec żelazny średnicy $d = 30$ cm, długości $l = 0{,}8$ m wtoczono na pochyłość długości $s = 6$ m nachyloną do poziomu pod kątem $\alpha = 10°$. Jaka praca została przy tym wykonana, jeżeli masa właściwa żelaza $\varrho = 7{,}8$ g/cm^3.

Odpowiedź: $L = \frac{1}{4}\pi \varrho g d^2 l s \sin\alpha = 4{,}508 \cdot 10^9$ ergów $= 450{,}8$ J $= 45{,}98$ kGm.

3.31. Koń zaprzężony do wozu wywiera siłę $F = 100$ kG pod kątem $\alpha = 20°$ do poziomu. Jaką pracę L wykona na drodze $s = 2$ km?

Odpowiedź: $L = 1{,}88 \cdot 10^5$ kGm.

3.32. Ludzie holujący łódź po rzece za pomocą liny tworzącej z kierunkiem brzegu kąt $\alpha = 25°$ ciągną ją z siłą $F = 180$ kG. Jaką pracę L wykonują przy przeciągnięciu łodzi o $s = 1{,}5$ km w górę rzeki?

Odpowiedź: $L = 24{,}46 \cdot 10^4$ kGm.

3.33. Lina druciana nawijająca się na bęben wyciąga klatkę z ładunkiem wagi $G=10$ tonn z szybu o głębokości $h = 200$ m. Metr bieżący liny waży $\gamma = 9{,}8$ kG. Jaka praca zostanie wykonana?

Odpowiedź: $L = \left(G + \frac{1}{2}\gamma h\right) h = 21{,}96 \cdot 10^5$ kGm.

3.34. Piłka tenisowa o masie $m = 55$ g została wyrzucona pionowo do góry z prędkością $v_0 = 18{,}8$ m/sec. Jaka jest jej energia potencjalna, kinetyczna i całkowita po upływie 1) 0,5 sec, 2) 1 sec?

Odpowiedź: 1) $E_k = 53{,}13 \cdot 10^6$ erg, $E_p = 44{,}1 \cdot 10^6$ erg;
2) $E_k = 22{,}23 \cdot 10^6$ erg, $E_p = 75 \cdot 10^6$ erg,
$E = 97{,}23 \cdot 10^6$ erg.

3.35. Sprężyna obciążona ciężarkiem $G = 60$ G przedłuża się o 2 cm. Jaką będzie miała energię potencjalną, gdy ją wydłużymy o $s = 20$ cm, jeżeli siła wywierana przez sprężynę jest proporcjonalna do jej wydłużenia?

Odpowiedź: $E_p = 1324 \cdot 10^6$ ergów $= 1{,}324$ J $= 0{,}135$ kGm.

3.36. Kamień o masie $m = 300$ g został rzucony pod kątem do poziomu tak, że upadł na ziemię w odległości $s = 20$ m po czasie $t = 6$ sekund od chwili wyrzucenia. Jaka praca została wykonana przy rzucie?

Odpowiedź: $L = E_k = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{gt}{2}\right)^2\right] = 131{,}3$ J $\approx 13{,}4$ kGm.

3.37. Jaką energię kinetyczną ma pociąg o masie $m = 200$ tonn przy prędkości $v = 20$ m/sec? Na jaką wysokość h można by tą energią podnieść ciężar 1 tonny?

Odpowiedź: $E_k = 4{,}1 \cdot 10^6$ kGm, $h = 4100$m.

3.38. Jaką prędkość należałoby nadać huśtawce o długości $l = 3$ m, aby się wychyliła o kąt $\alpha = 60°$ od pozycji pionowej?

Odpowiedź: $v = \sqrt{2gl\,(1 - \cos\alpha)} = 5{,}42$ m/sec.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Jaka jest treść III zasady dynamiki? Jak można ją wyrazić matematycznie?
2. Jak określamy stosunek mas?
3. Jakie są jednostki masy w układzie CGS i MKS?
4. Jaka jest treść II zasady Newtona?
5. Jaka jest treść zasady niezależności działania sił?
6. Jaka jest treść II zasady Newtona w ogólniejszej postaci?
7. Jak można wyrazić III zasadę Newtona za pomocą pojęcia siły?
8. Jaka jest treść I zasady Newtona?
9. Jaka jest treść zasady zachowania masy?
10. W jakim układzie współrzędnych stosują się zasady Newtona?
11. Jaka jest treść i jakie ma znaczenie zasada d'Alemberta?
    Co to są siły bezwładności?
12. Jakie są prawa i równania swobodnego spadku ciał w próżni?
13. Jak się porusza ciało rzucone poziomo w polu sił ciężkości?
14. Jak się porusza ciało rzucone ukośnie w polu sił ciężkości?
15. Jakie są wielkości podstawowe i pochodne w układzie MKS i ich jednostki?
16. Jakie są wielkości podstawowe i pochodne w układzie CGS i ich jednostki?
17. Jakie są wielkości podstawowe i pochodne w układzie technicznym i ich jednostki?

18. Jak się określa masę właściwą i ciężar właściwy? Jakie są jednostki tych wielkości?
19. Jak się oblicza pracę mechaniczną w rozmaitych przypadkach? gdy siła i kąt między siłą i przemieszczeniem jest stały? gdy siła i kąt ten są zmienne?
20. Jakie są jednostki pracy mechanicznej w rozmaitych układach?
21. Co nazywamy układem materialnym? Na jakie rodzaje dzielimy siły działające na części układu materialnego? Jakie siły nazywamy wewnętrznymi? zewnętrznymi?
22. Jak się określa energię mechaniczną układu?
23. Jak się określa energię potencjalną? kinetyczną? Jakie są na nie wzory i jak je otrzymać? Jaki jest związek między przyrostem energii kinetycznej i pracą wykonaną nad układem?
24. Jakie układy nazywamy zachowawczymi, jakie rozpraszającymi?
25. Jakimi wzorami wyraża się zasada zachowania energii dla układu nieodosobnionego? dla układu odosobnionego?
26. Jakie znamy rodzaje energii? Jaka jest treść ogólnej zasady zachowania energii?

3.17. Moc. Mocą układu P nazywamy stosunek pracy wykonywanej przez układ do czasu jej wykonania. Oznaczając pracę wydaną w czasie t literą L otrzymamy na moc P wzór

$$\boxed{P = \frac{L}{t}.} \tag{3.75}$$

Wymiar mocy, jak łatwo z tego wzoru otrzymać, będzie

$$[P] = \frac{[L]}{[t]} = [l^2 m t^{-3}]. \tag{3.76}$$

Ponieważ pojęcie mocy jest używane w zastosowaniach technicznych bardzo często, mamy wiele rozmaitych jednostek używanych w przypadkach rozmaitych silników, w ogóle rozmaitych źródeł energii. W układzie CGS jednostką mocy jest erg na sekundę. Pisze się $\frac{\text{erg}}{\text{sec}}$. W układzie technicznym jednostką mocy jest

$$1\,\frac{\text{kGm}}{\text{sec}} \quad \left(\text{albo}\ \frac{\text{kpm}}{\text{sec}}\right).$$

W technicznych zastosowaniach używa się często jednostki 75 razy większej zwanej koniem mechanicznym, symbol KM (dawniej zwany koniem parowym, HP)

$$1\,\text{KM} = 75\,\frac{\text{kGm}}{\text{sec}}.$$

W układzie MKS jednostką mocy jest dżul na sekundę. Jednostka ta nosi nazwę wat (skrót W).

$$1\,\text{W} = 1\,\frac{\text{J}}{\text{sec}}.$$

Ta ostatnia jednostka mocy prawie wyłącznie jest używana w elektrotechnice. Również elektrotechnicy używają bardzo często jednostki 1000 razy większej zwanej kilowat (skrót kW).

$$1 \text{ kW} = 1000 \text{ W},$$

$$1 \text{ KM} = 736 \text{ W}, \qquad 1 \text{ kW} = 1{,}359 \text{ KM}.$$

Z definicji mocy otrzymujemy związek między pracą, mocą a czasem:

$$L = Pt. \tag{3.77}$$

Ten związek daje początek pewnym nowym jednostkom pracy używanym głównie w elektrotechnice. Gdy moc wynosi 1 wat, to znaczy, że w każdej sekundzie jest wykonywana praca 1 dżula, czyli 1 dżul jest pracą wykonywaną przez układ o mocy 1 W w każdej sekundzie. Ze względu na to, że pracę daje iloczyn mocy przez czas, jednostka ta nazywana jest często watosekundą (Wsec)

$$1 \text{ Wsec} = 1 \text{ J (dżul)}.$$

Praca wykonywana przez układ o mocy 1 kW w jednej godzinie nosi nazwę kilowatogodzina (skrót kWh).

$$1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \times 3600 \text{ sec} = 3{,}6 \times 10^6 \text{ Wsec (dżulów)} =$$
$$= 3{,}6 \times 10^{13} \text{ ergów} = 3{,}671 \times 10^5 \text{ kGm}.$$

3.18. Pęd i popęd. Pędem punktu nazywamy wektor o kierunku prędkości, którego wartość liczbowa równa się iloczynowi masy przez prędkość. Oznaczając pęd ciała literą $\vec{p}$ możemy napisać

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}.} \tag{3.78}$$

Za pomocą pojęcia pędu możemy drugą zasadę Newtona wyrazić w nieco innej niż dotychczas formie. Weźmy najpierw pod uwagę ruch jednostajnie przyśpieszony. W takim ruchu przyśpieszenie chwilowe równa się przyśpieszeniu średniemu (i jest stałe). Zatem

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Zatem równanie $ma = F$ wyrażające drugą zasadę Newtona możemy napisać w postaci

$$m\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = F, \tag{3.79}$$

skąd otrzymujemy równanie

$$m(v_2 - v_1) = F(t_2 - t_1). \tag{3.80}$$

Możemy to napisać w postaci

$$p_2 - p_1 = F(t_2 - t_1). \tag{3.81}$$

Równanie to wyraża fakt, że przyrost pędu ciała równa się iloczynowi siły przez czas jej działania. Ten ostatni iloczyn nazywamy popędem siły. Otrzymujemy w ten sposób twierdzenie: przyrost pędu ciała równa się popędowi działającej na nie siły. Ostatnie równanie możemy napisać również w takiej postaci:

$$\boxed{\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t,} \tag{3.82}$$

skąd

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}. \tag{3.83}$$

Przechodząc do granicy otrzymamy

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{3.84}$$

Szybkość zmiany pędu $\frac{d\vec{p}}{dt}$ równa się sile działającej na ciało. Możemy je napisać również w takiej formie:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}.} \tag{3.85}$$

Jeżeli masa ciała jest stała, to oczywiście równanie to jest identyczne z równaniem (3. 6) wyrażającym w poprzedniej formie II zasadę Newtona. Jest ono jednak ogólniejsze, gdyż można je stosować nawet w przypadkach bardzo dużych prędkości ciał (porównywalnych z prędkością światła), gdy według mechaniki relatywistycznej masa nie jest już wielkością stałą, tylko rośnie z prędkością.

W przypadku, gdy na ciało działa układ sił, zamiast równania (3.82) należy napisać równanie:

$$\Delta \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \Delta t \tag{3.86}$$

albo

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{3.87}$$

Gdy na ciało działa siła szybko zmieniająca się z czasem, trzeba podzielić czas jej działania na bardzo krótkie przedziały $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$ i zsumować popędy

siły w tych poszczególnych bardzo drobnych odstępach czasu uważając siłę w danym przedziale czasu za stałą. Wtedy zamiast równania (3.82) należy napisać:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}_1 \Delta t_1 + \vec{F}_2 \Delta t_2 + \ldots + \vec{F}_n \Delta t_n. \tag{3.88}$$

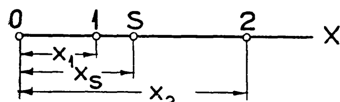
Dzieląc cały czas działania siły na coraz mniejsze przedziały i przechodząc do granicy otrzymamy

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt. \tag{3.89}$$

Wyrażenie po prawej stronie będzie wtedy popędem siły. Możemy teraz wypowiedzieć poprzednie twierdzenie dla przypadku ogólnego: przyrost pędu ciała równa się popędowi działającej na nie siły.

Pojęcie popędu siły jest użyteczne przede wszystkim w przypadku sił działających przez czas bardzo krótki. Przy uderzeniu np. młotkiem o kulę krokietową dostrzegamy skutek uderzenia — pęd kuli, ale bardzo trudno byłoby zmierzyć siłę szybko zmieniającą się podczas zderzenia się młotka z kulą. Również i czas zderzenia trwający mały ułamek sekundy byłoby niełatwo zmierzyć. Natomiast o wielkości popędu możemy wnioskować z pędu uzyskanego przez kulę.

3.19. Środek masy. Weźmy pod uwagę układ składający się z dwóch punktów *1* i *2* o masach m_1 i m_2. Poprowadźmy tak układ współrzędnych, aby oba punkty leżały na osi X (rys. 3.14). Niech ich odcięte będą x_1 i x_2. Zwróćmy teraz uwagę na punkt pomyślany S dzielący stale odległości punktów *1* i *2* w stosunku odwrotnym do ich mas (punkty *1* i *2* mogą być w spoczynku albo mogą się poruszać). Punkt taki nazywamy środkiem masy dwóch rozpatrywanych punktów. Ma on pewne szczególne własności, którymi się teraz zajmiemy. Warunek, iż punkt S dzieli odległość między danymi punktami w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do ich mas, daje nam równanie



Rys. 3.14. Środek masy dwóch punktów

$$\frac{x_s - x_1}{x_2 - x_s} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{3.90}$$

skąd otrzymamy równanie

$$(m_1 + m_2)\, x_s = m_1 x_1 + m_2 x_2\,, \tag{3.91}$$

z którego możemy określić odciętą punktu S:

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \tag{3.92}$$

Przypuśćmy, że punkty *1* i *2* poruszają się z dowolnymi prędkościami wzdłuż osi X. Po upływie bardzo krótkiego czasu Δt ich odcięte zmienią się na x_1' i x_2'.

Położenie środka masy również się zmieni, tak że jego odcięta będzie x'_s. Między nowymi współrzędnymi będzie oczywiście istniał poprzedni związek

$$(m_1 + m_2)\, x'_s = m_1 x'_1 + m_2 x'_2 . \tag{3.93}$$

Odejmując od równania (3.93) równanie (3.91) i dzieląc następnie wynik przez Δt otrzymamy

$$(m_1 + m_2)\frac{x'_s - x_s}{\Delta t} = m_1 \frac{x'_1 - x_1}{\Delta t} + m_2 \frac{x'_2 - x_2}{\Delta t} . \tag{3.94}$$

Gdy czas Δt dąży do zera, to ułamki w tym ostatnim równaniu dążą do wartości prędkości v_s, v_1 i v_2. W granicy otrzymamy równanie

$$(m_1 + m_2)\, v_s = m_1 v_1 + m_2 v_2 . \tag{3.95}$$

Otrzymujemy w ten sposób twierdzenie, że suma pędów obu punktów równa się pędowi, jaki by miał środek ich masy, gdyby w nim obie masy zostały skupione.

Przypuśćmy teraz, że na punkty *1* i *2* działają siły F_1 i F_2. Dla prostoty znowu załóżmy, że są one umiejscowione na osi X. Pod działaniem tych sił prędkości punktów będą się zmieniać. Niech ich wartości po upływie bardzo krótkiego czasu Δt będą v'_1 i v'_2. Będziemy mieli równanie

$$(m_1 + m_2)\, v'_s = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 . \tag{3.96}$$

Odejmując od tego równania równanie (3. 95) i dzieląc otrzymany rezultat przez Δt otrzymamy

$$(m_1 + m_2)\frac{v'_s - v_s}{\Delta t} = m_1 \frac{v'_1 - v_1}{\Delta t} + m_2 \frac{v'_2 - v_2}{\Delta t} . \tag{3.97}$$

W granicy ułamki występujące w tym równaniu dają przyśpieszenia poszczególnych punktów: a_s, a_1 i a_2. Otrzymamy więc równanie

$$(m_1 + m_2)\, a_s = m_1 a_1 + m_2 a_2 . \tag{3.98}$$

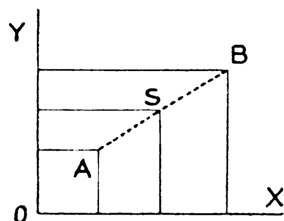
Lecz iloczyny po prawej stronie tego równania równają się siłom działającym na punkty *1* i *2*: $m_1 a_1 = F_1$, $m_2 a_2 = F_2$. Zatem:

$$(m_1 + m_2)\, a_s = F_1 + F_2 . \tag{3.99}$$

Środek masy porusza się zatem tak, jak gdyby w tym punkcie była skupiona masa obu punktów i jak gdyby do tego punktu były przyłożone obie siły działające na poszczególne punkty.

Gdy siły F_1 i F_2 są siłami wewnętrznymi, to według III zasady Newtona $F_1 = -F_2$, a więc $F_1 + F_2 = 0$. Z równania (3. 99) wynika, że wtedy $a_s = 0$, przyśpieszenie środka masy równa się zeru, środek masy pozostaje w spoczynku lub też porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Jeżeli dwa rozpatrywane punkty nie leżą na osi X (rys. 3. 15), wzory na współrzędne środka masy będą nieco bardziej złożone. Nie trudno wyprowadzić, że będą one następujące:



Rys. 3.15. Środek masy dwóch punktów nie leżących na osi X

$$x_s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_s = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.100)$$

Jeżeli mamy układ trzech punktów, to najpierw znajdujemy środek masy pierwszych dwóch punktów, następnie należy sobie wyobrazić, że masy dwóch pierwszych punktów znajdują się w ich środku masy i należy szukać środka masy poprzedniego środka masy dwóch pierwszych punktów i trzeciego punktu. Tak możemy uogólnić w dalszym ciągu pojęcie środka masy na układ dowolnej liczby n punktów.

Jeżeli mamy układ przestrzenny n punktów, to można w podobny jak poprzednio sposób określić środek masy tego układu. Współrzędne środka masy, jak można wyprowadzić, są określone przez wzory:

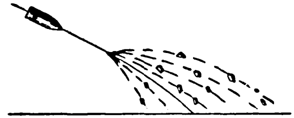
$$\left.\begin{aligned} x_s &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \\ y_s &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \\ z_s &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.101)$$

Rozkładając prędkości i przyśpieszenia, jak również i siły na trzy składowe w kierunku trzech osi współrzędnych można udowodnić w ogólnej postaci twierdzenia, któreśmy poprzednio wyprowadzili dla przypadku szczególnego:

1. Suma geometryczna pędów wszystkich mas ma taki kierunek i taką wartość, jak gdyby wszystkie masy były skupione w środku masy i poruszały się z jego prędkością.

2. Środek masy ma takie przyśpieszenie, jak gdyby wszystkie masy były w nim skupione, a wszystkie siły do niego przyłożone. Jeżeli istnieją tylko siły wewnętrzne, to, ponieważ ich suma geometryczna równa się zeru, środek masy pozostaje wówczas w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Gdy więc mamy układ, w którym działają tylko siły wewnętrzne, a środek masy pozostawał w spoczynku, to i nadal będzie pozostawał w spoczynku. Człowiek pozostawiony w łódce umieszczonej nieruchomo na stojącej wodzie bez wioseł może się poruszać wzdłuż łódki, lecz każdemu jego ruchowi będzie towarzyszył odpowiedni ruch łódki taki, że środek ich masy będzie nieruchomy. Gdy szrapnel leci pod wpływem bezwładności oraz przyciągania Ziemi po krzywej zbliżając się do Ziemi, wybuch nie zmieni toru środka masy. Po wybuchu odłamki rozlatują się na wszystkie strony pod wpływem popędu gazów wywiązanych z materiału wybuchowego. Ponieważ są to siły wewnętrzne, nie wpłyną one na ruch środka masy. Będzie się on w dalszym ciągu poruszał po tej samej krzywej (rys. 3.16), dopóki odłamki nie zderzą się z Ziemią.



Rys. 3.16. Ruch środka masy pocisku po wybuchu jest taki sam, jaki by był, gdyby wybuchu nie było

3.20. Zasada zachowania pędu. Weźmy pod uwagę układ n punktów materialnych. Między nimi mogą działać siły wewnętrzne. Również mogą być przyłożone jakieś siły zewnętrzne. Napiszemy dla każdego punktu równanie wyrażające II zasadę Newtona (3. 86) oznaczając wskaźnikiem w siły wewnętrzne, a wskaźnikiem z siły zewnętrzne:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\vec{p}_1 &= \left(\sum\vec{F}_{1w} + \sum\vec{F}_{1z}\right)\Delta t, \\ \Delta\vec{p}_2 &= \left(\sum\vec{F}_{2w} + \sum\vec{F}_{2z}\right)\Delta t, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta\vec{p}_n &= \left(\sum\vec{F}_{nw} + \sum\vec{F}_{nz}\right)\Delta t. \end{aligned}\right\} \tag{3.102}$$

Ponieważ środek masy ma takie przyśpieszenie, jak gdyby wszystkie masy były w nim skupione i wszystkie siły doń przyłożone, więc dodając wszystkie powyższe równania otrzymalibyśmy dla środka masy równanie

$$\Delta\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n\right) = \left(\sum\vec{F}_w + \sum\vec{F}_z\right)\Delta t. \tag{3.103}$$

Po prawej stronie mamy sumę geometryczną wszystkich sił działających na poszczególne punkty. Między nimi są siły wewnętrzne i zewnętrzne. Lecz siły wewnętrzne według III zasady Newtona są parami równe i mają znaki przeciwne, ich suma geometryczna równa się zeru. Pozostają zatem tylko siły zewnętrzne. Możemy więc to równanie napisać w postaci:

$$\Delta\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n\right) = \sum\vec{F}_z \cdot \Delta t, \tag{3.104}$$

w którym po prawej stronie mamy sumę wszystkich sił zewnętrznych.

Gdy sił zewnętrznych nie ma, tzn. gdy układ jest odosobniony, prawa strona tego równania jest zerem. Będziemy wtedy mieli

$$\Delta\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n\right) = 0. \tag{3.105}$$

Po lewej stronie mamy wielkość oznaczającą przyrost sumy geometrycznej pędów. Jeżeli przyrost jakiejś wielkości równa się zeru, to znaczy, że wielkość ta wcale się nie zmienia, czyli jest stała. Możemy więc dla układu izolowanego napisać

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \text{const.} \tag{3.106}$$

Równanie to wyraża tzw. *zasadę zachowania pędu* dla układu odosobnionego: suma geometryczna pędów wszystkich części układu jest wielkością stałą.

Przykładem zasady zachowania pędu jest doświadczenie opisane na str. 50, ust. 3.1. Dwa wózki, między którymi znajduje się napięta i związana nitką sprężyna, stoją nieruchomo na stole. Wózki się nie poruszają, zatem suma geometryczna ich pędów równa się zeru. Po przepaleniu nitki wózki rozbiegają się w przeciwne strony. Ponieważ działają tylko siły wewnętrzne, zasada zachowania pędu wymaga, aby w dalszym ciągu suma geometryczna pędów (czyli wypadkowy pęd środka masy) równała się zeru:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0,$$

skąd otrzymujemy

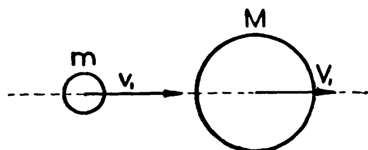
$$m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2,$$

czyli

$$\frac{\vec{v}_1}{-\vec{v}_2} = \frac{m_2}{m_1}. \tag{3.107}$$

Zatem prędkości uzyskane przez wózki są odwrotnie proporcjonalne do ich mas i mają zwroty przeciwne.

3.21. Zderzenie się kul. Jako przykład zastosowania zasady zachowania pędu rozpatrzymy zderzenie się dwóch kul sprężystych. Kule zderzając się spłaszczają się nieco. Podczas zetknięcia się wywierają na siebie siły — przez czas zresztą bardzo krótki. Jeżeli są sprężyste, natychmiast po zderzeniu wracają do pierwotnej postaci. O własnościach sprężystych ciał będzie mowa w jednym z następnych rozdziałów. Na razie założymy, że kule są doskonale sprężyste, to znaczy, że podczas ich zderzenia nie zachodzi strata energii mechanicznej. Przypuśćmy, że dwie takie kule o masach m i M biegną swobodnie na mocy bezwładności tak, że ich środki przemieszczają się wzdłuż tej samej prostej (rys. 3.17). Na kule nie działają żadne siły zewnętrzne, więc do układu składającego się z tych dwóch kul możemy zastosować



Rys. 3.17. Zderzenie się kul sprężystych

zasadę zachowania energii i zasadę zachowania pędu dla układu odosobnionego. Należy więc napisać, że całkowita energia układu przed zderzeniem i po zderzeniu ma taką samą wartość. Energia układu równa się sumie energii kinetycznych obu kul. A więc ta suma po zderzeniu będzie równa sumie przed zderzeniem. Podobnie i suma pędów przed zderzeniem będzie równa sumie pędów po zderzeniu. Oznaczając prędkości kul m i M przed zderzeniem odpowiednio przez v_1 i V_1, a po zderzeniu przez v_2 i V_2 otrzymamy równania:

$$\frac{mv_1^2}{2}+\frac{MV_1^2}{2}=\frac{mv_2^2}{2}+\frac{MV_2^2}{2}, \tag{3.108}$$

$$mv_1+MV_1=mv_2+MV_2. \tag{3.109}$$

Znosząc w pierwszym równaniu mianowniki i odpowiednio porządkując wyrazy otrzymamy równania:

$$m(v_1^2-v_2^2)=M(V_2^2-V_1^2), \tag{3.110}$$

$$m(v_1-v_2)=M(V_2-V_1). \tag{3.111}$$

Dzieląc pierwsze z tych równań przez drugie przy założeniu, że prędkości v_1 i v_2 są różne i tak samo prędkości V_1 i V_2 są różne, otrzymamy

$$v_1+v_2=V_2+V_1. \tag{3.112}$$

Weźmy teraz równania (3. 111) i (3. 112) i przenieśmy wyrazy zawierające niewiadome prędkości v_2 i V_2 na lewo, a pozostałe na prawo. Otrzymamy wtedy dwa równania:

$$v_2-V_2=V_1-v_1, \tag{3.113}$$

$$mv_2+MV_2=MV_1+mv_1.$$

Z układu tych dwóch równań otrzymujemy na v_2 i V_2 następujące rozwiązania:

$$v_2=\frac{\begin{vmatrix} V_1-v_1 & -1 \\ MV_1+mv_1 & M \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m & M \end{vmatrix}}=\frac{MV_1-Mv_1+MV_1+mv_1}{M+m}, \tag{3.114}$$

$$V_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & V_1-v_1 \\ m & MV_1+mv_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m & M \end{vmatrix}}=\frac{MV_1+mv_1-mV_1+mv_1}{M+m}. \tag{3.115}$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymamy:

$$v_2 = -\frac{M-m}{M+m}v_1 + \frac{2M}{M+m}V_1, \tag{3.116}$$

$$V_2 = \frac{M-m}{M+m}V_1 + \frac{2m}{M+m}v_1. \tag{3.117}$$

Gdy masy obu kul są równe, otrzymujemy z powyższych wzorów

$$v_2 = V_1, \qquad V_2 = v_1. \tag{3.118}$$

Prędkość kuli pierwszej po odbiciu równa się zatem prędkości kuli drugiej przed odbiciem, prędkość zaś drugiej kuli po odbiciu równa się prędkości pierwszej kuli przed odbiciem. Można powiedzieć krótko, że wskutek odbicia następuje wymiana prędkości kul. Ta, która poruszała się wolniej, będzie się po odbiciu poruszać prędzej, zaś biegnąca przed odbiciem prędzej — po zderzeniu będzie się poruszać wolniej.

Rozpatrzmy teraz zagadnienie, jak będzie się poruszać kula doskonale sprężysta po zderzeniu się ze ścianą. Przy tym weźmiemy pod uwagę przypadek, gdy ściana jest nieruchoma, jak również taki, gdy ściana jest ruchoma. Aby z poprzednich wzorów otrzymać rozwiązania, założymy, że rozmiary i masa pierwszej kuli rosną nieograniczenie. Musimy jednak te wzory odpowiednio przekształcić. Podzielmy mianowicie liczniki i mianowniki ułamków wchodzących w skład wyrażeń (3.116) i (3.117) przez M. Otrzymamy

$$v_2 = -\frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}v_1 + \frac{2}{1+\frac{m}{M}}V_1, \tag{3.119}$$

$$V_2 = \frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}V_1 + \frac{2\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}v_1. \tag{3.120}$$

Gdy masa większej kuli M rośnie nieograniczenie, ułamek $\frac{m}{M}$ dąży do zera. Otrzymamy rozwiązania dla przypadku granicznego, gdy zamiast tego ułamka podstawimy do powyższych wzorów zero. Otrzymamy wtedy rozwiązania:

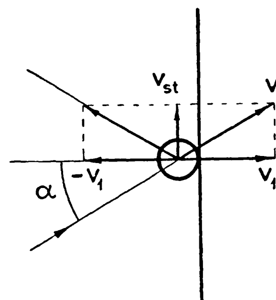
$$v_2 = -v_1 + 2V_1, \tag{3.121}$$

$$V_2 = V_1. \tag{3.122}$$

Drugi wzór daje wynik, który można było z góry przewidzieć, mianowicie, że prędkość ściany wskutek zderzenia nie uległa zmianie.

Rozpatrzymy następujące przypadki szczególne:

1. Ściana nieruchoma: $V_1 = V_2 = 0$. Wtedy ze wzoru (3. 121) otrzymujemy: $v_2 = -v_1$. Kula odbija się od ściany z prędkością, jaką miała przed odbiciem, lecz skierowaną przeciwnie. Gdy kula biegnie nie w kierunku prostopadłym do ściany, lecz w kierunku tworzącym z prostopadłą kąt α, wówczas jej prędkość można rozłożyć na dwie składowe, normalną i styczną (rys. 3. 18). Normalna składowa zmienia znak na przeciwny, zaś styczna składowa nie zmienia się wcale. Z rysunku łatwo się przekonać, że kula odbije się w kierunku tworzącym z normalną również kąt α.



Rys. 3.18. Odbicie się kuli od ściany

2. Ściana porusza się w tę samą stronę co kula z prędkością mniejszą niż kula (w przeciwnym razie nie mogłyby się zderzyć). Tu możemy wyodrębnić jeszcze trzy możliwe przypadki:

a. $V_1 < \frac{1}{2} v_1$, prędkość ściany jest mniejsza od połowy prędkości kuli. Wtedy oczywiście $2V_1 < v_1$. Otrzymamy na wartość prędkości kuli po odbiciu ze wzoru (3. 121) liczbę ujemną o wartości bezwzględnej mniejszej niż prędkość przed odbiciem.

b. $V_1 = \frac{1}{2} v_1$, skąd $2V_1 = v_1$. Ze wzoru (3. 121) na prędkość kuli po odbiciu otrzymamy zero. Kula wskutek zderzenia traci całkowicie swą prędkość, zatrzymuje się.

c. $V_1 > \frac{1}{2} v_1$, wtedy $2V_1 > v_1$. Otrzymamy ze wzoru (3. 121), że prędkość kuli po zderzeniu jest dodatnia, kula po zderzeniu porusza się w tę samą stronę, co przed zderzeniem, z prędkością mniejszą niż przed zderzeniem.

Zatem we wszystkich trzech przypadkach kula po zderzeniu porusza się wolniej niż przed zderzeniem. Kula traci swój pęd oddając go częściowo lub nawet w całości (przypadek b) ścianie.

3. Ściana porusza się w przeciwną stronę niż kula, a więc prędkość V_1 ma wartość ujemną. W takim razie z równania (3. 121) łatwo stwierdzić, że prędkość kuli po zderzeniu będzie zawsze ujemna i większa co do bezwzględnej wartości od v_1. Kula zawsze odbije się w przeciwną stronę z prędkością większą niż przed spotkaniem się ze ścianą. W przypadku szczególnym, gdy:

$$V_1 = -\frac{1}{2} v_1, \qquad \text{czyli} \qquad 2V_1 = -v_1,$$

prędkość

$$v_2 = -v_1 - 2v_1 = -v_1 - v_1 = -2v_1.$$

Prędkość kuli po zderzeniu się jest dwa razy większa od prędkości przed zderzeniem.

W przypadku, gdy kule są całkowicie niesprężyste, np. z ołowiu lub miękkiej gliny, nie odbijają się wcale. Przy zderzeniu się ich występują siły działające w czasie bardzo krótkim i tylko tak długo, dopóki ich prędkości się nie wyrównają. Wtedy przestają działać i kule poruszają się dalej jako jedna całość. Ponieważ i w tym przypadku działają tylko siły wewnętrzne, zatem według zasady zachowania pędu musi być spełnione równanie:

$$mv_1 + MV_1 = mv + Mv\,, \tag{3.123}$$

gdzie v oznacza wspólną prędkość kul po zderzeniu. Otrzymujemy stąd

$$v = \frac{mv_1 + MV_1}{m + M}. \tag{3.124}$$

Podczas zderzenia następuje strata energii kinetycznej. Obliczmy ją:

energia kinetyczna obu kul przed zderzeniem jest

$$E_k' = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV_1^2}{2}, \tag{3.125}$$

po zderzeniu zaś

$$E_k'' = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}. \tag{3.126}$$

Strata energii kinetycznej

$$E_k' - E_k'' = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2} - \frac{Mv^2}{2}. \tag{3.127}$$

Podstawiając na v wartość (3. 124) po łatwych przekształceniach otrzymamy

$$E_k' - E_k'' = \frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}(v_1 - V_1)^2. \tag{3.128}$$

W przypadku kul o równej masie $m = M$ i o prędkościach równych przeciwnie skierowanych: $V_1 = -v_1$ otrzymamy $v = 0$. Strata energii kinetycznej w tym przypadku jest całkowita, kule po zderzeniu zatrzymają się, ich energia kinetyczna będzie równa zeru. Oczywiście według zasady zachowania energii nie może ona zginąć całkowicie. Doświadczenie wykazuje, że przy zderzeniu niesprężystym energia kinetyczna zamienia się na ciepło.

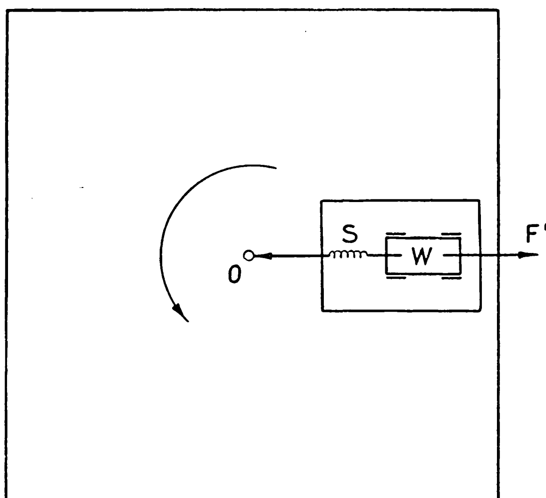
3.22. Siła dośrodkowa i odśrodkowa. Mówiliśmy poprzednio, że na ciało posiadające przyśpieszenie działa siła, której wartość liczbową określa iloczyn masy przez przyśpieszenie. Ponieważ ciało poruszające się po okręgu koła ruchem jednostajnym posiada przyśpieszenie dośrodkowe

$$\frac{v^2}{r} = r\omega^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2},$$

zatem na ciało to działa siła

$$F = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 = \frac{4\pi^2 rm}{T^2}. \tag{3.129}$$

Nazywamy ją siłą dośrodkową. Według trzeciej zasady dynamiki sile tej towarzyszyć musi druga siła działająca na to ciało, które wywiera siłę dośrodkową na pierwsze ciało. Gdy np. wprawimy w ruch kołowy kamień uwiązany na sznurku, który trzymamy w ręku, sznurek wywiera na kamień siłę dośrodkową, zmusza go do poruszania się po obwodzie koła. Kamień zaś wywiera na rękę trzymającą sznurek siłę skierowaną przeciwnie. Księżyc poruszający się w przybliżeniu po obwodzie koła zmuszany jest do tego przez siłę dośrodkową, którą w tym przypadku jest przyciąganie Ziemi. Ze swej strony Księżyc wywiera na Ziemię siłę skierowaną przeciwnie. Środkiem ruchu jest w tym przypadku środek masy tych dwóch ciał. Obie te siły działające na Ziemię i na Księżyc są skierowane ku środkowi masy tych ciał.



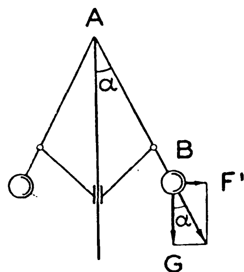
Rys. 3.19. Dla obserwatora obracającego się razem z salą wszystko tak się odbywa, jak gdyby do ciał były przyłożone siły odśrodkowe

Gdyby jednak obserwator brał udział w ruchu obrotowym, to dla niego zjawiska dynamiczne tak by się odbywały, jak gdyby do wszystkich ciał nieruchomych były przyłożone siły działające na zewnątrz, w kierunku przedłużenia promieni kół, po których te ciała się poruszają. Na przykład obserwator umieszczony wewnątrz obracającej się około osi O sali (rys. 3. 19) stwierdzi, że np. aby utrzymać na stole wózek W na kółkach, trzeba by trzymać za koniec sprężyny S, przy czym sprężyna się rozciągnie. Będzie ona wywierała oczywiście siłę dośrodkową, zmuszającą wózek do poruszania się po obwodzie koła. Lecz obserwatorowi nie odczuwającemu ruchu obrotowego (że to jest możliwe świadczy fakt, że mieszkańcy Ziemi wcale nie odczuwają jej ruchu obrotowego) będzie się wydawało, że coś ciągnie wózek, że przyłożona jest do niego siła F' równa sile sprężyny, a więc, jak wiemy, sile dośrodkowej. Będzie to siła pozorna, siła bezwładności. Podobnie człowiek jadący na karuzeli będzie czuł, jak gdyby jakaś siła ciągnęła go na zewnątrz. Lecz układ obracający się nie jest oczywiście układem inercjalnym. Pozorne siły odczuwane przez jadących na obracającej się karuzeli

nie istnieją w układzie inercjalnym. Nie będą one istnieć dla obserwatora stojącego na zewnątrz obracającej się sali lub karuzeli i związanego z ziemią.

W układzie obracającym się będzie się wszystko tak odbywało, jak gdyby układ ten się nie obracał, a natomiast jakby do wszystkich ciał były przyłożone siły skierowane od środka ruchu na zewnątrz. Te siły pozorne, siły bezwładności, nazywają często siłami odśrodkowymi. Nie są to w rzeczywistości siły, nie nadają one ciałom przyśpieszeń w swoim kierunku. Gdy znika siła dośrodkowa, znika również natychmiast pozorna siła odśrodkowa, ciało porusza się dalej po linii stycznej do toru na mocy bezwładności. Gdy przetniemy sznurek, na którym uwiązany jest kamień, odlatuje on po prostej stycznej do okręgu koła, po którym się poruszał. Grudki błota odlatują od kół samochodu po liniach stycznych do tych kół.

Wprowadzając do rozumowania fikcyjne siły odśrodkowe możemy zagadnienia dynamiczne sprowadzić do zagadnień statycznych. Jeżeli wprowadzimy te siły do rachunków, możemy je wykonywać nie uwzględniając ruchu obrotowego. Wartość pozornej siły odśrodkowej jest, jak już wyżej wspomniano, równa sile dośrodkowej, zatem



Rys. 3.20. Regulator odśrodkowy zachowuje się tak samo, jakby był w spoczynku, a do kul były przyłożone siły odśrodkowe F'

$$F' = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2. \tag{3.130}$$

Dla przykładu obliczymy kąt odchylenia regulatora odśrodkowego Watta, używanego przy maszynie parowej, a także i do innych celów (rys. 3.20). Pręt AB regulatora o długości l przy ruchu obrotowym odchyla się od pionu o kąt α. Rozciągany pręt AB wywiera na ciężarek B umieszczony na jego końcu siłę skierowaną ku punktowi A. Prócz tego na ciężarek ten działa jego ciężar w dół. Wypadkowa tych dwóch sił daje siłę dośrodkową rosnącą w miarę wzrostu prędkości kątowej regulatora. Zamiast uwzględniać ruch obrotowy możemy sobie wyobrazić ten sam regulator w spoczynku i przyłożoną do ciężarka B siłę odśrodkową

$$F' = mr\omega^2.$$

Ponieważ na ciężarek działa jeszcze jego ciężar $G = mg$, zatem pręt AB odchyli się o taki kąt α, że wypadkowa sił F' i G będzie działać w kierunku przedłużenia pręta AB. Wtedy będzie równowaga. Kąt α będzie określony wzorem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F'}{G} = \frac{mr\omega^2}{mg}.$$

Ponieważ promień obrotu $r = l\sin\alpha$, zatem otrzymamy równanie

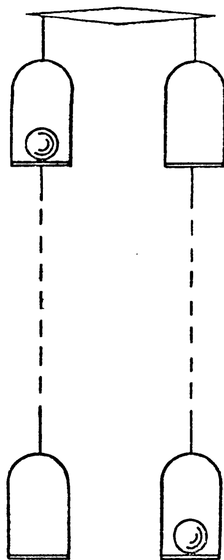
$$\frac{l\,\omega^2 \sin\alpha}{g} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

skąd

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

W miarę zatem wzrostu prędkości kątowej $\cos\alpha$ maleje, kąt α wzrasta według powyższego wzoru. Ciężarki wznoszą się coraz wyżej.

3.23. Grawitacja powszechna. Jak już mówiliśmy w § 3.7, Ziemia przyciąga ku sobie wszystkie ciała znajdujące się na niej. Powstaje pytanie, czy z wysokością nad powierzchnią Ziemi ta siła przyciągająca zmienia się, czy nie. Doświadczenie wykazało, że siła ta maleje w miarę oddalania się ciał od Ziemi. Wykazał to doświadczeniem Jolly. Przyrządem, którego używał, była waga umieszczona na wysokości kilku metrów nad powierzchnią Ziemi. Waga prócz zwykłej pary szalek posiadała drugą parę dolnych szalek zawieszonych pod górnymi na drutach (rys. 3. 21). Równoważy się wagę umieszczając na górnych szalkach dwie równe masy. Gdy jedną masę przeniesie się na dolną szalkę, równowaga zostaje zakłócona, waga przechyla się w stronę obciążonej dolnej szalki. Aby przywrócić równowagę, należy dołożyć niewielki ciężarek do masy znajdującej się na górnej szalce. Zatem dwa ciała o równych masach nie są jednakowo przyciągane, gdy znajdują się na różnych wysokościach.



Rys. 3.21. Dwie masy zrównoważone po umieszczeniu ich na górnych szalkach, nie są zrównoważone, gdy jedną przeniesie się na dolną szalkę

Powstaje teraz zagadnienie, w jaki sposób zmienia się siła, z jaką Ziemia przyciąga ciała znajdujące się nad jej powierzchnią i jak daleko sięga jej wpływ? Na pytanie to dał odpowiedź Newton stawiając hipotezę, że siła ta działa na dowolnych odległościach od Ziemi i że wartość jej jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od środka Ziemi. Przypuścił on, że siła przyciągania Ziemi działa również na Księżyc i dzięki niej to właśnie Księżyc krąży naokoło Ziemi. Zakładając, że siła ta jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości od środka Ziemi mógł obliczyć wartość przyśpieszenia dośrodkowego Księżyca.

Według hipotezy Newtona oznaczając przez G ciężar ciała w odległości promienia ziemskiego R od środka Ziemi, przez G_1 zaś — w odległości innej R_1, powinniśmy mieć

$$\frac{G}{G_1} = \frac{R_1^2}{R^2}, \tag{3.131}$$

lecz $G = mg$, zaś $G_1 = mg_1$, zatem:

$$\frac{g}{g_1} = \frac{R_1^2}{R^2}. \tag{3.132}$$

Ponieważ Księżyc znajduje się w odległości $R_1 = 60\,R$ od środka Ziemi, zatem

$$\frac{g}{g_1} = \frac{(60\,R)^2}{R^2} = 3600,$$

skąd

$$g_1 = \frac{g}{3600} = \frac{981\ \text{cm/sec}^2}{3600} = 0{,}272\ \text{cm/sec}^2.$$

Z drugiej strony, siła, z którą Ziemia przyciąga Księżyc, jest siłą dośrodkową, siłą zmuszającą Księżyc do krążenia po orbicie (w przybliżeniu) kołowej. Przyśpieszenie dośrodkowe według wzoru kinematycznego (2.48) jest

$$a = \frac{4\pi^2\,r}{T^2}, \tag{3.133}$$

gdzie r jest odległością Księżyca od środka Ziemi, T — okresem obiegu. Ponieważ $r = 383\,930$ km, zaś $T = 27$ dni 43 min $= 2\,360\,580$ sec, więc podstawiając te liczby do wzoru (3.133) otrzymamy

$$a = 0{,}272\ \text{cm/sec}^2.$$

Newton posługując się niedokładną wartością na długość promienia ziemskiego nie otrzymał dobrej zgodności między tymi wynikami obliczonymi na różnych drogach. Uważał wtedy swoją hipotezę za wątpliwą. Jednak po kilkunastu latach, gdy dokładne pomiary Picarda pozwoliły na dokładniejsze obliczenie promienia kuli ziemskiej, wraca do dawniejszych rozważań i stwierdza zupełną zgodność wyliczeń opartych na nowych danych.

Jeżeli przyczyną krążenia Księżyca jest przyciąganie Ziemi, to można również przypuszczać, że i krążenie planet dokoła Słońca jest wywołane przyciąganiem wzajemnym Słońca i planet. Jak wyprowadził Kepler z nadzwyczaj dokładnych obserwacyj Tychona Brahe, ruch planet dokoła Słońca podlega następującym prawom, zwanym obecnie prawami Keplera:

1. Tory planet są elipsami, w ognisku każdej z tych elips znajduje się Słońce.

2. Promienie wodzące planet wychodzące ze Słońca (promieniem wodzącym planety będzie odcinek prostej łączący środek Słońca ze środkiem planety) zakreślają w równych czasach równe pola.

3. Kwadraty czasów obiegu planet mają się do siebie jak sześciany ich średnich odległości do Słońca.

Ponieważ elipsy, po których dążą planety, bardzo mało różnią się od kół, dla uproszczenia przeprowadzimy rachunki tak, jakby tory planet były kołowe.

Według Newtona ruchy planet można wytłumaczyć przyjmując, iż Słońce i planety przyciągają się siłami proporcjonalnymi do ich mas, a odwrotnie proporcjonalnymi do kwadratu ich wzajemnej odległości. Na siłę przyciągającą F możemy więc napisać wzór

$$F = k\frac{Mm}{r^2}, \tag{3.134}$$

gdzie M oznacza masę Słońca, a m — masę planety.

Siła ta będzie siłą dośrodkową. Oznaczając okres obiegu planety po orbicie literą T możemy napisać na siłę dośrodkową wzór

$$F = \frac{4\pi^2 rm}{T^2}. \tag{3.135}$$

Z tych dwóch równań otrzymamy

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = k\frac{M}{r^2}, \tag{3.136}$$

stąd zaś

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{kM}{4\pi^2}. \tag{3.137}$$

Stosunek sześcianu promienia orbity do kwadratu okresu ma dla wszystkich planet stałą wartość (gdyż wszystkie wielkości po prawej stronie są stałe). Oznaczając promienie orbit dwóch planet przez r_1 i r_2, zaś okresy ich przez T_1 i T_2 otrzymamy

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2},$$

skąd

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}. \tag{3.138}$$

Otrzymujemy więc trzecie prawo Keplera.

Przy założeniu, że planeta porusza się po orbicie kołowej, otrzymamy jako oczywisty wniosek drugie prawo Keplera, że promień wodzący planety zakreśla w równych czasach równe pola. Lecz i wtedy, gdy dokładnie rozwiążemy zagadnienie, nie robiąc tego uproszczenia, otrzymamy z założenia Newtona drugie prawo Keplera.

Newton uogólnił swą hipotezę i wypowiedział ją w postaci zupełnie ogólnego prawa, prawa powszechnego ciążenia albo grawitacji:

Dwie jakiekolwiek cząstki materialne przyciągają się w kierunku łączącej je prostej siłami wprost proporcjonalnymi do ich mas, a odwrotnie proporcjonalnymi do kwadratu odległości tych cząstek.

Siły, z jakimi dwa ciała o dowolnych masach i objętościach przyciągają się, otrzymuje się przez sumowanie geometryczne sił wywieranych na każdą cząstkę

pierwszego ciała przez wszystkie cząstki drugiego ciała. Zadanie jest w zasadzie bardzo skomplikowane. Lecz dla niektórych przypadków spotykanych w praktyce zadanie się upraszcza dzięki twierdzeniom udowodnionym przez Newtona. Pierwsze z nich brzmi, że każda kulista warstwa materii o jednakowej wszędzie gęstości przyciąga każdą cząstkę leżącą na zewnątrz niej tak, jak gdyby jej całkowita masa była skupiona w środku. Drugie twierdzenie wynikające z pierwszego brzmi, że kula złożona z warstw współśrodkowych, z których każda ma wszędzie tę samą gęstość (lecz różne warstwy mogą mieć różne gęstości), przyciąga cząstkę materialną na zewnątrz niej leżącą tak, jak gdyby masa kuli była skupiona w jej środku.

Jak widać z tych twierdzeń, można było traktować Słońce i planety, jak gdyby były one punktami o odpowiednich masach.

W poprzednio napisanym równaniu (3.134):

$$F = k\frac{Mm}{r^2} \tag{3.139}$$

występuje stała proporcjonalności k. Znaczenie jej łatwo znaleźć zakładając, że $M = 1$, $m = 1$ i $r = 1$. Wtedy $k = F$. Stała k równa się więc sile, z jaką przyciągają się dwie jednostkowe masy umieszczone w odległości 1 cm. Stała k nosi nazwę stałej ciążenia powszechnego. Wyznaczył ją po raz pierwszy doświadczalnie Cavendish zmierzywszy za pomocą tzw. wagi skręceń siłę, z jaką się przyciągają dwie znane masy umieszczone w znanej odległości. Prostrze doświadczenie pozwalające również wyznaczyć wartość tej stałej wykonał Jolly w sposób następujący: waga ustawiona na szczycie wieży miała, jak w poprzednio opisanym doświadczeniu, dwie szalki na górze i dwie szalki na dole (rys. 3.21). Dwie kule o znacznej masie umieszczono na wadze tak, że jedna z nich znajdowała się na górnej szalce, a druga — na dolnej. Zrównoważono je dokładnie. Następnie pod dolną szalką z kulą umieszczono dużą kulę ołowianą o masie około 5 tonn. Waga przechyliła się wówczas w stronę kuli ołowianej i trzeba było po przeciwnej stronie dołożyć niewielki ciężarek. Występujące w równaniu

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

wielkości F, m_1, m_2, r zostały zmierzone i można było wyliczyć stałą k. Wartość tej stałej według ostatnich pomiarów jest

$$k = 6{,}66 \cdot 10^{-8}\ \text{dyn}\ \text{cm}^2\,\text{g}^{-2} \qquad (\text{albo g}^{-1}\,\text{cm}^3\,\text{sec}^{-2}).$$

Z taką więc siłą przyciągałyby się dwie cząstki materialne, każda o masie 1 g, umieszczone w odległości 1 cm jedna od drugiej. Jest to siła, jak widać, nadzwyczaj mała. Osiąga ona duże wartości wtedy, gdy przyciągają się ciała o wielkich masach.

Znając wartość stałej grawitacji k można natychmiast znaleźć masę Ziemi za pomocą prostego rachunku. Wiemy, że masa 1 g jest przyciągana przez

Ziemię z siłą 981 dyn. Ponieważ średni promień Ziemi jest 6 367 600 m, możemy więc napisać równanie:

$$981\ \text{dyn} = 6{,}66 \cdot 10^{-8}\ \text{dyn cm}^2\,\text{g}^{-2} \frac{m_1 \cdot 1\ \text{g}}{(63\,676 \cdot 10^4)^2\ \text{cm}^2},$$

gdzie m_1 oznacza masę Ziemi. Z tego ostatniego równania możemy obliczyć m_1, to jest masę Ziemi. Dokładna wartość masy Ziemi jest

$$6{,}0 \cdot 10^{27}\ \text{g}.$$

Dzieląc masę Ziemi przez jej objętość otrzymamy na średnią gęstość Ziemi, czyli jej masę właściwą

$$\varrho = \frac{m_1}{V} = 5{,}5\ \text{g/cm}^3.$$

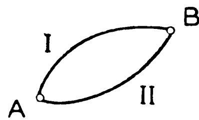
Ponieważ średnia gęstość górnych warstw skorupy ziemskiej wynosi tylko 2,5 g/cm³, zatem głębsze warstwy Ziemi muszą zawierać pierwiastki o większej gęstości. Możliwą jest rzeczą, że wnętrze Ziemi zawiera dużo żelaza.

3.24. Praca w polu sił ciężkości. Wokoło Ziemi rozciąga się przestrzeń, w której na wszystkie ciała działają siły przyciągające skierowane ku środkowi Ziemi. Mówimy, że wokół Ziemi rozciąga się pole siły ciężkości. Na każdy punkt materialny o masie m działa siła G skierowana w danym miejscu ku środkowi Ziemi, której wielkość jest określona równaniem.

$$G = mg. \tag{3.140}$$

Przyśpieszenie g zależy, jak już wiemy, od odległości od środka Ziemi. Jednak na niezbyt wielkiej przestrzeni nad powierzchnią Ziemi odległość ta tak mało się zmienia, że można g uważać za stałe.

Podnosząc ciało ciężkie ponad Ziemię wykonywamy pracę przeciw sile ciężkości, jednocześnie energia układu złożonego z tego ciała i Ziemi rośnie. Wielkość wykonanej pracy zależy od położenia punktu początkowego i końcowego drogi, nie zależy natomiast, jak wykażemy, od drogi, po której przenosimy to ciało. Grawitacja jest siłą zachowawczą i, jeżeli ciało przeniesiemy z powrotem od punktu B do A, to praca włożona poprzednio zostanie zwrócona. Ciężar wykona wtedy pracę dodatnią przeciwko siłom zewnętrznym (oczywiście siła zewnętrzna wykona przy tym pracę ujemną).

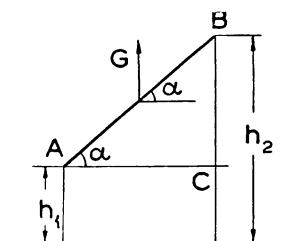


Rys. 3.22. Praca sił ciężkości lub przeciw nim nie zależy od drogi przejścia od punktu początkowego do końcowego

Gdyby praca po drodze $AIIB$ (rys. 3.22) była inna, niż wykonana po drodze AIB, powiedzmy, większa, to podnosząc ciężar po drodze AIB, a spuszczając go po drodze $AIIB$ mielibyśmy czysty zysk na pracy. Ponieważ po powrocie ciężaru do punktu początkowego A układ wraca do stanu pierwotnego, mielibyśmy urzą-

dzenie pozwalające wytwarzać pracę z niczego, czyli *perpetuum mobile*. Wiemy, że to jest niemożliwe.

Jeżeli droga przejścia od punktu A do B jest obojętna, to dla obliczenia wykonanej pracy obieramy sobie taką drogę, aby to obliczenie było możliwie najprostrze. Przenieśmy zatem ciężar G od położenia A do B po odcinku linii prostej (rys. 3. 23), po równi pochyłej. Jeżeli kąt nachylenia tego odcinka do poziomu jest α, to praca wykonana będzie $L = Gl \cos (90° - \alpha) = Gl \sin \alpha$, gdzie l jest długością odcinka AB, czyli długością równi pochyłej. Oznaczając przez h_1 wysokość punktu A nad powierzchnią Ziemi, a wysokość punktu B przez h_2 możemy napisać



Rys. 3.23. Praca przeciwko siłom ciężkości zależy tylko od różnicy wysokości punktu początkowego i końcowego

$$L = G(h_2 - h_1), \tag{3.141}$$

gdyż $l \sin \alpha = h_2 - h_1$. Jak widać, we wzorze tym występują tylko wysokości punktu początkowego i końcowego drogi nad poziomem. Oczywiście można to było z góry przewidzieć na podstawie zasady zachowania energii: praca ta równa się mianowicie różnicy energii potencjalnej ciała G w położeniu A i w położeniu B. Przy ruchu ciała od punktu B do A ciężar ciała wykona pracę, przy przeniesieniu ciężaru G od punktu A do B siły zewnętrzne wykonają taką samą pracę.

Otrzymaliśmy więc ważne twierdzenie: praca wykonana przez ciężar poruszający się w polu sił ciężkości po dowolnej drodze lub też wykonana przez siłę zewnętrzną w celu podniesienia ciężaru nie zależy od drogi, po której ciało zostało przeniesione, ani od położenia punktów początkowego i końcowego; zależy jedynie od różnicy wysokości poziomów, w których znajduje się punkt początkowy i końcowy, i równa jest zawsze różnicy energii potencjalnej w poziomie początkowym i końcowym.

3.25. Równowaga punktu. Warunkiem koniecznym równowagi punktu jest, aby wypadkowa sił działających na ten punkt równała się zeru. Na odwrót, gdy wypadkowa wszystkich sił działających na dany punkt równa się zeru i punkt nie miał żadnej prędkości początkowej, to pozostaje on w spoczynku, to znaczy w równowadze. Jeżeli na punkt działa układ kilku sił, to zazwyczaj postępujemy tak, że każdą z tych sił rozkładamy na składowe w kierunku trzech osi współrzędnych.

Niech składowe siły F_i w kierunkach trzech osi współrzędnych będą

$$X_i, Y_i, Z_i.$$

W takim razie warunki równowagi są dane przez równania:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0. \tag{3.142}$$

Zadania

3.39. Tramwaj o masie $m = 20$ tonn po upływie $t = 1{,}5$ sec od chwili ruszenia z przystanku uzyskał prędkość $v = 10{,}8$ km/godz. Jaką moc P rozwinął jego silnik?

Odpowiedź: $P = \frac{mv^2}{2t} = 60$ kW $= 81{,}6$ KM.

3.40. Samochód o wadze $G = 1{,}5$ tonny jedzie po drodze nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = 5°$ z prędkością $v = 72$ km/godz. Jaką moc P musiał rozwinąć silnik (bez uwzględnienia tarcia i oporu powietrza)?

Odpowiedź: $P = G\,v \sin\alpha = 34{,}9$ KM.

3.41. Jaką objętość V wody może wypompować w przeciągu czasu $t = 2$ godziny ze studni głębokości $h = 10$ m pompa poruszana silnikiem o mocy $P = 3$KM?

Odpowiedź: $V = \frac{Pt}{\gamma h} = 162$ m³.

3.42. Pocisk o masie $m = 30$ kg został wyrzucony z działa z prędkością $v = 600$ m/sec. Jaki jest popęd siły, która sprawiła jego ruch?

Odpowiedź: 18 000 kg m/sec.

3.43. Jak długo musi działać siła $F = 60$ kG na auto o masie $m = 1$ tonn, aby nadać mu prędkość $v = 54$ km/godz?

Odpowiedź: $t = \frac{mv}{F} = 25{,}5$ sec.

3.44. Jaką siłę musi rozwinąć lokomotywa, aby prędkość $v_1 = 36$ km/godz. pociągu o masie $m = 200$ tonn powiększyć w przeciągu $t = 1$ minuty do prędkości $v_2 = 54$ km/godz. (bez uwzględnienia tarcia)? Jaka moc jest do tego potrzebna?

Odpowiedź: $F = \frac{m\,(v_2 - v_1)}{t} \approx 1700$ kG, $\quad P = \frac{m\,(v_2^2 - v_1^2)}{2t} = 283$ KM.

3.45. Rozpędzony wagon porusza się z prędkością $v = 24$ km/godz. Przez nacisk hamulców na koła przyłożona została siła hamująca $F = 450$ kG, która go zatrzymała w przeciągu czasu $t = 30$ sec. Jaka jest masa m wagonu?

Odpowiedź: $m = \frac{Ft}{v} \approx 19\,850$ kg.

3.46. W jakiej odległości l_1 od środka Ziemi znajduje się środek masy Ziemi i Księżyca, skoro masa Ziemi jest $m_1 = 5{,}98 \cdot 10^{21}$ tonn, masa księżyca $m_2 = 7{,}4 \cdot 10^{19}$ tonn, a ich odległość $l = 384\,400$ km? Jaki jest stosunek tej odległości do średniego promienia Ziemi $R = 6368$ km?

Odpowiedź: $l_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,l = 4692$ km, $\quad \frac{l_1}{R} = 0{,}737$.

3.47. W wierzchołkach trójkąta ABC o współrzędnych A (2,6), B (10,8), C (7,2) znajdują się masy $m_A = 70$ g, $m_B = 30$ g, $m_C = 40$ g. Znaleźć środek ich masy.

Odpowiedź: $x_S = 5{,}14$, $\quad y_S = 5{,}28$.

3.48. W jednorodnej płytce z blachy o promieniu $r_1 = 9$ cm wycięto koło o promieniu $r_2 = \frac{1}{2} r_1$ styczne do większego koła. Znaleźć środek masy tej płytki.

W s k a z ó w k a: należy wyobrazić sobie drugie takie samo koło wycięte z przeciwnej strony środka. Wtedy środek masy otrzymanej płytki będzie się znajdować w środku większego koła. Następnie szukać środka masy tej płytki i koła o promieniu $\frac{1}{2} r_1$.

O d p o w i e d ź: $l_S = \frac{1}{6} r_1 = 1{,}5$ cm od środka większego koła.

3.49. Rozwiązać zadania 3.2, 3.3 stosując zasadę zachowania pędu.

3.50. Dwie kule o masach $m_1 = 100$ g i $m_2 = 75$ g, doskonale sprężyste, biegną po linii prostej, pierwsza na prawo z prędkością $v_1 = 35$ cm/sec, druga w lewo z prędkością $V_1 = 21$ cm/sec. Znaleźć ich prędkości v_2 i V_2 po centralnym zderzeniu oraz prędkość ich środka masy.

O d p o w i e d ź: $v_2 = -13$ cm/sec, $V_2 = 43$ cm/sec, $v_S = 11$ m/sec, taka sama przed i po zderzeniu.

3.51. Ciężarek o masie 300 g obracamy na sznurku długości $r = 60$ cm 2 razy w sekundzie. Jaka jest siła F wywierana przez sznurek na ciężarek?

O d p o w i e d ź: $F = 2{,}9$ kG.

3.52. Do ilu obrotów w sekundzie należałoby dojść, aby sznurek pękł, jeżeli sznurek zrywa się pod działaniem siły $F = 7{,}5$ kG?

O d p o w i e d ź: 3,2 obrotów na sec.

3.53. Cyklista zakręcając po okręgu o promieniu $r = 6$ m nachyla się pod kątem $\alpha = 75°$ do poziomu. Jaka jest jego prędkość v?

O d p o w i e d ź: $v = \sqrt{rg \operatorname{ctg} \alpha} = 3{,}93$ m/sec $= 14{,}4$ km/godz.

3.54. Jaką prędkość należałoby nadać sztucznemu księżycowi poruszającemu się po okręgu wokół Ziemi w odległości $h = 100$ km od jej powierzchni, aby nie spadł on na Ziemię (promień Ziemi $R = 6368$ km)?

O d p o w i e d ź: $v = \sqrt{g_1 (R + h)} = 7843$ m/sec $= 7{,}84$ km/sec, $g_1 = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = 9{,}51$ m/sec^2.

3.55. Jaką siłą kula ołowiana o średnicy $d = 10$ m (gęstość ołowiu $\varrho = 11{,}34$) będzie przyciągać małą kulkę o masie 1 kg umieszczoną tuż przy powierzchni?

O d p o w i e d ź: $F = \varrho \frac{4}{3} \pi r m_2 = 1{,}58$ dyn.

3.56. Jaką pracę L wykona turysta o wadze $G = 70$ kG wchodząc z Hali Gąsienicowej leżącej na wysokości 1500 m nad poziomem morza na szczyt Świnicy (2300 m nad poziomem morza)? Jaka jest średnia moc P, jeżeli na wejście zużył on 2 godz. 45 min?

O d p o w i e d ź: $L = 56\,000$ kGm; $P = 5{,}6$ kGm/sec.

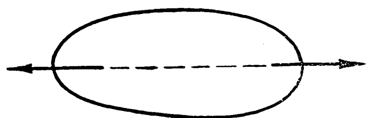
Pytania do powtórzenia materiału

1. Jak się określa moc układu? Jakie są jednostki mocy?
2. Jak określamy pęd punktu materialnego? popęd siły? Jaki jest związek między tymi wielkościami?
3. Jak się wyraża II zasada Newtona za pomocą pojęcia pędu (związek między pędem i siłą)?
4. Jaka jest definicja środka masy 2 punktów? dowolnej liczby punktów?
5. Jakie są własności środka masy układu punktów?

6. Jaka jest treść zasady zachowania pędu?
7. Jak się zmieniają przy zderzeniu doskonale sprężystym prędkości kul o równych masach?
8. Jak się oblicza zmiany prędkości dwóch kul przy zderzeniu sprężystym?
9. Jak się zmienia prędkość kuli doskonale sprężystej przy uderzeniu o ścianę nieruchomą? o ścianę ruchomą poruszającą się w tę samą stronę? w stronę przeciwną?
10. Jak obliczyć stratę energii przy zderzeniu się kul całkowicie niesprężystych?
11. Jaka jest wartość siły dośrodkowej działającej na ciało poruszające się po okręgu z prędkością v? z prędkością kątową ω? gdy okres obiegu po okręgu jest T?
12. Jak się zmienia siła przyciągania ciał przez Ziemię z ich wzajemną odległością? Jak udało się sprawdzić Newtonowi tę zależność?
13. Jaka jest treść praw Keplera?
14. Jaka jest treść prawa ciążenia powszechnego?
15. Jaka jest wartość pracy wykonywanej przy przemieszczeniu ciała w polu sił ciężkości?
16. Jakie są warunki równowagi punktu?

4. Zasady dynamiki ciała sztywnego

4.1. Ciało sztywne. Ciałem sztywnym nazywamy ciało, w którym wzajemne odległości punktów nie ulegają zmianie mimo działania na nie sił. Oczywiście jest to fikcja. Wszystkie ciała, jakie znamy w przyrodzie, odkształcają się pod wpływem sił mniej lub więcej. Jednakże znamy wiele ciał, których odkształcenia nawet przy działaniu dużych sił są tak niewielkie, że prawa wyprowadzone dla ciał sztywnych można do nich stosować z dostatecznym stopniem przybliżenia.



Rys. 4.1. Do dwóch punktów ciała sztywnego można przyłożyć dwie siły równe i przeciwne co do kierunku nie wywołując żadnej zmiany w stanie tego ciała

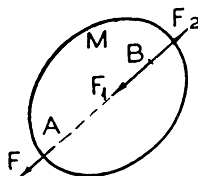
Do ciał sztywnych będziemy często stosować twierdzenia oparte na następujących prawach:

1. Do dwu dowolnych punktów ciała sztywnego możemy zawsze przyłożyć dwie siły, leżące w prostej przechodzącej przez te punkty (rys. 4.1), równe sobie i skierowane wprost przeciwnie, nie wywołując przez to zmiany w stanie równowagi czy też ruchu tego ciała.

2. Do dowolnego punktu ciała sztywnego możemy zawsze przyłożyć kilka sił, których wypadkowa równa się zeru, również nie zakłócając tym stanu równowagi czy też ruchu.

Z praw tych, które z dużym przybliżeniem są potwierdzone przez doświadczenie, wynika następujące

Twierdzenie: Siłę przyłożoną do pewnego punktu ciała sztywnego można zawsze, nie zmieniając przez to jej działania, przenieść do dowolnego punktu leżącego na prostej, w której siła ta jest umiejscowiona.

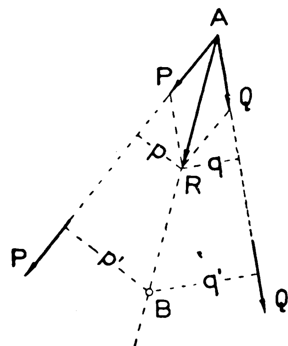


Rys. 4.2. Siłę przyłożoną do ciała sztywnego można przenosić do dowolnego punktu wzdłuż linii jej działania

Dowód: przypuśćmy, że na ciało M działa siła F (rys. 4.2) przyłożona do punktu A. Przyłóżmy w dowolnym punkcie B leżącym na linii działania siły F dwie siły F_1 i F_2 działające w prostej, w której umiejscowiona jest siła F, równe co do wielkości sile F i skierowane w przeciwne strony. Z prawa 2 wynika, że takie dwie siły, których wypadkowa będzie równa zeru, można zawsze przyłożyć. Z prawa 1 wynika, że dwie siły F

i F_2 przyłożone do punktów A i B można usunąć. Pozostanie zatem siła F_1, przyłożona do punktu B.

4.2. Wypadkowa dwóch sił nierównoległych leżących w jednej płaszczyźnie. Przypuśćmy, że na ciało sztywne działają dwie siły P i Q umiejscowione w jednej płaszczyźnie (rys. 4. 3). Korzystając z poprzedniego twierdzenia przenieśmy je do punktu A, w którym ich kierunki się przecinają. Dwie siły przyłożone do jednego punktu możemy dodać geometrycznie. Zatem ich wypadkową będzie siła R, tj. suma geometryczna sił składowych.



Rys. 4.3. Wypadkowa dwóch sił nierównoległych leżących w jednej płaszczyźnie

Opuśćmy z wierzchołka wektora R prostopadłe odcinki p i q na kierunki sił P i Q. Będą one wysokościami dwóch trójkątów, na jakie wypadkowa R dzieli równoległobok $PRQA$. Ponieważ pola tych trójkątów są równe, możemy napisać

$$\frac{1}{2}Pp = \frac{1}{2}Qq, \tag{4.1}$$

skąd otrzymujemy proporcję

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}. \tag{4.2}$$

Wypadkową R możemy przenieść do dowolnego punktu wzdłuż prostej jej działania.

Jeżeli z dowolnego punktu B leżącego na linii działania tej wypadkowej opuścimy prostopadłe p' i q' na kierunki sił P i Q, to z podobieństwa trójkątów, które się utworzą, możemy łatwo wyprowadzić, że

$$\frac{q'}{p'} = \frac{q}{p}. \tag{4.3}$$

Biorąc pod uwagę równanie (4.2) możemy napisać

$$\frac{P}{Q} = \frac{q'}{p'}, \qquad \text{skąd} \qquad Pp' = Qq'. \tag{4.4}$$

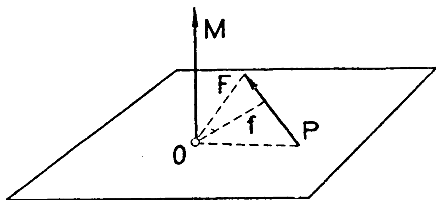
Odcinek prostopadłej opuszczonej z dowolnego punktu B na kierunek siły P lub Q nazywamy ramieniem siły P lub Q względem punktu B, zaś iloczyn siły przez jej ramię nazywamy *momentem* siły względem punktu B.

Moment siły F względem punktu O uważamy za wektor o kierunku prostopadłym do płaszczyzny przechodzącej przez punkt O i przez tę siłę (rys. 4.4). Wartość liczbowa tego wektora równa się iloczynowi siły F przez jej ramię f.

$$\boxed{M = Ff,} \tag{4.5}$$

czyli równa się podwójnemu polu trójkąta OFP.

W ogóle momentem wektora względem punktu O nazywamy wektor prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez ten wektor i punkt o wartości liczbowej równej iloczynowi wartości wektora przez jego ramię.



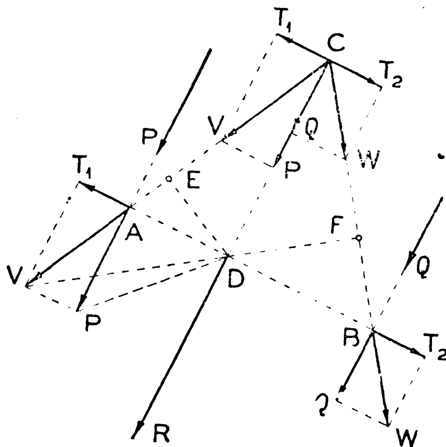
Rys. 4.4. M — moment wektora P

Jak widać z rysunku (4.4), siła F przyłożona do punktu P płaszczyzny i leżąca w tej płaszczyźnie spowodowałaby obrót płaszczyzny, względnie ciała z nią związanego wokół punktu O, gdyby ten punkt był unieruchomiony. Za dodatni kierunek wektora M uważamy kierunek, w którym poruszałaby się śruba prawoskrętna przy obrocie zgodnym z obrotem wokół punktu O, wywołanym przez siłę F.

Równanie (4.4) wyraża twierdzenie, które za pomocą wprowadzonych teraz terminów można wyrazić w sposób następujący:

Momenty sił składowych względem dowolnego punktu leżącego na wypadkowej są sobie równe i skierowane przeciwnie.

4.3. Wypadkowa dwóch sił równoległych zgodnie skierowanych. Weźmy teraz pod uwagę przypadek, gdy do dwóch punktów ciała sztywnego przyłożone są siły równoległe P i Q (rys. 4. 5). Czy można je zastąpić jedną siłą? Żeby uprościć sobie to zagadnienie, przenieśmy siły wzdłuż prostych ich działania do punktów A i B takich, aby odcinek AB był prostopadły do kierunków tych sił. Przyłóżmy do punktów A i B dwie siły T_1 i T_2 równe sobie, umiejscowione w prostej AB i wprost sobie przeciwnie. Siły P i T_1 dadzą wypadkową V, siły Q i T_2 wypadkową W. W ten sposób zamieniliśmy siły P i Q w siły nierównoległe V i W. Przenosimy je tak, jak w poprzednim przypadku, wzdłuż linii ich działania do punktu C i z powrotem rozkładamy na poprzednie składowe. Siły T_1 i T_2 znoszą się, zaś siły P i Q dają wypadkową



Rys. 4.5. Wypadkowa sił równoległych zgodnie skierowanych

$$R = P + Q, \qquad (4.6)$$

którą możemy przesunąć do dowolnego punktu wzdłuż jej linii działania, np. do punktu D. Zatem: wypadkowa dwóch sił równoległych równa się ich sumie.

Chodzi jeszcze o wyznaczenie prostej, w której ta wypadkowa jest umiejscowiona. Ponieważ R jest nie tylko wypadkową sił P i Q, ale również sił V i W,

więc według twierdzenia w poprzednim ustępie wyprowadzonego momenty sił V i W względem punktu D, jako położonego na wypadkowej, muszą być równe:

$$V \cdot ED = W \cdot DF. \tag{4.7}$$

Iloczyn $V \cdot ED$ równa się podwójnemu polu trójkąta AVD. Trójkąt APD, który z poprzednim ma wspólną podstawę AD, ma pole tej samej wielkości, ponieważ wierzchołki obu tych trójkątów V i P leżą na równoległej do ich wspólnej podstawy AD (a zatem mają jednakowe wysokości). Możemy więc napisać, że

$$V \cdot ED = P \cdot AD \tag{4.8}$$

jako podwójne pola trójkątów AVD i APD.

W podobny sposób można udowodnić, że

$$W \cdot DF = Q \cdot DB. \tag{4.9}$$

Lewe strony równań (4.8) i (4.9) są równe, zatem i prawe muszą być równe, otrzymamy więc

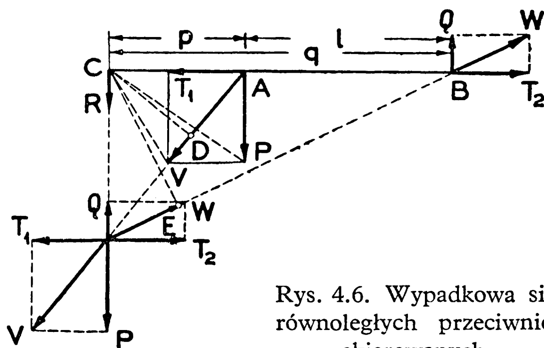
$$P \cdot AD = Q \cdot DB. \tag{4.10}$$

Oznaczając odcinek AD będący ramieniem siły P literą p, a odcinek DB, który jest ramieniem siły Q — literą q, otrzymamy równanie

$$Pp = Qq, \tag{4.11}$$

które wyraża twierdzenie, że momenty sił składowych P i Q względem punktu leżącego na wypadkowej są równe i skierowane przeciwnie.

4.4. Wypadkowa dwóch sił równoległych przeciwnie skierowanych. Ponieważ siły możemy przenosić do dowolnych punktów wzdłuż prostych ich działania, więc możemy od razu wziąć pod uwagę przypadek, gdy dwie siły P i Q są przyłożone do takich punktów A i B, że odcinek AB jest prostopadły do kierunku tych sił (rys. 4.6). Znowu przyłóżmy dwie siły T_1 i T_2 równe i wprost przeciwne do punktów A i B. Po dodaniu geometrycznym tych sił do sił P i Q otrzymujemy siły nierównoległe V i W. Przenosząc je do punktu przecięcia się ich kierunków i rozkładając z powrotem na siły P, Q oraz T_1 i T_2 otrzymamy, że wypadkowa tych sił będzie określona równaniem



Rys. 4.6. Wypadkowa sił równoległych przeciwnie skierowanych

$$R = P - Q. \tag{4.12}$$

Wypadkowa równa się więc różnicy sił P i Q. Siła R jest również wypadkową sił V i W, zatem według twierdzenia o momentach sił składowych względem punktu leżącego na wypadkowej, zważywszy, że CD jest ramieniem siły V, a CE — ramieniem siły W, będziemy mieli

$$V \cdot CD = W \cdot CE. \tag{4.13}$$

W taki sam sposób jak w poprzednim ustępie, opierając się na równoważności trójkątów ACV i ACP otrzymamy

$$P \cdot AC = V \cdot CD. \tag{4.14}$$

Oznaczając odcinek AC, tj. ramię siły P względem punktu C, przez p możemy napisać

$$Pp = V \cdot CD. \tag{4.15}$$

W taki sam sposób, oznaczając ramię siły Q względem punktu C literą q otrzymamy

$$Qq = W \cdot CE. \tag{4.16}$$

Lecz według równania (4.13) prawe strony równań (4.15) i (4.16) są równe, zatem i lewe będą równe. Otrzymamy więc równanie:

$$Pp = Qq. \tag{4.17}$$

Momenty sił składowych względem punktu leżącego na wypadkowej są sobie równe, zaś z rysunku widać, że kierunki ich są przeciwne.

Ponieważ z równania (4.12) wynika, że $P = R + Q$, to oznaczając odległość punktów przyłożenia sił P i Q literą l możemy równanie (4.17) napisać w postaci

$$(R + Q)\,p = Q\,(p + l). \tag{4.18}$$

Z tego równania otrzymujemy

$$Rp = Ql, \tag{4.19}$$

skąd

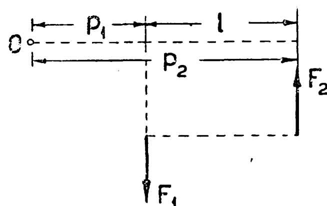
$$p = \frac{Q}{R}\,l = \frac{Q}{P-Q}\,l. \tag{4.20}$$

To ostatnie równanie będzie nam potrzebne przy rozpatrzeniu szczególnego przypadku rozważanego w następnym ustępie.

4.5. Para sił. Wyobraźmy sobie, że w poprzednio rozpatrywanym przypadku siła P maleje dążąc do wartości Q. W takim razie wypadkowa tych sił według równania (4.12) dąży do zera, zaś ramię p według równania (4.20) rośnie nieograniczenie, to znaczy, że punkt przyłożenia wypadkowej odsuwa się coraz dalej od sił składowych. Moment wypadkowej względem punktu A przyjmuje w granicy wartość nieoznaczoną $0 \cdot \infty$. Wynik ten oznacza, że dwie siły równoległe, równe i skierowane przeciwnie nie dadzą się zastąpić jedną wypadkową. Taki układ sił nazywamy parą sił. Odległość sił tworzących parę nazywamy ramieniem pary. Obliczmy sumę momentów pary sił F_1 i F_2 wzglę-

dem pewnego dowolnie obranego punktu O (rys. 4.7). Oznaczmy wspólną wartość sił F_1 i F_2 przez F. Ponieważ momenty ich są przeciwne, zatem na sumę ich momentów otrzymamy

$$F_2p_2 - F_1p_1 = F(p_1 + l) - Fp_1 = Fl. \quad (4.21)$$



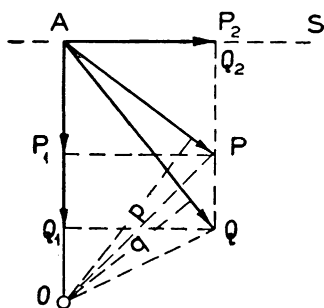
Rys. 4.7. Para sił

Otrzymaliśmy nieoczekiwany wynik, że w tym wzorze wcale nie występują odległości sił od punktu O. Zatem suma momentów pary sił względem dowolnego punktu, leżącego w ich płaszczyźnie ma stałą wartość zależną tylko od wielkości sił pary i od ich wzajemnej odległości. Nazywamy ją momentem pary. Można również udowodnić twierdzenie, że moment pary sił względem dowolnego punktu nie leżącego w płaszczyźnie pary ma tę samą wartość.

Para sił wywołuje ruch obrotowy ciała.

Można udowodnić ogólne twierdzenie, że układ dowolnej liczby sił przyłożonych do ciała sztywnego da się zawsze zastąpić jedną siłą wypadkową i jedną parą sił.

4.6. Ruch ciała sztywnego. Jeżeli przy ruchu ciała sztywnego wszystkie jego punkty doznają równych przemieszczeń, to mówimy, że ciało porusza się ruchem postępowym. Podczas ruchu postępowego odcinki łączące poszczególne punkty ciała pozostają równoległe do swoich pierwotnych kierunków. W ogóle wszelkie proste i płaszczyzny w ciele pozostają równoległe do pierwotnych kierunków.



Rys. 4.8. Siły P i Q wywołują taki sam ruch ciała umieszczonego na osi, gdy ich rzuty na możliwy kierunek ruchu punktu A (stycznego do kołowego toru) są równe

Jeżeli podczas ruchu ciała sztywnego pewna prosta w tym ciele pozostaje nieruchoma, to mówimy, że ciało jest w ruchu obrotowym około osi. Wszystkie punkty ciała opisują wtedy okręgi kół, których środki leżą na osi obrotu.

4.7. Ruch obrotowy ciała sztywnego. Weźmy pod uwagę ciało sztywne obracające się koło osi. Niech punkt O jest śladem osi na płaszczyźnie rysunku (rys. 4.8). Przypuśćmy, że do punktu A ciała jest przyłożona siła P. Zbadajmy, jakiemu warunkowi musi czynić zadość inna siła Q przyłożona do tego samego punktu, żeby mogła zastąpić siłę P, to znaczy aby ruch ciała był taki sam, jak przy działaniu siły P.

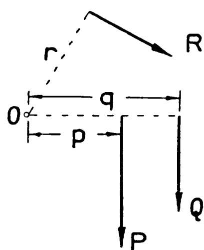
Ograniczymy się tu do sił leżących w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu, a więc leżących w płaszczyźnie rysunku. Połączmy punkt A z punktem O odcin-

kiem prostej. Rozłóżmy siłę P na dwie składowe: jedną — P_1 w kierunku AO, drugą — P_2 w kierunku do niej prostopadłym. Działać będzie jedynie składowa P_2. Składowa P_1 wywoła jedynie nacisk na oś. Tak samo możemy rozłożyć siłę Q na dwie składowe Q_1 i Q_2. Składowa Q_1 również nie wywoła żadnego skutku, zaś składowa Q_2 będzie wtedy równoważna P_2, gdy będzie jej równa. Widać więc, że siłę P można zastąpić siłą Q taką, aby rzuty obu sił na kierunek stycznej do toru punktu A były równe.

Z rysunku widać, że trójkąty AOP i AOQ mają równe pola, ponieważ mają wspólną podstawę AO, a wierzchołki ich P i Q leżą na prostej równoległej do podstawy (a więc mają równe wysokości). Napiszmy, czemu równają się pola tych trójkątów. Uważając w pierwszym trójkącie za podstawę odcinek AP, czyli wektor P, a za wysokość odcinek p będący ramieniem siły P względem punktu O leżącego na osi, zaś w drugim trójkącie biorąc za podstawę AQ, czyli wektor Q, a za wysokość odcinek q możemy napisać, że

$$Pp = Qq \tag{4.22}$$

jako podwójne pola tych dwóch trójkątów. Iloczyn Pp będzie momentem siły P względem punktu O leżącego na osi w płaszczyźnie przechodzącej przez wektor P i prostopadłej do osi. Nazywamy go wprost momentem siły P względem osi.



Rys. 4.9. Dwie siły działające na ciało osadzone na osi wywołują taki sam ruch ciała, gdy ich momenty względem osi obrotu są równe

Gdy siła przyłożona do ciała sztywnego nie leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu, wówczas możemy ją zawsze rozłożyć na składową leżącą w płaszczyźnie prostopadłej do osi oraz składową do tej osi równoległą. Oczywiście należy brać pod uwagę tylko pierwszą składową. Druga mogłaby wywołać jedynie przesunięcie ciała wzdłuż osi.

Powyżej udowodniliśmy zatem twierdzenie następujące: dwie siły wywołują taki sam ruch ciała sztywnego koło osi, gdy ich momenty względem osi obrotu są równe. Twierdzenie to jest słuszne dla jakichkolwiek dwóch sił przyłożonych do dwóch dowolnych punktów ciała sztywnego, gdyż zawsze można je przenieść wzdłuż prostych ich działania do punktu przecięcia się tych prostych. Twierdzenie to stosuje się również do dwóch sił równoległych P i Q (rys. 4.9), ponieważ można jedną z nich zastąpić przez drugą, jeżeli każdą z nich można zastąpić trzecią siłą R o innym kierunku i o takim ramieniu względem osi obrotu, że

$$Pp = Rr$$

i

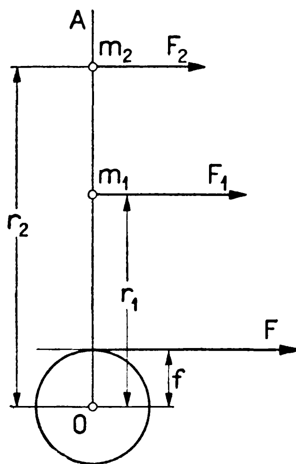
$$Qq = Rr,$$

skąd otrzymujemy

$$Pp = Qq.$$

4.8. Moment bezwładności punktu materialnego. Wyobraźmy sobie pręt sztywny OA pozbawiony masy obracający się koło osi O (rys. 4. 10). Na pręt działa siła F o stałym momencie Ff. Możemy np. ciągnąć ze stałą siłą sznurek nawinięty na kółko. Umieśćmy najpierw na pręcie masę m_1 w odległości r_1 od osi, a następnie masę m_2 w odległości r_2 i zastanówmy się, jak trzeba dobrać odległości r_1 i r_2, aby kolejno masy te przy działaniu tego samego momentu $M = Ff$ nabyły równych p r z y ś p i e s z e ń k ą t o w y c h.

Będziemy nazywali masy dwóch punktów równoważnymi ze względu na obrót dokoła osi, gdy przy działaniu siły o tym samym momencie względem tej osi nabywają równych przyśpieszeń kątowych.



Rys. 4.10. Dwie masy umieszczone w różnych odległościach od osi obrotu są równoważne, gdy iloczyny mas przez kwadraty ich odległości od osi są równe

Siłę F możemy zastąpić siłą F_1 przyłożoną bezpośrednio do punktu o masie m_1, byleby siła ta miała taki sam moment względem osi, jak siła F:

$$Ff = F_1 r_1. \tag{4.23}$$

Po umieszczeniu na pręcie masy m_2 możemy podobnie siłę F zastąpić siłą F_2 przyłożoną do punktu m_2, byleby znowu ich momenty względem osi były równe:

$$Ff = F_2 r_2. \tag{4.24}$$

Siła F_1 przyłożona do punktu m_1 nada mu według drugiej zasady dynamiki przyśpieszenie określone wzorem

$$F_1 = m_1 a_1. \tag{4.25}$$

Podobnie siła F_2 nada punktowi m_2 przyśpieszenie chwilowe określone równaniem

$$F_2 = m_2 a_2. \tag{4.26}$$

Lecz przyśpieszenia liniowe styczne związane są z przyśpieszeniami kątowymi za pomocą równań

$$a_1 = r_1 \varepsilon, \qquad a_2 = r_2 \varepsilon. \tag{4.27}$$

Wartość przyśpieszenia kątowego ε ma być w obu przypadkach ta sama. Z równań (4.25), (4. 26) i (4.27) otrzymamy więc

$$F_1 = m_1 r_1 \varepsilon, \tag{4.28}$$

$$F_2 = m_2 r_2 \varepsilon. \tag{4.29}$$

Lecz z równań (4.23) i (4.24) wynika, że

$$F_1 r_1 = F_2 r_2. \tag{4.30}$$

Podstawiając do tego ostatniego równania wartości (4.28) i (4.29) na F_1 i F_2 otrzymamy

$$m_1 r_1^2 \varepsilon = m_2 r_2^2 \varepsilon, \tag{4.31}$$

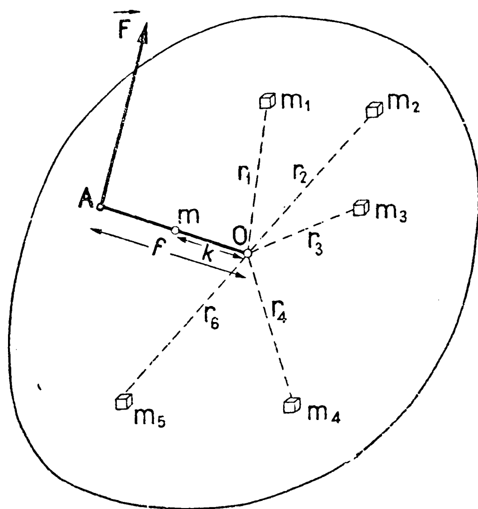
skąd po skróceniu przez ε otrzymamy

$$m_1 r_1^2 = m_2 r_2^2. \tag{4.32}$$

Taki zatem jest warunek, aby dwie różne masy m_1 i m_2 umieszczone w różnych odległościach od osi obrotu uzyskiwały pod działaniem sił o równych momentach równe przyśpieszenia kątowe: iloczyny mas przez kwadraty odległości od osi obrotu muszą być równe.

Iloczyn masy punktu przez kwadrat jego odległości od osi obrotu nazywamy momentem bezwładności. A więc możemy powiedzieć, że punkty o różnych masach uzyskują pod działaniem sił o równych momentach równe przyśpieszenia kątowe, gdy ich momenty bezwładności są równe.

4.9. Moment bezwładności ciała sztywnego. Weźmy teraz pod uwagę ciało sztywne osadzone na osi O i mogące się na niej obracać bez tarcia. Ciało sztywne obraca się jako całość. Wszystkie jego punkty mają tę samą prędkość kątową i to samo przyśpieszenie kątowe. Niech na to ciało działają siły P, Q... Jak będzie się poruszać to ciało i od czego ruch ten będzie zależał?



Rys. 4.11. Moment bezwładności ciała sztywnego

Wiemy już, że siły P, Q... możemy zastąpić innymi siłami przyłożonymi do jakiegokolwiek punktu ciała sztywnego, byleby one miały takie same momenty względem osi obrotu, jak siły P, Q itd. Zastąpmy więc wszystkie te siły siłami przyłożonymi do jednego punktu. Możemy wówczas znaleźć ich wypadkową. Niech to będzie wypadkowa F o momencie $M = Ff$ (rys. 4.11). Podzielmy teraz całe ciało na bardzo małe elementy o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$, znajdujące się odpowiednio w odległościach $r_1, r_2, \ldots, r_n$ od osi obrotu. Element m_1 możemy zastąpić przez punkt o masie μ_1 umieszczony w punkcie A pod warunkiem, aby ich momenty bezwładności były równe, a więc

$$\left.\begin{aligned} m_1 r_1^2 &= \mu_1 f^2 \\ \text{podobnie } m_2 r_2^2 &= \mu_2 f^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \\ m_n r_n^2 &= \mu_n f^2 \end{aligned}\right\} \tag{4.33}$$

W ten sposób wszystkie elementy, a więc całe ciało zastąpiliśmy masą

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n .$$

Dodając równania (4.33) stronami otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f^2 = \mu f^2.$$

Zatem całe ciało da się zastąpić przez punkt o masie μ umieszczony w punkcie A pod warunkiem, że

$$\mu f^2 = \sum_i m_i r_i^2 . \tag{4.34}$$

Masa ta uzyska takie samo przyśpieszenie kątowe jak dane ciało pod działaniem siły o tym samym momencie względem osi obrotu. Do punktu A o masie μ jest przyłożona siła F. Ponieważ działa ona w kierunku, w którym punkt ten może się poruszać swobodnie, zatem według II zasady Newtona możemy napisać

$$F = \mu a .$$

Przyśpieszenie a jest przyśpieszeniem liniowym stycznym (w torze kołowym). Zatem $a = f\varepsilon$, gdzie ε jest przyśpieszeniem kątowym. Możemy więc napisać

$$F = \mu f \varepsilon.$$

Mnożąc obie strony tego równania przez f otrzymamy

$$Ff = \mu f^2 \varepsilon. \tag{4.35}$$

Lecz

$$\mu f^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Sumę $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ nazywamy momentem bezwładności ciała. Oznaczając go przez I otrzymamy

$$Ff = I\varepsilon,$$

czyli

$$\boxed{M = I\varepsilon.} \tag{4.36}$$

Zatem całe ciało, którego cząstki muszą mieć oczywiście tę samą prędkość kątową, da się zastąpić przez masę

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2} \tag{4.37}$$

umieszczoną w odległości f od osi obrotu. Masa ta uzyska takie samo przyśpieszenie kątowe jak dane ciało pod działaniem siły o tym samym momencie

obrotowym względem osi. Wyrażenie (4.37) nazywamy momentem bezwładności ciała sztywnego względem danej osi obrotu.

Jak powiedzieliśmy poprzednio, całe ciało da się zastąpić punktem o masie dowolnej μ umieszczonej w takiej odległości f od osi obrotu, aby

$$\mu f^2 = I,$$

gdzie μ równało się $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$, sumie mas, którymi zastąpiliśmy masy m_i poszczególnych elementów ciała. Dobierzmy teraz tak odległość $f = k$ tego punktu, aby $\sum \mu_i = m$, całkowitej masie danej bryły. Moment bezwładności tego punktu będzie

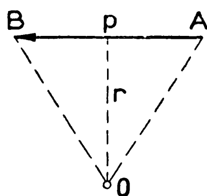
$$I = mk^2. \tag{4.38}$$

Ta odległość k od osi, w której masa całego ciała skupiona miałaby moment bezwładności równy momentowi bezwładności tego ciała nazywa się *ramieniem bezwładności*.

4.10. Moment pędu albo kręt. Niech punkt materialny o masie m porusza się z prędkością $\vec{v}$. Wektor $\vec{p} = m\vec{v}$ nazwaliśmy pędem punktu A (patrz ust. 3.15). Przy ruchu obrotowym ważną rolę odgrywa wielkość, którą teraz wprowadzimy, a którą nazywamy momentem pędu albo krętem.

Weźmy pod uwagę stały punkt O i opuśćmy z punktu O prostopadłą na kierunek wektora $\vec{p}$. Długość tego odcinka oznaczmy przez r (rys. 4.11). Momentem pędu albo krętem $\vec{K}$ punktu A względem punktu O będziemy nazywać wektor, który wyobrażamy sobie w punkcie O, a którego wartość liczbowa równa się iloczynowi wartości liczbowej pędu przez długość odcinka r:

$$|K| = |p||r| = m|v||r|. \tag{4.39}$$



Rys. 4.12. Moment pędu albo kręt punktu o masie m

Kierunek wektora $\vec{K}$ jest prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez $\vec{p}$ i punkt O.

Możemy również mówić o kręcie punktu materialnego względem osi, lecz wtedy należy wziąć rzut pędu na płaszczyznę P prostopadłą do osi. Krętem będzie wtedy wektor zgodny z kierunkiem osi o wartości liczbowej równej iloczynowi rzutu pędu $\vec{p}$ na płaszczyznę P przez odległość tego rzutu od osi. Wektorowi $\vec{K}$ nadajemy zawsze zwrot zgodny z ruchem posuwania się prawej śruby, gdy jej obrót jest zgodny z obrotem punktu A około punktu O (a więc na rys. 4.12 ponad płaszczyznę rysunku). Wartość liczbowa krętu, jak wynika ze wzoru (4.38), równa się podwójnemu polu trójkąta ABO.

Krętem układu punktów lub ciała sztywnego względem osi będzie suma algebraiczna krętów poszczególnych punktów względem tej osi:

$$K = p_1 r_1 + p_2 r_2 + \ldots + p_n r_n = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 + \ldots + m_n v_n r_n . \quad (4.40)$$

Dla ciała sztywnego możemy otrzymać prostsze wyrażenie na kręt postępując w sposób następujący: dzielimy w myśli ciało na elementy o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$ znajdujące się odpowiednio w odległościach $r_1, r_2, \ldots, r_n$ od osi obrotu. Ponieważ wszystkie elementy ciała sztywnego przy jego obrocie dokoła osi mają tę samą prędkość kątową

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \ldots = \frac{v_n}{r_n}, \quad (4.41)$$

więc zastępując w równaniu (4.40) prędkości liniowe iloczynami prędkości kątowej przez odległości ich od osi obrotu otrzymanymi z równań (4.41) otrzymamy na kręt ciała sztywnego wyrażenie

$$K = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + \ldots + m_n r_n^2 \omega = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega .$$

Lecz

$$\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = I$$

jest momentem bezwładności ciała sztywnego. Zatem kręt ciała sztywnego

$$\boxed{K = I \omega} \quad (4.42)$$

równa się iloczynowi momentu bezwładności tego ciała przez jego prędkość kątową.

4.11. Zmiana krętu pod wpływem działania sił. Gdy punkt materialny porusza się na mocy bezwładności, jego prędkość, a więc i pęd są stałe co do wartości i kierunku. Odległość wektora $\vec{p}$ od dowolnie obranego punktu lub osi O też się nie zmienia, kręt równy iloczynowi pr ma wartość stałą. Gdy jednak na punkt ten zacznie działać siła, tak pęd, jak i odległość kierunku ruchu od osi O w ogólności zacznie ulegać zmianie. Chodzi teraz o znalezienie związku między zmianą krętu i siłami działającymi na punkt względnie na poszczególne punkty układu.

Weźmy pod uwagę punkt A o masie m poruszający się z prędkością v (rys. 4.13). Posiada on zatem pęd:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \overrightarrow{AB}.$$

Jego kręt względem osi O przechodzącej przez punkt O prostopadle do płaszczyzny Q równa się liczbowo podwójnemu polu trójkąta ABO

$$K = p \cdot OD. \quad (4.43)$$

W pewnej chwili na punkt A zaczyna działać siła F o momencie

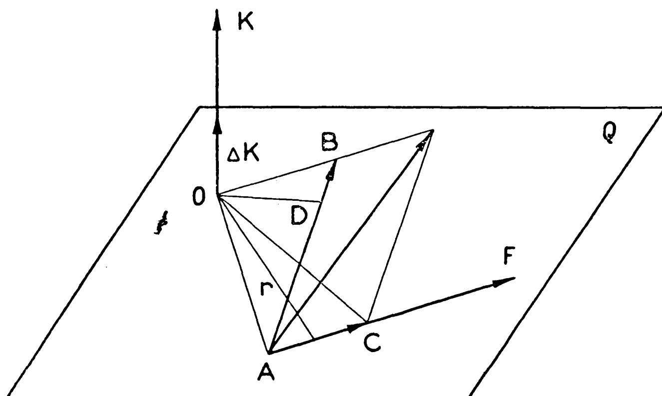
$$M = Fr \tag{4.44}$$

względem osi O. W przeciągu bardzo krótkiego czasu Δt siła ta nada punktowi A w swoim kierunku dodatkowy pęd $\vec{\Delta p} = \overrightarrow{AC}$. Przyrost krętu będzie się równał podwójnemu polu trójkąta AOC. Według II zasady dynamiki przyrost pędu równa się popędowi siły (p. 3. 15). Zatem

$$\Delta p = F\,\Delta t. \tag{4.45}$$

Mnożąc obie strony równania (4. 45) przez ramię r siły F względem osi O otrzymamy

$$r\,\Delta p = F\,r\,\Delta t = M\,\Delta t. \tag{4.46}$$



Rys. 4.13. Przyrost krętu punktu pod działaniem siły o momencie M

Δp jest przyrostem pędu w kierunku działania siły F. Iloczyn $r\,\Delta p$ będzie przyrostem krętu ΔK punktu A względem osi O:

$$r\,\Delta p = \Delta K. \tag{4.47}$$

Zatem równanie (4.46) możemy napisać w postaci

$$\boxed{\Delta K = M\,\Delta t,} \tag{4.48}$$

skąd

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = M. \tag{4.49}$$

Gdy Δt dąży do zera, $\frac{\Delta K}{\Delta t}$ dąży do wartości pochodnej $\frac{dK}{dt}$.

W granicy otrzymamy zatem równanie

$$\boxed{\frac{dK}{dt} = M.} \tag{4.50}$$

Równanie to wyrażające fakt, że szybkość zmiany krętu równa się momentowi działającej siły, jest analogiczne do równania

$$\frac{dp}{dt} = F$$

wyrażającego, że szybkość zmiany pędu równa się działającej sile (II zasada Newtona).

Jeżeli na dany punkt działa układ kilku sił o momentach $M_1, M_2, \ldots, M_k$, wówczas zamiast równania (4.48) możemy napisać równanie ogólniejsze:

$$\Delta K = (M_1 + M_2 + \ldots + M_k)\Delta t = \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta t. \tag{4.51}$$

Weźmy teraz pod uwagę układ punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \ldots$ o prędkościach odpowiednio $v_1, v_2, \ldots$, na które w ogólności działają siły. Przypuśćmy dla prostoty, że punkty te poruszają się w płaszczyznach prostopadłych do pewnej stałej prostej, czyli osi OO. Oznaczając momenty sił działających na poszczególne punkty względem osi OO literami z dwoma wskaźnikami u dołu, przy czym pierwszy wskaźnik oznacza numer punktu, a drugi — numer momentu, możemy napisać układ równań:

$$\Delta K_1 = (M_{11} + M_{12} + \ldots + M_{1k})\,\Delta t,$$

$$\Delta K_2 = (M_{21} + M_{22} + \ldots + M_{2l})\,\Delta t.$$

. . . .

Dodając stronami te równania otrzymamy

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 + \ldots + \Delta K_n = \sum_i \sum_k M_{ik}\,\Delta t.$$

Między siłami działającymi na poszczególne punkty będziemy mieli, jak zawsze, siły wewnętrzne i zewnętrzne. Siły wewnętrzne według trzeciej zasady Newtona są parami równe i przeciwnie skierowane. Ich momenty w sumie po prawej stronie tego równania znoszą się. Pozostają tylko siły zewnętrzne. Sumę przyrostów po lewej stronie możemy zastąpić przyrostem sumy. Otrzymamy wtedy

$$\Delta(K_1 + K_2 \ldots) = \sum M_z\,\Delta t, \tag{4.52}$$

gdzie M_z są momentami sił zewnętrznych.

W przypadku ciała sztywnego lub też układu punktów o jednakowej prędkości kątowej suma krętów wszystkich punktów względem osi obrotu jest równa

$$I\omega$$

(patrz. 4.10). W tym przypadku zatem otrzymamy równanie

$$\Delta(I\omega) = \sum M_z\,\Delta t. \tag{4.53}$$

Ponieważ moment bezwładności I ciała sztywnego jest stały, zatem dla ciała sztywnego możemy napisać

$$I\Delta\omega = \Delta t \sum M_z, \tag{4.54}$$

skąd

$$I\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \sum M_z.$$

W granicy, gdy $t \to 0$ stosunek $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ dąży do pochodnej $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ (przyśpieszenie kątowe). Otrzymujemy więc równanie

$$I\varepsilon = \sum M_z. \tag{4.55}$$

Równanie analogiczne do równania wyrażającego II zasadę Newtona ma postać:

$$ma = \sum F.$$

Przy ruchu obrotowym zatem moment bezwładności odgrywa rolę masy, przyśpieszenie kątowe — rolę przyśpieszenia liniowego, moment siły — rolę siły.

W przypadku działania jednej siły możemy napisać

$$\boxed{I\varepsilon = M.} \tag{4.56}$$

Równanie analogiczne

$$ma = F.$$

4.12. Zasada zachowania krętu. Gdy sił zewnętrznych nie ma lub też suma algebraiczna momentów działających sił równa się zeru (w najogólniejszym wypadku suma geometryczna momentów), otrzymujemy równanie

$$\Delta(K_1 + K_2 + \ldots + K_n) = 0. \tag{4.57}$$

Zatem wtedy

$$K_1 + K_2 + \ldots + K_n = \text{const.} \tag{4.58}$$

Dla układu punktów poruszających się z jednakową prędkością kątową lub też dla ciała sztywnego otrzymamy z równania (4.53) równanie

$$\Delta(I\omega) = 0, \tag{4.59}$$

skąd

$$I\omega = \text{const.} \tag{4.60}$$

Równania (4.58) i (4.60) wyrażają ważną zasadę w fizyce zwaną zasadą zachowania krętu: jeżeli suma momentów sił zewnętrznych względem osi równa się zeru, to suma algebraiczna krętów poszczególnych części układu zachowuje wartość stałą.

Dla ciała sztywnego, ponieważ w tym przypadku moment bezwładności I jest stały, z równania (4.60) otrzymamy wniosek

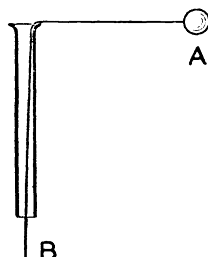
$$\omega = \text{const.} \tag{4.61}$$

Gdy suma algebraiczna momentów sił zewnętrznych względem osi równa się zeru, ciało zachowuje stałą prędkość kątową. Jest to prawo analogiczne do prawa bezwładności. Gdyby ciało sztywne mogło się obracać na osi bez tarcia, obracałoby się wiecznie ruchem jednostajnym. Istotnie koło rowerowe rozpędzone obraca się bardzo długo, ponieważ siły tarcia koła o oś są bardzo niewielkie dzięki łożyskom kulkowym. Kula ziemska, jak wiemy, obraca się około osi już wiele milionów lat z niemal zupełnie stałą prędkością kątową, ponieważ suma momentów sił zewnętrznych jest znikomo mała.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę taki układ, w którym prędkości kątowe części są jednakowe, lecz moment bezwładności może się zmieniać, to dla takiego układu musi się spełniać równanie (4.60), tj.

$$I\omega = \text{const}.$$

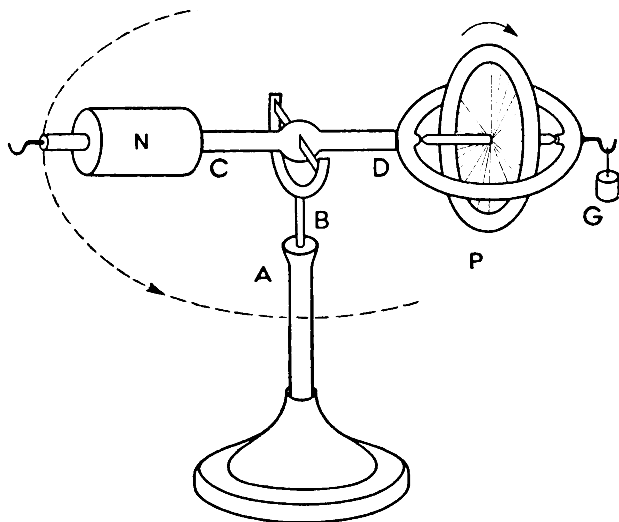
Jeżeli więc zmienia się moment bezwładności, to i prędkość kątowa musi się zmieniać. Jak wskazuje to równanie, prędkość kątowa jest odwrotnie proporcjonalna do momentu bezwładności. Przy zmniejszeniu się momentu bezwładności prędkość kątowa wzrasta, przy powiększaniu się zaś — maleje. Łatwo zilustrować to prawo doświadczeniami. Przeciągnijmy przez rurkę szklaną sznurek (rys. 4.14), na końcu którego jest uwiązany ciężarek A. Wprawmy go w ruch obrotowy. Gdy teraz zaczniemy ciągnąć za koniec sznurka B zmniejszając tym moment bezwładności ciężarka, stwierdzimy znaczne powiększenie się prędkości kątowej. Znane jest doświadczenie następujące: na stołku umieszczonym na lekko obracającym się pomoście siada człowiek ująwszy w wyprostowane na boki ręce parokilogramowe ciężarki. Wprawiamy go w powolny ruch obrotowy. Prędkość tego obrotu może on zmieniać znacznie przyciągając ku sobie ciężarki przez zgięcie rąk lub oddalając je od siebie przez wyprostowanie rąk. Częsty użytek z tej zasady robią łyżwiarze przy tzw. piruetach wykonywając je przez wprawienie swego ciała w ruch obrotowy. Zmniejszając swój moment bezwładności przez przejście np. od pozycji kucznej w stojącą i przyciągając ręce ku sobie mogą znacznie powiększyć swą prędkość kątową.



Rys. 4.14. Zmiana prędkości kątowej przy zmianie momentu bezwładności

4.13. Ruch precesyjny. W paragrafie 4.11 rozpatrywaliśmy zmianę krętu pod wpływem siły, której moment miał ten sam kierunek, co kręt. Wówczas zmienia się wartość liczbowa krętu bez zmiany jego kierunku. Jeżeli jednak siła zewnętrzna usiłuje obrócić ciało około osi inaczej skierowanej niż jego kręt, wówczas i kierunek krętu ulega zmianie. Ruch, wywołany w tym przypadku nazywamy ruchem precesyjnym. Najłatwiej obserwować go można na ważce giroskopowej (rys. 4.15). Na podstawce w pionowo stojącym łożysku A umieszczony jest pręt metalowy

B mogący się swobodnie obracać, zakończony widełkami. Na osi poziomej umieszczonej w widełkach obraca się pręt metalowy *CD*. Na jednym jego końcu umieszczony jest ciężki krążek metalowy *P* (giroskop) obracający się lekko około osi umieszczonej w panewkach stożkowych. Można go wprawić w szybki ruch obrotowy za pomocą kawałka sznurka. Na drugim końcu pręta *CD* znajduje się ciężarek *N* równoważący ciężar krążka *P*. Na końcach poziomego pręta znajdują się haczyki, na których można zawieszać ciężarki. Zrównoważmy ważkę tak, aby była w równowadze w pozycji poziomej i rozpędźmy krążek *P* tak, aby wirował bardzo szybko. Dopóki krążek jest zrównoważony znajdującym się po przeciwnej stronie ciężarkiem, kręt jego, zgodnie z zasadą zachowania krętu, nie będzie się zmieniał. Jeżeli jednak na haczyku zawiesimy mały ciężarek *G*, będzie on wywierał siłę zewnętrzną usiłującą obrócić pręt *CD* około osi poziomej. Moment *M* tej siły w czasie Δt wytworzy w swym kierunku, a więc prostopadłym do krętu *K*, kręt ΔK:



Rys. 4.15. Ważka giroskopowa

$$\Delta K = M \Delta t.$$

Dodając się geometrycznie do krętu pierwotnego *K* wytworzy wypadkowy kręt *K'* również w płaszczyźnie poziomej (rys. 4.16) tworzący z kierunkiem poprzedniego krętu kąt $\Delta\alpha$. Oś krążka zatem i pręt *CD* obróci się o kąt $\Delta\alpha$. Ponieważ siła *G* działa stale, wskutek tego oś ważki giroskopowej będzie się stale obracać w płaszczyźnie poziomej ruchem jednostajnym. Ruch taki nazywamy ruchem precesyjnym albo wprost precesją. Wartość krętu obracającego się krążka jest

$$K = I\omega,$$

zatem w czasie Δt zakreślony kąt $\Delta\alpha$ będzie w przybliżeniu wyrażony wzorem ($\Delta\alpha \approx \operatorname{tg} \Delta\alpha$):

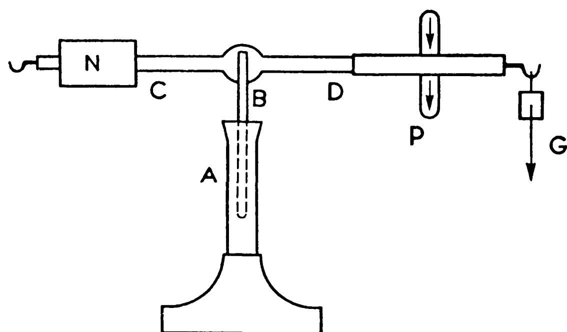
$$\Delta\alpha = \frac{\Delta K}{K} = \frac{M \Delta t}{I\omega}.$$

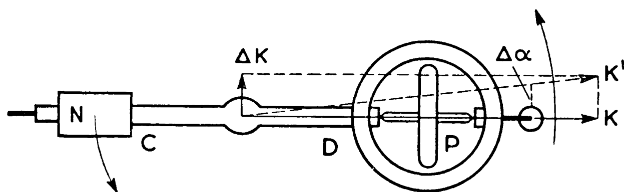
Prędkość kątowa precesji będzie zatem dana wzorem

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{M}{I\omega}.$$

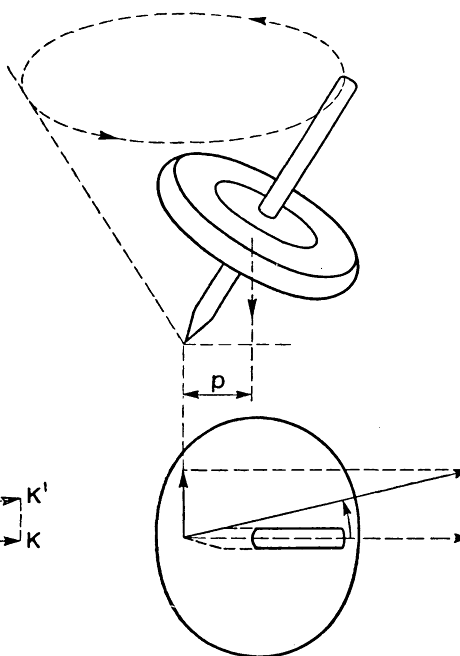
Jeżeli ciężarek G powiesimy na przeciwnym końcu ważki, kierunek precesji zmienia się na przeciwny.

Podobne zjawisko występuje przy wirowaniu bąka (na ostrej osi), gdy oś jego jest odchylona od pozycji pionowej (rys. 4.17). Wówczas jego ciężar G odgrywa rolę ciężarka w poprzednim przypadku. Ciężar mając moment Gp wywołuje dodat-





Rys. 4.16. Precesja ważki giroskopowej wskutek działania ciężarka G



Rys. 4.17. Precesja wirującego bąka. Oś bąka zakreśla pobocznicę stożka

kowy kręt około osi poziomej, dodając się do krętu, jaki bąk posiadał poprzednio. Oś wskutek tego zmienia kierunek zakreślając powierzchnię stożkową.

4.14. Energia kinetyczna ciała sztywnego obracającego się dokoła osi. Energia kinetyczna ciała obracającego się dokoła osi równa się oczywiście sumie energii kinetycznych jego cząstek. Rozłóżmy w myśli ciało na elementy o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Niech ich odległości od osi obrotu będą odpowiednio $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Na energię kinetyczną ciała otrzymamy wzór

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_n v_n^2}{2}. \tag{4.62}$$

Lecz między prędkościami liniowymi cząstek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ a ich prędkościami kątowymi mamy związki:

$$v_1 = r_1\,\omega, \quad v_2 = r_2\,\omega, \quad \ldots, \quad v_n = r_n\,\omega, \tag{4.63}$$

gdzie ω jest wspólną dla wszystkich cząstek prędkością kątową. Podstawiając te wartości na prędkości do równania (4.62) otrzymamy

$$E_k = \frac{m_1 r_1^2 \omega^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2 \omega^2}{2} + \ldots + \frac{m_n r_n^2 \omega^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 .$$

Zatem otrzymujemy ostatecznie na energię ciała sztywnego obracającego się dokoła osi wzór

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 .} \tag{4.64}$$

Wszystkie silniki tak parowe jak i spalinowe posiadają zawsze koła zamachowe. Wprawione w szybki ruch obrotowy dzięki swej energii kinetycznej podtrzymują ruch silnika w tych okresach czasu, gdy siły pędzące silnik nie działają. W silniku benzynowym czterosuwnym po jednym ruchu tłoka spowodowanym przez wybuch pary benzyny trzy następne ruchy wykonywa tłok popędzany przez koło zamachowe dzięki jego znacznej energii kinetycznej. Bez koła zamachowego ciągły ruch silników tłokowych byłby niemożliwy.

4.15. Zestawienie wielkości występujących przy ruchu postępowym i odpowiadających im wielkości dla ruchu obrotowego.

Ruch postępowy	Jednostki	Ruch obrotowy	Jednostki
przemieszczenie s	cm	kąt α	cm^0
prędkość liniowa $v = \frac{ds}{dt}$	$cm \cdot sec^{-1}$	prędkość kątowa $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$	sec^{-1}
przyśpieszenie $a = \frac{dv}{dt}$	$cm \cdot sec^{-2}$	przyśpieszenie kątowe $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$	sec^{-2}
masa m	g	moment bezwładności $I = \Sigma m r^2$	$g \cdot cm^2$
siła $F = ma = \frac{dp}{dt}$	$g \cdot cm \cdot sec^{-2}$(dyna)	moment siły $M = Ff = I\varepsilon = \frac{dK}{dt}$	$g \cdot cm^2 \cdot sec^{-2}$
pęd $p = mv$	$g \cdot cm \cdot sec^{-1}$	kręt (moment pędu $K = mvr = I\omega$	$g \cdot cm^2 \cdot sec^{-1}$
energia kinetyczna $E_k = \frac{mv^2}{2}$	$g \cdot cm^2 \cdot sec^{-2}$(erg)	energia kinetyczna $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$	$g \cdot cm^2 \cdot sec^{-2}$

Jak widać z powyższego zestawienia, zamiast masy m, która występuje we wzorach na ruch postępowy, we wzorach na ruch obrotowy występuje moment bezwładności, zamiast prędkości i przyśpieszenia — prędkość i przyśpieszenie kątowe, zamiast siły — moment siły, zamiast pędu — kręt.

4.16. Równowaga ciała sztywnego. Jak już wspomniano w ust. 4.5, układ dowolnej liczby sił przyłożonych do ciała sztywnego da się zawsze sprowadzić do jednej wypadkowej i do pary. Warunkiem koniecznym równowagi jest, aby ta wypadkowa równała się zeru i aby moment pary wypadkowej równał się również zeru.

Gdy ciało jest umieszczone na osi, równowaga może być zachowana nawet i wtedy, gdy wypadkowa nie równa się zeru. Wystarczy, jeżeli wypadkowa przechodzi przez oś, gdyż wtedy zniesie się z oporem osi.

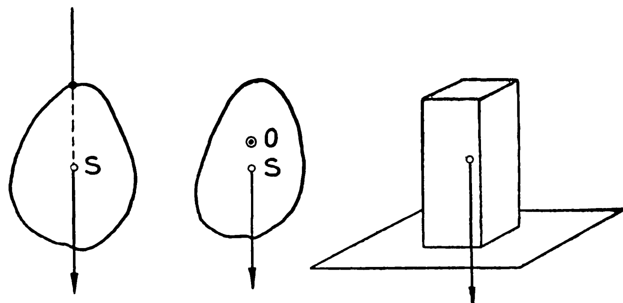
W przypadku, gdy na ciało działają dwie siły P i Q umiejscowione w płaszczyźnie prostopadłej do osi, warunek równowagi wynika natychmiast z rozważań w ust. 4.2. Będzie on mianowicie następujący: momenty sił P i Q względem osi muszą mieć równe wartości, skierowane natomiast muszą być przeciwnie, wtedy bowiem ich wypadkowa będzie przechodziła przez oś. Zatem suma algebraiczna ich momentów musi się równać zeru. Twierdzenie to można udowodnić dla dowolnej liczby sił.

4.17. Środek ciężkości. Równowaga ciała ciężkiego. Na każdą cząstkę ciała sztywnego działa siła przyciągania ziemskiego skierowana pionowo w dół. Na całe ciało, które zawsze możemy uważać za złożone z wielkiej ilości małych elementów, działa układ sił równoległych o wartościach proporcjonalnych do ich mas. Gdyby jakieś ciało składało się tylko z dwóch cząstek o masach m_1 i m_2, to wypadkowa ich ciężarów G_1 i G_2 byłaby umiejscowiona w prostej pionowej przechodzącej przez punkt dzielący odległość tych cząstek w stosunku odwrotnym do ich ciężarów, a więc i do ich mas. Wypadkowa ta przechodzi zatem przez środek masy tych dwóch punktów. Dwie siły równoległe G_1 i G_2 możemy zawsze zastąpić wypadkową równą ich sumie G. Dołączając do dwóch poprzednich trzeci element łatwo znajdujemy, że wypadkowa sił G oraz ciężaru trzeciej cząstki G_3 będzie równa ich sumie i będzie przechodzić przez środek masy tych trzech cząstek. Postępując tak dalej znajdziemy, że wypadkowa ciężarów części jakiegokolwiek ciała przechodzi przez jego środek masy. Jeżeli siły te zmieniają kierunek względem ciała np. wskutek jego obrotu, to i kierunek wypadkowej zmieni się oczywiście, lecz w dalszym ciągu będzie ona przechodziła przez środek masy. Punkt przyłożenia tej wypadkowej nazywa się środkiem ciężkości. Jest on identyczny ze środkiem masy.

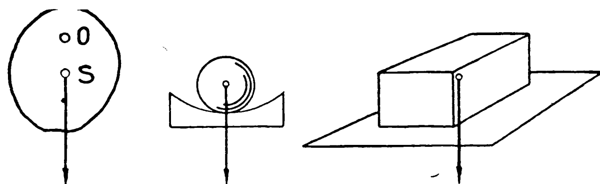
Ciało ciężkie podlega oczywiście ogólnym warunkom równowagi ciała sztywnego. Ponieważ ciężary wszystkich cząstek ciała dadzą się zastąpić przez jedną wypadkową zwaną ciężarem tego ciała i przechodzącą przez jego środek ciężkości S (rys. 4.18), więc aby to ciało było w równowadze, konieczne jest przyłożenie do ciała siły równoważącej ciężar tego ciała.

W tym celu możemy np. zawiesić ciało na sznurku; wtedy napięty sznurek wywiera tę siłę. Możemy również postawić ciało na podstawie lub zawiesić na osi O (rys. 4.18).

Równowagę ciała nazywamy *stałą*, gdy przy pewnym odchyleniu z położenia równowagi ciało wskutek sił, które na nie działają, wraca z powrotem do pierwotnego położenia równowagi. Przykłady podaje rys. 4.19. *Równowagę* nazywamy *obojętną*, gdy dane położenie równowagi sąsiaduje z innymi położeniami równowagi (rys. 4.20), tak że ciało wyprowadzone z danego położenia znajduje się w innym położeniu również w równowadze. Tak jest np., gdy oś O przechodzi przez środek ciężkości S, lub też gdy kula albo walec leży na poziomej podstawie.



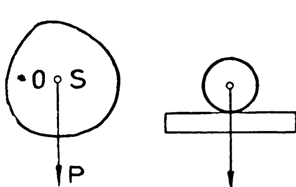
Rys. 4.18. Przykłady równowagi ciał



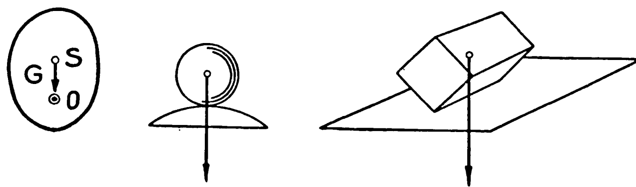
Rys. 4.19. Przykłady równowagi stałej

Wreszcie *równowagę* nazywamy *nietrwałą*, gdy choćby najmniejsze odchylenie ciała z danego położenia powoduje dalszą zmianę w położeniu tego ciała aż do chwili zajęcia nowego, często oddalonego, położenia równowagi (rys. 4.21). W położeniu równowagi nietrwałej wprawdzie siły się równoważą, lecz praktycznie taka równowaga utrzymać się nie da.

Ponieważ przy wznoszeniu się do góry środka ciężkości energia potencjalna ciała wzrasta, więc łatwo z przytoczonych na rysunkach przykładów wywnio-



Rys. 4.20. Przykłady równowagi obojętnej



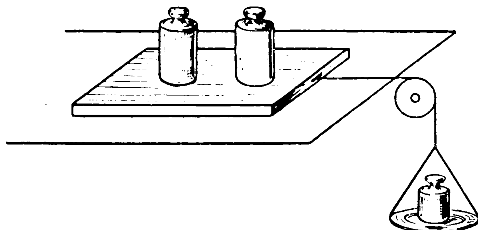
Rys. 4.21. Przykłady równowagi nietrwałej

skować, że równowaga jest trwała, gdy energia potencjalna ciała jest mniejsza w położeniu równowagi niż we wszystkich położeniach sąsiednich (minimum energii), równowaga jest obojętna, gdy w sąsiednich położeniach ciało ma taką samą energię potencjalną, wreszcie równowaga jest nietrwała, gdy w sąsiednich położeniach ciało ma mniejszą energię potencjalną (maksimum energii). Mogli-

byśmy powiedzieć, że ciało zawsze dąży do zajęcia położenia, w którym jego energia potencjalna jest najmniejsza.

4.18. Przeszkody ruchu. Tarcie. Według zasad dynamiki, gdy do jakiegokolwiek ciała jest przyłożona siła, ruch jest przyśpieszony. Tymczasem w naszych ziemskich warunkach obserwujemy na każdym kroku przypadki, gdy na ciała działają siły, a mimo to ruch jest jednostajny. Tak jest np., gdy konie ciągną wóz, gdy jedzie auto poruszane silnikiem, gdy jedzie pociąg poruszany przez lokomotywę. Przyczyną tego jest występowanie stale przy ruchu sił tarcia oraz oporu środowiska. Siły te zawsze przeciwdziałają ruchowi i sprawiają, że w większości wypadków obserwujemy w naturze ruchy w przybliżeniu jednostajne.

a. T a r c i e p o ś l i z g o we. Aby przesunąć ciało np. po stole, trzeba użyć siły tym większej, im większy jest ciężar tego ciała. Weźmy deseczkę prostokątną, przymocujmy do niej sznurek przerzucony przez blok (rys. 4.22). Na drugim jego końcu zawieśmy szalkę. Obciążmy deseczkę ciężarkami, a następnie obciążajmy stopniowo coraz więcej szalkę. Przy odpowiednim obciążeniu szalki deseczka poruszy się, po czym zacznie poruszać się ruchem przyśpieszonym. Aby utrzymać ruch jednostajny, należałoby zmniejszyć obciążenie szalki, gdy tylko deseczka się poruszy. Fakt ten stwierdza, że aby ciało poruszyć, trzeba większej siły, niż żeby je następnie utrzymać w ruchu jednostajnym. Różnicę można wyznaczyć zmniejszając odpowiednio obciążenie szalki, tak aby ciało po popchnięciu poruszało się ruchem jednostajnym.



Rys. 4.22. Ciało zaczyna się poruszać dopiero wtedy, gdy siła zewnętrzna przezwycięży siłę tarcia

Doświadczenia wykazały, że siła T równa i przeciwna sile podtrzymującej ruch jednostajny, zwana siłą tarcia albo wprost tarciem, jest proporcjonalna do siły przyciskającej ciało do podstawy F. Siła T_0 potrzebna do poruszenia ciała znajdującego się w spoczynku (ze znikomym przyśpieszeniem) jest również proporcjonalna do siły przyciskającej ciało do podstawy. W pierwszym przypadku możemy zatem napisać

$$T = fF, \tag{4.65}$$

w drugim

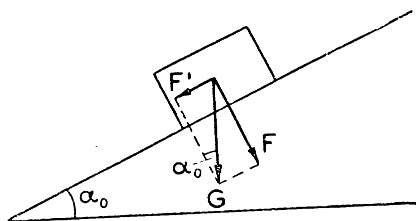
$$T_0 = f_0 F. \tag{4.66}$$

Współczynniki f i f_0 występujące w tych równościach nazywamy współczynnikami tarcia. f_0 nosi nazwę współczynnika tarcia spoczynkowego, statycznego. Współczynnik f moglibyśmy nazwać kinetycznym współczynnikiem tarcia. Jest on mniejszy od współczynnika f_0.

Wartości tych współczynników zależą od rodzaju stykających się powierzchni. Przy powierzchniach szorstkich, nierównych są większe niż przy powierzchniach gładkich, zależą również od materiałów, których powierzchnie się stykają. Współczynniki te będą więc miały wartości zależne od tego, czy ślizga się żelazo po żelazie, czy skóra po żelazie, czy żelazo po lodzie itd. Nie zależą natomiast od wielkości stykających się powierzchni.

Kinetyczny współczynnik tarcia maleje stopniowo przy powiększaniu prędkości ślizgającego się ciała.

Tarcie przy ślizganiu zmniejsza się znacznie, gdy między stykające się powierzchnie wprowadzimy jakikolwiek smar, np. towot, oliwę, mydło, talk, grafit itp. Przy stosowaniu smaru tarcie nie jest niezależne od wielkości stykających się powierzchni. Powierzchnie małe są wtedy niekorzystne, gdyż szybko smar się z nich wyciska.



Rys. 4.23. Wyznaczenie współczynnika tarcia przez pomiar kąta nachylenia równi pochyłej, przy którym ciało zaczyna się z niej zsuwać

Współczynnik tarcia można wyznaczyć za pomocą następującego doświadczenia: kładziemy ciało o ciężarze G i o płaskiej dolnej powierzchni na równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem α (rys. 4.23). Ciężar tego ciała możemy rozłożyć na dwie składowe:

$$F' = G \sin \alpha,$$

$$F = G \cos \alpha.$$

W miarę nachylania równi pochyłej, a więc przy wzroście kąta α, składowa F, a więc siła przyciskająca ciało do podstawy, maleje, składowa F' natomiast wzrasta. Gdy siła F' (przy kącie nachylenia α_0) zrówna się z siłą tarcia, która jest dana przez równanie

$$T_0 = f_0 F,$$

wówczas ciało będzie jeszcze w równowadze, lecz przy najmniejszym choćby wzroście kąta α ciało zacznie się zsuwać. Dla ostatniej chwili równowagi będziemy mieli zatem

$$T_0 = F' = f_0 F, \tag{4.67}$$

czyli

$$G \sin \alpha_0 = f_0 G \cos \alpha_0, \tag{4.68}$$

skąd

$$f_0 = \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} = \operatorname{tg} \alpha_0. \tag{4.69}$$

Gdy ciało zacznie się zsuwać, ruch jego będzie przyśpieszony, gdyż współczynnik tarcia kinetyczny f jest mniejszy od f_0. Ciało będzie się więc znajdowało

pod działaniem siły wypadkowej

$$F' - T = F' - fF. \tag{4.70}$$

Aby znaleźć kinetyczny współczynnik tarcia, należy zmniejszyć nachylenie równi, gdy tylko ciało zacznie się poruszać tak, aby ruch w dalszym ciągu był już jednostajny. Wtedy siła F równoważy się z tarciem kinetycznym, a więc znowu będziemy mieli podobne równanie jak poprzednio:

$$T = F' = f\,F.$$

Jeżeli to nastąpi przy kącie α nachylenia równi, to w podobny sposób jak poprzednio otrzymamy

$$f = \operatorname{tg} \alpha.$$

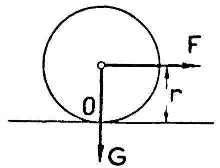
Współczynnik tarcia, jak wynika z powyższych równań, równa się stosunkowi dwóch sił, a więc jest liczbą bezwymiarową.

Tabela 4.1

Przykłady współczynników tarcia

Materiał	f_0	f
Stal po lodzie	0,027	0,014
Stal po stali	0,15	0,09—0,03
Żelazo po żelazie	0,20	—
Skóra po żelazie (pas na kole żelaznym)	0,28	0,27
Dębina po dębinie w kierunku włókien	0,62	0,48
Lina konopna po dębinie	0,80	0,52

b. Tarcie toczne. Gdy po płaszczyźnie toczy się ciało kształtu walca albo kuli, ruch ten napotyka również na opór z powodu odkształcania się powierzchni zetknięcia. Podczas toczenia się powierzchnie stykające i warstwy do nich przylegające stale się odkształcają, co wskutek niedoskonałej sprężystości ciał pochłania pewną ilość energii. Jak widać z rys. 4.24, siła poruszająca F powoduje toczenie się wskutek momentu obrotowego tej siły względem osi O. Moment siły potrzebnej do poruszania walca lub kuli ruchem jednostajnym, jak wykazuje doświadczenie, jest proporcjonalny do siły przyciskającej ciało do podstawy



Rys. 4.24. Tarcie przy toczeniu się

$$M = Fr = f'G.$$

Z tego równania otrzymujemy:

$$f' = r\frac{F}{G}. \tag{4.71}$$

Wynika stąd, że wymiar współczynnika tarcia tocznego jest inny niż współczynnika tarcia poślizgowego. Mianowicie

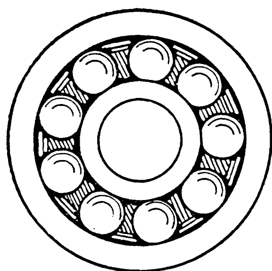
$$[f'] = [l],$$

to znaczy, że wymiar współczynnika f' jest równy wymiarowi długości.

Na siłę potrzebną do toczenia walca ruchem jednostajnym otrzymamy wzór

$$F = \frac{f'}{r} G, \qquad (4.72)$$

skąd wynika, że siła jest odwrotnie proporcjonalna do promienia walca. Im ten promień większy, tym siła mniejsza. Ponieważ współczynnik tarcia tocznego ma bardzo małe wartości, np. dla żelaza po żelazie 0,008 cm, dla dębiny po dębinie — 0,018 cm, stosunek $\frac{f}{r}$ dla promienia np. 10 cm będzie dla żelaza po żelazie wynosić tylko 0,0008 (zaś przy ślizganiu się około 0,2), dla dębiny po dębinie — 0,0018 (zaś przy ślizganiu się około 0,5). Jeżeli więc chodzi nam w jakimś wypadku o możliwe usunięcie oporów ruchu, to staramy się zastąpić ślizganie się toczeniem. Przy przeciąganiu więc np. ciężkich łodzi po ziemi lub w ogóle ciężkich przedmiotów podkładamy pod nie walce drewniane lub żelazne. Używamy kół przy wszelkiego rodzaju pojazdach. W tym ostatnim przypadku jednak pozostaje jeszcze tarcie poślizgowe tam, gdzie łożyska kół stykają się z osiami. Zmniejszamy je przez wprowadzenie smarów między trące się powierzchnie. Jeszcze bardziej można zmniejszyć to tarcie przy użyciu łożysk kulkowych albo rolkowych umieszczając między łożyskiem a osią szereg kulek lub walców (rys. 4.25) i zastępując w ten sposób tarcie poślizgowe tarciem tocznym.



Rys. 4.25. Łożysko kulkowe

Zadania

4.1. Na bryłę osadzoną na osi działają dwie siły P i Q umiejscowione w płaszczyźnie prostopadłej do osi, których kierunki tworzą ze sobą kąt $\alpha = 45°$. Jedna z nich, $P = 4$ kG działa wzdłuż prostej oddalonej od osi obrotu o $p = 24$ cm. W jakiej odległości q od osi musi działać siła $Q = 3$ kG, aby była równowaga i jaka siła R będzie wtedy cisnąć na oś?

Odpowiedź: $q = 32$ cm; $R = 6{,}48$ kG.

4.2. Dwaj robotnicy A i B dźwigają na drążku długości 2 m ciężar 30 kG, który wisi w odległości 60 cm od pierwszego robotnika (A). Jakimi siłami podtrzymują oni drążek (przy nieuwzględnieniu ciężaru drążka)?

Odpowiedź: $F_A = 21$ kG, $F_B = 9$ kG.

4.3. Dwóch ludzi M i N niesie na drągu długości $l = 120$ cm i ważącym 4 kG ciężar $R = 56$ kG umieszczony w punkcie oddalonym od pierwszego (M) o 80 cm. Jakimi siłami podtrzymują oni drąg?

Odpowiedź: $20\frac{2}{3}$ kG; $39\frac{1}{3}$ kG.

4.4. Jaki jest moment bezwładności punktu o masie $m = 300$ g umieszczonego w odległości 40 cm od osi obrotu?

Odpowiedź: 480 000 g cm².

4.5. Jaki jest moment bezwładności obręczy kołowej stalowej grubości $x = 1$ mm, szerokości $b = 4$ cm o średnicy 60 cm względem osi przechodzącej przez jej środek prostopadle do koła (nie uwzględniać przy obliczaniu momentu bezwładności grubości obręczy. Masa właściwa stali $\varrho = 7{,}8$ g/cm³.)

Odpowiedź: $I = 2\pi r^3 b\varrho \approx 5{,}292 \cdot 10^6$ g cm².

4.6. Jaki jest moment bezwładności walca żelaznego średnicy $2r = 10$ cm długości $l = 20$ cm względem osi walca, jeżeli jego ramię bezwładności $k = \frac{r}{\sqrt{2}}$ (masa właściwa żelaza $\varrho = 7{,}8$ g/cm³)

Odpowiedź: $I = \frac{1}{2}\pi r^4 l\varrho = 1{,}531 \cdot 10^5$ g/cm².

4.7. Na wale o średnicy $2r = 6$ cm osadzone jest koło o masie $m = 6$ kg. Jego ramię bezwładności $k = 20$ cm. Na wale jest nawinięty sznurek. Ciągniemy go siłą $F = 3$ kG. Jaka będzie prędkość kątowa koła ω po upływie $t = 5$ sec, okres obrotu T i liczba obrotów n na sekundę?

Odpowiedź: $\omega = \frac{Frt}{mk} = 18{,}4$ rd/sec; $T \approx 0{,}34$ sec; $n = 2{,}93$ obrotów/sec.

4.8. Koło zamachowe ważące razem z wałem 1 tonnę mające ramię bezwładności $k = 2$ m wykonywa 30 obrotów na minutę. Jaka siła powinna działać na obwód koła pasowego o średnicy $2r = 80$ cm osadzonego na tym samym wale, aby koło zamachowe zatrzymać w ciągu 5 minut?

Odpowiedź: $F = \frac{I\omega}{rt} = \frac{mk^2\omega}{rt} = 104{,}7$ N $= 10{,}67$ kG.

4.9. Koło zamachowe silnika benzynowego o masie $m = 3{,}6$ kg i o ramieniu bezwładności $k = 10$ cm wykonywa 3000 obrotów na minutę. 1. Jaka jest jego energia kinetyczna? 2. Na jaką wysokość h można by tą energią podnieść ciężar $G = 100$ kG?

Odpowiedź: 1. $E_k = \frac{mk^2\omega^2}{2} = 181{,}2$ kGm; 2. $h = 1{,}81$ m.

4.10. Kulkę uwiązaną na nitce długości $r_1 = 30$ cm wprawiamy w ruch obrotowy z taką szybkością, że kulka wykonywa 2 obroty w sekundzie. W pewnej chwili skracamy nitkę do długości 20 cm. 1. Jaka była początkowa prędkość kątowa ω_1 kulki? 2. Jaką ω_2 miała kulka po skróceniu nitki?

Odpowiedź: 1. $\omega_1 = 4\pi$ rd/sec; 2. $\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\omega_1 = 9\pi$ rd/sec.

4.11. Silnik wprawia koło zamachowe o masie $m = 400$ kg i ramieniu bezwładności $k = 60$ cm w ruch obrotowy z taką prędkością kątową, iż koło wykonywa $n = 2$ obroty w sekundzie. Jaką pracę musiał wykonać silnik, aby doprowadzić do tej prędkości kątowej?

Odpowiedź: $L = E_k = \frac{mk^2\, 4\pi^2 n^2}{2} = 11\,370$ J $= 1159$ kGm.

4.12. Jaki powinien być najmniejszy współczynnik tarcia między kołami i drogą, aby auto mogło w ciągu 15 sekund uzyskać prędkość 60 km/godz (licząc że środek ciężkości leży pośrodku między kołami, a napęd jest na jedną parę kół)?

Odpowiedź: $f = \frac{2a}{g} \approx 0{,}23.$

4.13. Koń rusza z miejsca z saniami o masie $m = 600$ kg i w przeciągu $t = 10$ sec sanie uzyskują prędkość 4 m/sec. Jaką siłę wywierał koń na sanie, jeżeli współczynnik tarcia płoz o śnieg $f = 0{,}04$?

Odpowiedź: $F = fG + ma = 48{,}46$ kG.

4.14. Łyżwiarz rozpędziwszy się do prędkości $v_0 = 4$ m/sec przebywa następnie dzięki bezwładności drogę $s = 40$ m. Jaki jest współczynnik tarcia stali o lód?

Odpowiedź: $f = \frac{v_0^2}{2gs} \approx 0{,}02.$

4.15. Jaka siła utrzyma na równi pochyłej nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = 45°$ ciężar $G = 500$ kG, jeżeli współczynnik tarcia statycznego $f_0 = 0{,}6$?

Odpowiedź: $F = G(\sin\alpha - f_0 \cos\alpha) = 141{,}4$ kG.

4.16. Z jakim przyśpieszeniem zsuwałby się ten ciężar po równi po popchnięciu go w dół, jeżeli współczynnik tarcia kinetycznego $f = 0{,}5$?

Odpowiedź: $a = gf \cos\alpha = 3{,}46$ m/sec².

4.17. Przy rozbieraniu domu spuszczają cegły po drewnianym pomoście nachylonym do poziomu pod kątem $\alpha = 34°$ z wysokości $h = 9$ m. Z jaką prędkością końcową spadają cegły, jeżeli współczynnik tarcia $f = 0{,}6$?

Odpowiedź: $v = \sqrt{2gh\,(1 - f \operatorname{ctg}\alpha)} = 4{,}4$ m/sec.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Jakie są własności ciała doskonale sztywnego?
2. Czemu równa się wypadkowa dwóch sił działających na ciało sztywne — nierównoległych leżących w jednej płaszczyźnie? równoległych?
3. Co nazywamy momentem siły względem punktu? względem osi?
4. Co nazywamy momentem pary sił? Czy parę sił można zastąpić jedną wypadkową?
5. Co nazywamy momentem wektora względem punktu? względem osi?
6. Kiedy dwie siły działające na ciało umieszczone na osi nadają mu jednakowe przyśpieszenia kątowe?
7. Jaki jest warunek równoważności dwóch punktów przy obrocie ich dokoła osi?
8. Jaka jest wartość momentu bezwładności punktu? ciała sztywnego?
9. Jak określa się ramię bezwładności?
10. Jak się wyraża moment bezwładności w zależności od ramienia bezwładności?
11. Co nazywamy krętem punktu? Czemu się równa kręt bryły?
12. Jaka jest zależność krętu punktu od działających sił?
13. Jaka jest zależność sumy krętów punktów układu od sił działających w tym układzie?
14. Jakie jest równanie ruchu ciała sztywnego osadzonego na osi, poddanego działaniu sił?
15. Jaka jest treść zasady zachowania krętu?
16. Jak się porusza ciało sztywne osadzone na osi, gdy żadne siły nie działają? Gdy suma momentów sił zewnętrznych równa się zeru?

17. Jakie jest wyrażenie na energię kinetyczną ciała obracającego się dokoła osi? Jak je otrzymać?
18. Jakie wielkości dynamiki ruchu obrotowego odpowiadają wielkościom dynamiki ruchu postępowego? sile? masie? prędkości? przyśpieszeniu? pędowi?
19. Jakie prawa ruchu obrotowego odpowiadają I zasadzie Newtona? II zasadzie Newtona? III zasadzie Newtona?
20. Jakie są warunki równowagi ciała sztywnego w rozmaitych przypadkach?
21. Jakie prawa odnoszą się do tarcia poślizgowego?
22. Jak określamy współczynnik tarcia statycznego? tarcia kinetycznego?
23. Jakie prawo odnosi się do tarcia tocznego?

5. Własności sprężyste ciał

5.1. Ciśnienie. W mechanice braliśmy pod uwagę ciała wyidealizowane, w których wzajemne odległości punktów są niezmienne. W rzeczywistości odległości te zmieniają się pod wpływem działania sił. Siły działające na ciała też w rzeczywistości nie działają na poszczególne punkty ciał, jak to przyjmowaliśmy w mechanice. Są to zawsze układy wielu sił działające na pewne powierzchnie lub obszary przestrzenne.

Przypuśćmy, że na powierzchnię płaską ciała o polu A działa układ sił równoległych równoważny wypadkowej F. Gdy np. na stole leży klocek drewniany lub metalowy o kształcie prostopadłościanu, to poszczególne punkty jego podstawy cisną na odpowiednie punkty powierzchni stołu. Wypadkowa tych sił równa się ciężarowi prostopadłościanu.

Stosunek

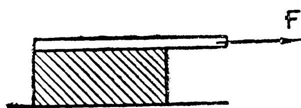
$$\boxed{p = \frac{F}{A}} \tag{5.1}$$

nazywamy średnim ciśnieniem na powierzchnię A.

Ciśnienie w punkcie M powierzchni, nazwijmy je p_M, określamy w sposób następujący:

$$p_M = \frac{\Delta F}{\Delta A}, \tag{5.2}$$

gdzie ΔF jest wypadkową sił działających na bardzo mały element ΔA powierzchni zawierający punkt M.



Rys. 5.1. Przykład ciśnienia stycznego

Ciśnienie nazywamy normalnym, gdy siły są normalne do powierzchni. Gdy siły są styczne, ciśnienie nazywamy stycznym. Jeżeli np. do powierzchni stołu przykleimy klocek drewniany, a następnie do górnej podstawy klocka deseczkę i deseczkę zaczniemy ciągnąć w kierunku równoległym do powierzchni stołu (rys. 5.1), wówczas na górną podstawę klocka będzie wywarte ciśnienie styczne.

Jeżeli siły działające na powierzchnię tworzą z tą powierzchnią kąt odmienny od 0° i 90°, możemy je zawsze rozłożyć na składowe normalne i styczne. Ciśnienie styczne będziemy oznaczać przez τ.

Ciśnienie ujemne (starające się niejako oderwać powierzchnię od ciała) nazywamy ciągnieniem. Będziemy je oznaczać przez σ.

Wymiar ciśnienia znajdziemy z równania (5.1):

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{[mlt^{-2}]}{[l^2]} = [ml^{-1}\, t^{-2}].$$

J e d n o s t k i   c i ś n i e n i a. W układzie MKS jednostką ciśnienia jest paskal. Paskal jest ciśnieniem, które działając równomiernie na powierzchnię jednego metra kwadratowego wywiera siłę jednego niutona. A więc

$$1 \text{ paskal} = 1 \text{ N/m}^2.$$

W układzie CGS jednostką ciśnienia jest dyna na cm²: 1 dyn/cm².

Prócz powyższych używane są jeszcze następujące jednostki ciśnienia: atmosfera techniczna, atmosfera fizyczna i tor.

Atmosfera techniczna (at) jest ciśnieniem, które działając równomiernie na powierzchnię jednego centymetra kwadratowego wywiera siłę jednego kilograma:

$$1 \text{ at} = 1 \text{ kG/cm}^2.$$

Atmosfera fizyczna (Atm) jest ciśnieniem wywieranym przez słupek rtęci o wysokości 760 mmHg przy temperaturze 0°C i przy normalnym przyśpieszeniu siły ciężkości = 980,665 cm/sec².

Tor (Tr)* jest ciśnieniem słupka rtęci o wysokości 1 mm.

Związki między jednostkami:

$$1 \text{ paskal} = 10 \text{ dyn/cm}^2,$$

$$1 \text{ atmosfera techniczna} = 980\,665 \text{ dyn/cm}^2 = 98066{,}5 \text{ paskali} = 0{,}9678 \text{ Atm} = $$
$$= 735{,}56 \text{ torów},$$

$$1 \text{ atmosfera fizyczna} = 1{,}003327 \text{ at} = 101\,325 \text{ paskali} = 760 \text{ Tr} =$$
$$= 1\,013\,250 \text{ dyn/cm}^2,$$

$$1 \text{ Tr} = 1333{,}2 \text{ dyn/cm}^2.$$

5.2. Odkształcenie. Prawo Hooke'a. Gdy pod działaniem sił z zewnątrz przyłożonych odległości punktów ciała zmieniają się, mówimy, że ciało ulega odkształceniu.

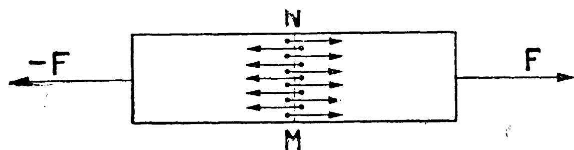
Jak wiadomo wszystkie ciała zbudowane są z atomów, które często łączą się w większe zespoły zwane drobinami. Atomy lub drobiny znajdują się w bardzo niewielkiej odległości jedne od drugich. Odległości te są rzędu paru 10^{-8} cm.

---

* Od nazwiska Torricelli.

Przy jakiejkolwiek próbie zmiany tej odległości natychmiast zaczynają działać siły między nimi. Siły te są natury elektrycznej, gdyż jak dziś wiemy, atomy są układami elektrycznymi i zawierają stosunkowo bardzo silne ładunki elektryczne. Przy próbie ich oddalenia występują siły przyciągające, przy próbie zbliżenia — bardzo duże siły odpychające.

Weźmy jako przykład jeden z najprostrzych przypadków: pręt rozciągany przez dwie równe siły przyłożone do jego końców (rys. 5. 2). Po przyłożeniu tych sił pręt zacznie się wydłużać. Jednocześnie zaczynają działać siły między drobinami. Siły te wraz z odkształceniem szybko rosną. Odległości drobin przestają się zmieniać, gdy obciążenia zewnętrzne zrównają się z siłami wewnętrznymi. Wtedy ustali się równowaga.



Rys. 5.2. Naprężenia wewnętrzne

Wyobraźmy sobie wewnątrz jakikolwiek przekrój poprzeczny MN. Ponieważ pręt znajduje się w równowadze, siły międzydrobinowe lub międzyatomowe o równych wypadkowych wywierane w tym przekroju przez lewą część pręta na prawą muszą być skierowane w lewo, zaś wywierane przez prawą część na lewą — muszą być skierowane w prawo. Każdy z tych układów sił musi mieć wypadkową równą sile F. Te siły tzw. molekularne mają bardzo mały zasięg, działają tylko przy wielkim zbliżeniu drobin.

Niech na element pola przekroju ΔA działa siła ΔF. Wartość wyrażenia

$$\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

określa nam wartość *naprężenia wewnętrznego*, które jest uważane zwykle za wektor o kierunku ΔF. Oczywiście naprężenie ma ten sam wymiar co ciśnienie. Możemy je wyrażać w dynach/cm^2, niutonach na m^2, lub w kG na cm^2 lub na mm^2. Gdy naprężenia przeciwdziałają zbliżaniu się drobin nazywamy je ciśnieniami, gdy przeciwdziałają oddalaniu drobin — ciągnieniami. Gdy zewnętrzne siły zostaną usunięte, naprężenia wewnętrzne powodują powrót drobin do poprzednich odległości (o ile odkształcenia nie były zbyt duże).

Odkształcenia mogą być różnych rodzajów. Najprostrzymi rodzajami odkształceń są: odkształcenie objętościowe czyste, gdy tylko rozmiary ciała się zmieniają bez zmiany kształtu i odkształcenie postaciowe czyste, bez zmiany objętości. Przy odkształceniu objętościowym ciało zachowuje swoją postać: kula pozostaje kulą, choć o nieco innej średnicy, sześcian pozostaje sześcianem itd. Odkształcenie postaciowe polega na zmianie kształtu, gdy np. sześcian zamienia się w równoległościan, kula w elipsoidę itp. zachowując swoją poprzednią

objętość. W wielu wypadkach odkształceń zachodzi jednocześnie zmiana objętości i postaci.

Gdy odkształcenia są bardzo małe, po usunięciu sił zewnętrznych większość ciał wraca do pierwotnych rozmiarów i kształtu. Wszystkie odległości poszczególnych cząstek ciała wracają do porzednich wartości. Mówimy wtedy o odkształceniach sprężystych. Gdy odległości te nie wracają do poprzednich wartości, mówimy o odkształceniu trwałym albo plastycznym.

Do bardzo małych odkształceń sprężystych stosuje się prawo Hooke'a (czyt. Huka), które mówi, że odkształcenie jest wprost proporcjonalne do ciśnień zewnętrznych. Ponieważ naprężenia wewnętrzne równoważą się z siłami zewnętrznymi, więc możemy powiedzieć jednocześnie, że naprężenie i odkształcenie są wielkościami proporcjonalnymi.

5.3. Odkształcenie objętościowe. Jeżeli na powierzchnię ciała działa wszędzie ciśnienie lub ciągnienie normalne, wówczas, jak powiedzieliśmy, nie zmienia się kształt ciała, lecz zmieniają się jego rozmiary. Ze zmianą rozmiarów związana jest zmiana objętości. Zmiana objętości przy tych samych siłach zewnętrznych jest tym większa, im większa jest objętość tego ciała. Miarą odkształcenia ciała jest zatem nie zmiana objętości ΔV, gdyż jest oczywiste, że każda jednostka objętości zmienia się jednakowo, lecz zmiana objętości przypadająca na jednostkę objętości pierwotnej, a więc stosunek ΔV do V. Stosunek ten, który oznaczymy grecką literą Θ (theta)

$$\Theta = \frac{\Delta V}{V}, \tag{5.3}$$

nazywamy rozszerzeniem lub skurczeniem objętościowym właściwym. Według prawa Hooke'a Θ i ciśnienie na powierzchnię p są wielkościami proporcjonalnymi

$$p \sim \Theta.$$

Zatem stosunek tych dwóch wielkości p/Θ jest stały. Jest on miarą wielkości nazywanej modułem sprężystości objętościowej albo modułem ściśliwości. Oznaczamy go zwykle przez K:

$$K = -\frac{p}{\Theta}, \quad \text{skąd} \quad p = -K\Theta. \tag{5.4}$$

Piszemy znak minus, ponieważ p jest wielkością dodatnią, a Θ ujemną — (gdyż przyrost ΔV jest ujemny).

Jak widać, im większy jest moduł ściśliwości danego materiału, tym większego trzeba będzie ciśnienia, aby wywołać odkształcenie Θ określonej wielkości, tym odporniejszy będzie on na wszelkie zmiany objętości, tym będzie mniej ściśliwy. Ponieważ rozszerzenie objętościowe właściwe, jako stosunek dwóch wielkości jednorodnych jest liczbą czystą, z równania 5. 4 wynika, że wymiar

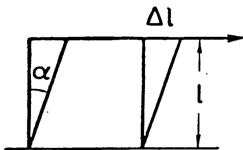
modułu ściśliwości jest taki sam, jak wymiar ciśnienia. A więc moduł ściśliwości wyraża się w takich samych jednostkach jak ciśnienie, tj. w dynach/cm² albo w kG/cm².

Tabela 5.1

Moduł ściśliwości K

Ciało	Temperatura w °C	K w milionach kG/cm²	Ciało	K w milionach kG/cm²	Ciało	K w milionach kG/cm²
Woda	0	0,02	Szkło	0,34 do 0,77	Miedź	1,4
Woda	100	0,024	Ołów	0,43	Stal	1,6

5.4. Odkształcenie postaciowe (albo skręcenie proste). Ciała doznają odkształcenia postaci przy działaniu na nie ciśnień stycznych. Gdy wyobrazimy sobie sześcian o unieruchomionej podstawie (np. przyklejony do podstawy), to pod wpływem ciśnienia stycznego działającego na górną podstawę sześcianu odkształci się on w równoległościan (rys. 5.3). Miarą odkształcenia jest $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta l}{l}$. Ponieważ kąt α jest bardzo mały, możemy przyjąć



Rys. 5.3. Odkształcenie postaci

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha.$$

Wysokość równoległościanu po odkształceniu będzie w przybliżeniu równa wysokości sześcianu. Mamy zatem tylko zmianę kształtu bez zmiany objętości (równej w obu wypadkach iloczynowi pola podstawy przez wysokość). Stosując do tego przypadku prawo Hooke'a możemy uważać ciśnienie styczne τ i odkształcenie za wielkości proporcjonalne:

$$\tau \backsim \alpha.$$

Zatem stosunek $\frac{\tau}{\alpha}$ = const. Oznaczamy go literą G. Możemy więc napisać

$$G = \frac{\tau}{\alpha}, \qquad \text{skąd} \qquad \tau = G\alpha. \tag{5.5}$$

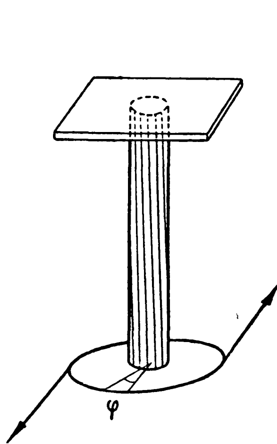
Stałą G wyrażającą właściwości sprężyste materiału nazywamy modułem sprężystości postaciowej. Im większy jest moduł sprężystości postaciowej, tym trudniej jest zmienić kształt ciała. Ponieważ kąt α jest czystą liczbą, to z równania (5. 5) widzimy, że moduł G ma wymiar ciśnienia, a więc tak samo, jak ciśnienie, wyraża się w kG/cm² lub w innych jednostkach ciśnienia.

Tabela 5.2

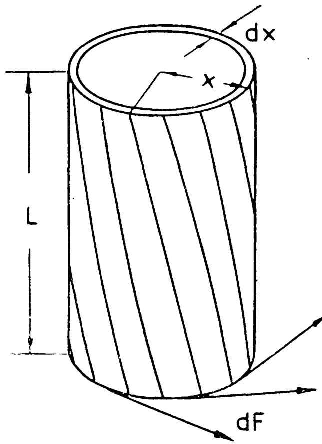
Moduł sprężystości postaciowej *G*

Materiał	*G* w milionach kG/cm²	Materiał	*G* w milionach kG/cm²	Materiał	*G* w milionach kG/cm²
Kauczuk	0,00003	Szkło	0,2 — 0,3	Miedź	0,46
Drewno	0,1 do 0,16	Glin	0,27	Żelazo	0,5 — 0,8
Cyna	0,18	Cynk	0,28 — 0,47	Stal	0,83
		Mosiądz	0,43		

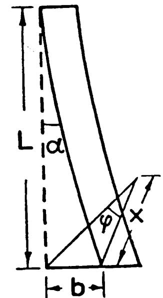
Czyste odkształcenie postaci otrzymujemy przy skręceniu pręta. Weźmy pod uwagę pręt, którego górny przekrój jest silnie umocowany nieruchomo (rys. 5.4). Przyłóżmy do dolnego końca moment skręcający. Spowoduje on obrót dolnej podstawy o kąt φ. Żeby



Rys. 5.4. Skręcenie pręta



Rys. 5.5. Skręcenie warstewki cylindrycznej



Rys. 5.6. Odkształcenie elementu warstewki

obliczyć zależność kąta skręcenia od średnicy, długości pręta i modułu sprężystości postaci materiału, weźmy pod uwagę najpierw warstewkę cylindryczną (rys. 5. 5) o średnicy $2x$ i grubości warstewki dx. Niech siła styczna działająca na element końcowej powierzchni będzie dF. Ciśnienie styczne będzie zatem

$$p = \frac{dF}{2\pi x\, dx}. \tag{5.6}$$

Pod wpływem tego ciśnienia każdy element warstewki dozna odkształcenia postaci, czyli skręcenia o kąt α. Według prawa Hooke'a będziemy mieli:

$$p = G\alpha. \tag{5.7}$$

Lecz kąt $\alpha = \frac{b}{L}$ (rys. 5. 6), zaś $b = x\varphi$, zatem

$$\alpha = \frac{x}{L}\varphi. \tag{5.8}$$

Podstawiając tę wartość do równania (5.7) otrzymamy

$$\frac{dF}{2\pi x\,dx} = G\frac{x}{L}\varphi, \tag{5.9}$$

skąd otrzymujemy

$$dF = 2\pi G\frac{\varphi}{L}x^2\,dx. \tag{5.10}$$

Mnożąc to równanie przez x otrzymamy wyrażenia na moment działający na warstewkę cylindryczną

$$dM = 2\pi G\frac{\varphi}{L}x^3\,dx. \tag{5.11}$$

Całkując otrzymamy wyrażenie na moment działający na pełny walec:

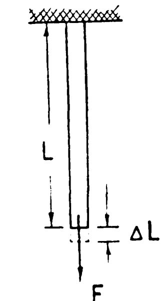
$$M = \int\limits_0^r 2\pi G\frac{\varphi}{L}x^3\,dx = 2\pi\,G\frac{\varphi}{L}\int\limits_0^r x^3\,dx = \frac{\pi}{2}\frac{\varphi}{L}Gr^4, \tag{5.12}$$

skąd

$$G = \frac{2L}{\pi r^4\varphi}M. \tag{5.13}$$

Ten związek między momentem skręcającym i modułem sprężystości postaciowej pozwala na dokładne wyznaczenie modułu sprężystości postaciowej, gdy zmierzymy wszystkie występujące w tym wzorze wielkości, tj. L, r, φ i M.

5.5. Wydłużenie. Wyobraźmy sobie pręt lub drut o przekroju A i długości L, którego jeden koniec jest umocowany nieruchomo (rys. 5.7). Przyłóżmy do jego drugiego końca siłę rozciągającą F. Na pręt będzie wtedy działać ciągnienie:



Rys. 5.7. Wydłużenie pręta

$$\sigma = \frac{F}{A}, \tag{5.14}$$

pod wpływem którego długość pręta powiększy się o ΔL. Gdyby siła F była siłą ściskającą, długość pręta o tyleż by się zmniejszyła. Stosunek

$$l = \frac{\Delta L}{L} \tag{5.15}$$

jest miarą wielkości odkształcenia. Nazywamy go wydłużeniem właściwym albo skróceniem właściwym (gdy L jest ujemne).

Przy rozciąganiu pręta długość jego rośnie. Jednocześnie wymiary poprzeczne pręta zmniejszają się. Przy pręcie metalowym trudno to spostrzec, ale wyraźnie to widać przy rozciąganiu taśmy lub pręta z gumy.

Według prawa Hooke'a mamy

$$\sigma \backsim l$$

(σ jest proporcjonalne do l). Zatem stosunek tych dwóch wielkości jest stały. Jest on miarą własności sprężystych materiału wykazywanych przy rozciąganiu. Oznaczając ten stosunek przez E możemy napisać:

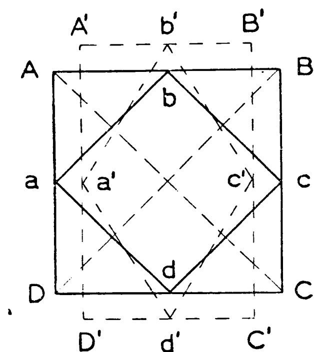
$$E = \frac{\sigma}{l},$$

skąd

$$\sigma = El, \tag{5.16}$$

E nazywamy modułem Younga (czyt. Janga, nosowe (na), które nie ma odpowiednika w języku polskim).

Wewnątrz rozciąganego pręta weźmy pod uwagę sześcian o czterech ścianach równoległych do osi pręta (rys. 5.8). Na rysunku jest przedstawiona jedna ściana. Po rozciągnięciu sześcian zamieni się w prostopadłościan. Przekątne jego ścian zmienią kierunki. Jeżeli wewnętrz sześcianu $ABCD$ wyobrazimy sobie mniejszy sześcian $abcd$ o ścianach równoległych do płaszczyzn przekątnych AC i BD większego sześcianu, to po rozciągnięciu pręta zmieni się on na równoległościan. Zatem przy wydłużeniu pręta zachodzi odkształcenie materiału pręta.



Rys. 5.8. Odkształcenie elementu objętości przy wydłużeniu pręta

Sześcian $ABCD$ wydłuży się i jednocześnie się zwęzi. Przypuśćmy, że przed odkształceniem długość krawędzi AD równała się jednostce. Niech po odkształceniu ta długość będzie:

$$1 + \lambda,$$

gdzie λ jest bardzo małym przyrostem długości tej krawędzi. Krawędź AB natomiast zmniejszy swoją długość na:

$$1 - \lambda'.$$

Stosunek $\dfrac{\lambda'}{\lambda} = \mu$ nazywamy współczynnikiem Poissona (czyt. Puassona). Ponieważ, jak widać z tego równania, $\lambda' = \mu\lambda$, więc objętość prostopadłościanu $A'B'C'D'$ będzie dana przez wzór

$$V = (1 + \lambda)(1 - \mu\lambda)^2 = 1 - 2\mu\lambda + \mu^2\lambda^2 + \lambda - 2\mu\lambda^2 + \mu^2\lambda^3. \tag{5.17}$$

Zaniedbując wyrazy, w których występują kwadraty i wyższe potęgi bardzo małej wielkości λ, otrzymamy na objętość jednostkowego sześcianu po jego odkształceniu wzór:

$$V = 1 + \lambda(1 - 2\mu). \tag{5.18}$$

Gdy $\mu < 0{,}5$, to $2\mu < 1$. Wtedy V jest większe od jedności, objętość rozciąganego pręta rośnie. Tak jest w większości materiałów. Zatem wydłużenie jest

odkształceniem złożonym, przy którym jednocześnie zachodzi zmiana postaci i objętości.

Między modułem Younga a modułami ściśliwości i sprężystości postaci zachodzą związki, które podaję bez wyprowadzenia:

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad \frac{E}{2G} = 1 + \mu. \tag{5.19}$$

Z tych dwóch równań można otrzymać związek następujący:

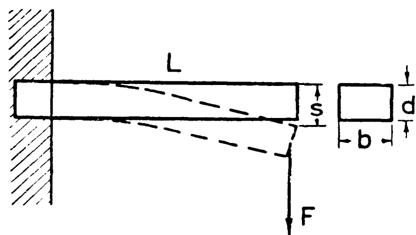
$$E = \frac{9KG}{G+3K}. \tag{5.20}$$

Tabela 5.3

Moduł Younga oraz współczynnik Poissona

Materiał	E w milionach kG/cm² (10^6 kp/cm²)	μ	Materiał	E w milionach kG/cm² (10^6 kp/cm²)	μ
Kauczuk	0,00001 (zmienny)	—	Glin	0,74	0,34
			Mosiądz	1,05	0,35
Drewno ⊥ do włókien	0,004 — 0,011	—	Miedź	1,2	0,35
			Platyna	1,7	0,39
Drewno ‖ do włókien	0,09 — 0,13	—	Żelazo kute	2,17	0,28
			Stal	2,19	0,29
Ołów	0,17	0,45	Wolfram	3,62	0,17
Cynk	0,35—1,3	0,2—0,3	Iryd	5,2	—

5.6. Gięcie. Często zdarzającymi się odkształceniami są odkształcenia polegające na gięciu, zginaniu belek, sztab, prętów. Jeżeli belka jest na jednym końcu umocowana, a do drugiego przyłożymy siłę F działającą prostopadle do osi belki (rys. 5.9), to jej koniec przemieści się ku dołowi o odcinek zwany strzałką ugięcia s. Przy zgięciu belki górne jej warstwy są rozciągane, dolne ściskane. W górnych warstwach panują zatem ciągnienia, w dolnej — ciśnienia. W środku między nimi znajduje się warstwa obojętna, w której nie ma żadnych naprężeń. Ponieważ warstwy belki są rozciągane względnie ściskane, do obliczeń wchodzi moduł Younga E. Teoria daje następujący wzór na wielkość strzałki ugięcia:



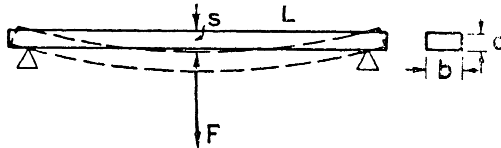
Rys. 5.9. Zgięcie belki umocowanej na jednym końcu

$$s = \frac{4}{E}\frac{L^3}{bd^3}F, \tag{5.21}$$

gdzie L oznacza długość belki, b — szerokość przekroju, d — wysokość przekroju, F — siłę przyłożoną do końca belki.

W przypadku gdy belka jest podparta na dwóch końcach, w środku zaś jest przyłożona siła F (rys. 5.10), mamy na strzałkę ugięcia następujący wzór:

$$s = \frac{L^3}{4E} \frac{L^3}{bd^3} F. \tag{5.22}$$



Rys. 5.10. Zgięcie belki podpartej na dwóch końcach

Ze zmierzonej wielkości strzałki ugięcia s oraz z wymiarów belki czy pręta można przy pomocy równań (5.21) lub (5.22) obliczyć moduł Younga E.

5.7. Granica proporcjonalności, sprężystości, wytrzymałość, zmęczenie. Gdy odkształcenia są bardzo małe, gdy więc na ciało działają niewielkie ciśnienia lub ciągnienia, stosuje się do nich prawo Hooke'a, przy tym po usunięciu sił ciała wracają do poprzednich kształtów i rozmiarów. Przy stopniowym powiększaniu stosowanych ciśnień lub ciągnień odkształcenia przestają się stosować do prawa Hooke'a. A więc np. przy rozciąganiu pręta wydłużenia szybciej wzrastają niż ciągnienia. Lecz po usunięciu siły rozciągającej pręt wraca jeszcze do poprzedniej długości. Ciągnienie, powyżej którego odkształcenia przestają być proporcjonalne do obciążenia zewnętrznego nazywamy granicą proporcjonalności. Przy dalszym powiększaniu ciągnienia dochodzimy wreszcie do takiej jego wartości, iż po usunięciu sił pręt nie wraca już do poprzedniej długości, zostaje odkształcony trwale. To ciągnienie lub ciśnienie graniczne określa nam tzw. *granicę sprężystości.* Przy wyższych ciągnieniach lub ciśnieniach mamy już odkształcenia trwałe.

Przy dalszym powiększaniu ciągnienia wydłużenie wzrastać zaczyna szybko, wreszcie w jakimś miejscu pręta tworzy się przewężenie i przy pewnym ciągnieniu pręt się rozrywa. To graniczne ciągnienie nazywamy wytrzymałością materiału. Jest ono równe największemu możliwemu naprężeniu występującemu w danym materiale, a więc jest jednocześnie miarą sił molekularnych związujących drobiny materiału. Wytrzymałość wyraża się tak jak ciśnienie w kG/cm^2.

Jeżeli odkształcenia powtarzają się wielokrotnie, to obserwujemy zjawisko tzw. zmęczenia. Polega ono na tym, że materiał odkształcany nawet znacznie poniżej granicy sprężystości po bardzo wielkiej ilości odkształceń ulega uszkodzeniu. A więc pręt zginany choćby nieznacznie po bardzo wielkiej liczbie odkształceń wynoszącej zresztą często setki tysięcy wreszcie pęka. Przy silnych odkształ-

ceniach, gdy np. silnie zginamy drut żelazny lub miedziany, nawet po kilku lub kilkunastu przegięciach następuje złamanie.

Tabela 5.4

Wytrzymałość

Materiał	Wytrzymałość w kG/mm²	Materiał	Wytrzymałość w kG/mm²
Drewno ⊥ do włókien	0,75—1,5	Miedź	40—45
,, ‖ ,, ,,	7—13	Mosiądz	50—61
Ołów	1,7—2,2	Stal	38—190
Cyna	2	Wolfram	420—700
Glin	17—27		

Zadania

5.1. Jakie jest skurczenie objętościowe właściwe Θ kuli stalowej o średnicy $d = 1$ m, która pod wpływem ciśnienia normalnego zmniejszyła swoją objętość o $\Delta V = 30$ cm³ (moduł ściśliwości stali $K = 1{,}67 \cdot 10^6$ kG/cm²) i jakie było ciśnienie p, które to wywołało?

Odpowiedź: $\Theta = 5{,}77 \cdot 10^{-5}$; $p = 96$ kG/cm².

5.2. Objętość 1 litra wody zmniejsza się o 476 mm³, oliwy o 630 mm³, eteru o 1630 mm³, gdy poddajemy te ciecze ciśnieniu 10 kG/cm². Jakie są moduły ściśliwości tych cieczy?

Odpowiedź: Wody $K = 2{,}1 \cdot 10^4$, oliwy — $1{,}6 \cdot 10^4$, eteru — $6{,}13 \cdot 10^3$ kG/cm².

5.3. Sześcian żelazny o powierzchni każdej ściany $S = 2$ cm² pod wpływem siły stycznej do ściany $F = 349$ kG został skręcony tak, że jego krawędzie odchyliły się o kąt $\alpha = 1'$ od pierwotnego położenia. Jaki jest moduł sprężystości postaciowej G materiału, z którego sześcian został zrobiony?

Odpowiedź: $G = \dfrac{F}{S\alpha} = 0{,}6 \cdot 10^6$ kG/cm².

5.4. Na oba końce walca o średnicy $2r = 10$ cm działają siły rozciągające po $F = 50$ kG w kierunku osi. Jakie są naprężenia w jakimkolwiek przekroju prostopadłym do osi?

Odpowiedź: $p = \dfrac{F}{\pi r^2} = 0{,}637$ kG/cm² $= 6366$ kG/m².

5.5. O ile przedłuża się (ΔL) pręt stalowy długości $L = 3$ m przekroju prostokątnego $S = 2\text{ mm} \times 3\text{ mm}$, gdy na jego końce działają siły wydłużające po $F = 200$ kG (moduł Younga $E = 2{,}2 \cdot 10^6$ kG/cm²).

Odpowiedź: $\Delta L = \dfrac{Fl}{ES} = 0{,}45$ cm $= 4{,}5$ mm.

5.6. Jaką średnicę (d) powinien mieć okrągły pręt mosiężny, aby jego wydłużenie właściwe miało wartość $l = 0{,}0005$, gdy na nim zawiesimy ciężar $G = 50$ kG (moduł Younga $E = 10^6$ kG/cm²).

Odpowiedź: $d = \sqrt{\dfrac{4G}{\pi l E}} = 0{,}357$ cm $= 3{,}57$ mm.

5.7. O ile wydłuży się (ΔL) drut stalowy długości $L = 5$ m, średnicy $d = 0{,}8$ mm po zawieszeniu na nim ciężaru $G = 12$ kG (moduł Younga $= 2{,}2 \cdot 10^6$ kG/cm^2)?

O d p o w i e d ź: $\Delta L = \dfrac{4GL}{\pi d^2 E} = 5{,}4$ mm.

5.8. Przy jakim obciążeniu G_1 drut ten się urwie (wytrzymałość na rozerwanie stali $W = 120$ kG/mm^2)?

O d p o w i e d ź: $G_1 = WS = 76{,}8$ kG.

5.9. Jaki jest współczynnik Poissona dla szkła, jeżeli stosunek $\dfrac{E}{G} = 2\dfrac{1}{2}$

O d p o w i e d ź: $\mu = \dfrac{E}{2G} - 1 = \dfrac{1}{4}$.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Jak określa się ciśnienie? Jakie są jego jednostki?
2. Jakiego rodzaju ciśnienia odróżniamy?
3. Co nazywamy odkształceniem ciała? Jakie odkształcenia nazywamy sprężystymi, trwałymi?
4. Jak się określa wartość naprężenia wewnętrznego?
5. Jakie jest prawo odnoszące się do małych odkształceń sprężystych?
6. Jakie są główne rodzaje odkształceń prostych? Co jest miarą odkształcenia objętości? postaci?
7. Jak określa się moduł ściśliwości? W jakich jednostkach się wyraża?
8. Jak się określa moduł sprężystości postaciowej? W jakich jednostkach się wyraża?
9. Od jakich parametrów zależy skręcenie pręta? Jakiego rodzaju odkształceniem jest skręcenie?
10. Jakiego rodzaju odkształceniem jest wydłużenie? Jak się wyraża prawo Hooke'a w tym przypadku? Jak się określa moduł Younga? W jakich jednostkach się wyraża?
11. Jak się określa współczynnik Poissona?
12. Od jakich parametrów zależy strzałka ugięcia belki?
13. Co nazywamy granicą proporcjonalności? sprężystości? wytrzymałością? zmęczeniem materiału?

6. Własności cieczy. Hydrostatyka

6.1. Własności cieczy. Ciecze różnią się zasadniczo od ciał stałych brakiem sprężystości postaci. Moduł sprężystości postaciowej dla cieczy $G = 0$, wobec czego pod działaniem najmniejszych nawet ciśnień stycznych ciecz odkształca się trwale. Różnica między zachowaniem się ciał stałych i cieczy tłumaczy się tym, że w ciałach stałych drobiny utrzymują stałe względem siebie położenie i każde usiłowanie zmiany wywołuje powstawanie naprężeń przeciwdziałających tej zmianie. Natomiast w cieczach drobiny mogą przesuwać się swobodnie jedne względem drugich. Nie występują w nich siły wewnętrzne przeciwdziałające takim przesunięciom. Gdy zatem gdziekolwiek w cieczy, na powierzchni lub w jej wnętrzu powstaną ciśnienia styczne do jakiejkolwiek powierzchni, wówczas cząsteczki cieczy natychmiast zaczynają płynąć wzdłuż tej powierzchni. Równowaga cieczy jest niemożliwa. To samo odnosi się również do ciśnień ukośnych, które można rozłożyć zawsze na składową styczną i normalną do danej powierzchni. Z tego wynika, że w cieczy nieruchomej (znajdującej się w stanie równowagi) ciśnienia w niej istniejące są zawsze tylko normalne.

Ciecz wskutek braku sprężystości postaci przybiera zawsze kształt naczynia, w którym się znajduje i wywiera na ściany tego naczynia wszędzie ciśnienie normalne.

Powierzchnię, która oddziela ciecz od powietrza (lub innego gazu albo pary), nazywamy powierzchnią swobodną. Ponieważ, jak powiedzieliśmy, ciśnienie gdziekolwiek w cieczy w stanie równowagi jest zawsze normalne, zatem powierzchnia swobodna cieczy w tym przypadku ma zawsze taki kształt, że w każdym miejscu jest ona normalna do wypadkowej wszystkich sił w tym punkcie działających. Na cząstki cieczy znajdujące się na powierzchni działa ciśnienie powietrza skierowane pionowo w dół oraz siły ciężkości skierowane również pionowo w dół. Zatem powierzchnia swobodna cieczy w stanie równowagi musi być zawsze normalna do pionu. Ponieważ na małej przestrzeni możemy uważać kierunki pionowe za równoległe wskutek bardzo wielkiego promienia Ziemi, więc powierzchnię cieczy można uważać za płaszczyznę prostopadłą do pionu zwaną płaszczyzną poziomą. Taką płaszczyzną poziomą jest powierzchnia cieczy w naczyniach i w małych zbiornikach wody, jak w stawach i niewielkich jeziorach. Na wielkich przestrzeniach, a więc np. w oceanach, powierzchnia swobodna

ma w przybliżeniu kształt kuli, gdyż powierzchnia kuli jest wszędzie normalna do promienia.

Ciecze są ściśliwe, przy tym ich moduły ściśliwości są w ogólności mniejsze od modułów ściśliwości ciał stałach, są więc one zatem łatwiej ściśliwe niż ciała stałe. Ściśliwość ta jest jednak niewielka. Natomiast tym różnią się ciecze od ciał stałych, że są doskonale sprężyste. Nie możemy w cieczach przekroczyć granicy sprężystości.

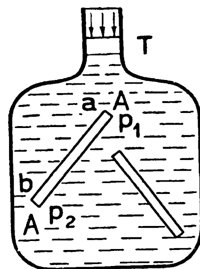
Z określenia ciśnienia (wzór 5.1 str. 132) otrzymujemy

$$F = pA$$

całkowita siła wywierana na powierzchnię o polu A, zwana parciem na powierzchnię A, równa się iloczynowi ciśnienia przez pole tej powierzchni. Z tego związku będziemy w dalszym ciągu często robili użytek.

6.2. Prawo Pascala. Jeżeli na ciecz będącą w równowadze działają jedynie ciśnienia na powierzchnię zewnętrzną, wówczas ciśnienie wewnątrz cieczy jest wszędzie jednakowe i równe ciśnieniu zewnętrznemu.

Ponieważ cząstki cieczy podlegają zawsze działaniu sił ciężkości, więc prawo to dotyczy właściwie przypadku, którego w doświadczeniu nie możemy zrealizować. Jednakże jeżeli siły zewnętrzne są tak wielkie, że wobec nich możemy zaniedbać ciężar cząstek cieczy, to wówczas możemy stosować prawo Pascala nie popełniając dużego błędu. Niech ciecz będzie zamknięta w naczyniu otaczającym ją ze wszystkich stron (rys. 6.1). Za pomocą tłoka T możemy wywrzeć na powierzchnię cieczy ciśnienie p. Żeby dowieść, że ciśnienie wszędzie w cieczy jest jednakowe, wyobraźmy sobie wewnątrz cieczy powierzchnię walca lub prostopadłościanu zamykającą pewną ilość cieczy. Niech pole każdej z podstaw walca będzie A. Gdyby ciśnienie p_1 wywierane przez ciecz zewnętrzną na podstawę a było większe od ciśnienia p_2 na podstawę b, to parcia całkowite na te podstawy równe odpowiednio p_1A i p_2A nie byłyby równe, walec musiałby się poruszać. Ponieważ ciecz jest w spoczynku, więc i porcja cieczy zawarta wewnątrz powierzchni walcowej musi być w spoczynku, skąd wynika, że parcia na obie podstawy muszą być równe:



Rys. 6.1. Rozchodzenie się ciśnienia w cieczy

$$p_1 A = p_2 A, \tag{6.1}$$

stąd zaś wynika, że

$$p_1 = p_2. \tag{6.2}$$

Ciśnienie panujące wewnątrz cieczy znajdującej się w spoczynku nazywamy ciśnieniem hydrostatycznym.

Całkowite parcie na pewną powierzchnię A ciała zanurzonego w cieczy jest:

$$F = pA, \tag{6.3}$$

a więc jest proporcjonalne do wielkości powierzchni A. Na tej zasadzie oparty jest przyrząd mający liczne zastosowania, zwany prasą hydrauliczną. Składa się on z dwóch cylindrów różnych przekrojów połączonych ze sobą rurką (rys. 6.2). W cylindrach znajdują się ruchome tłoki o polach powierzchni A_1 i A_2. Wewnątrz cylindrów pod tłokami znajduje się ciecz. Może to być woda lub inna ciecz, np. oliwa. Na tłoki wywarte są siły zewnętrzne F_1 i F_2. Ponieważ według prawa Pascala ciśnienie wewnątrz cieczy jest wszędzie jednakowe, równe powiedzmy p, zatem parcia cieczy na tłoki będą odpowiednio:

Rys. 6.2. Zasada prasy hydraulicznej

$$F_1 = pA_1, \qquad F_2 = pA_2,$$

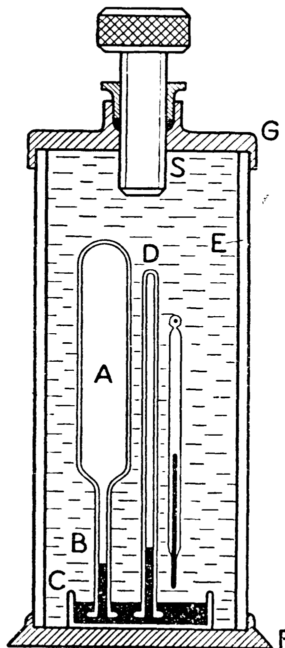
oczywiście, gdy istnieje równowaga. Z równań tych otrzymujemy

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}. \tag{6.4}$$

Siły wywierane na tłoki muszą być proporcjonalne do pola ich powierzchni. Oczywiście siła nieco większa od F_1 spowoduje ruch tłoka A_1 w dół i wypychanie tłoka A_2 do góry. Mamy tu możność wywierania sił bardzo wielkich za pomocą niewielkiej siły. Wszystko zależy od stosunku pól powierzchni tłoków.

W tym przypadku możemy stosować prawo Pascala, gdyż działające siły zewnętrzne są zazwyczaj tak duże, że wobec nich siły wynikające z ciężaru cieczy można zaniedbać.

6.3. Ściśliwość cieczy. Pomiary ściśliwości cieczy przedstawiają duże trudności ze względu 1) na ich małą ściśliwość; 2) na zmiany objętości naczyń zawierających ciecz, gdy na nią wywiera się duże ciśnienie. Oerstedowi w r. 1822 udało się po raz pierwszy dokładniej zmierzyć ściśliwość cieczy za pomocą przyrządu zwanego piezometrem. Jest on przedstawiony na rys. 6.3. Badana ciecz zamknięta jest w cylindrycznej szklanej bańce A, która u dołu zaopatrzona jest w rurkę włoskowatą B zanurzoną końcem w miseczce z rtęcią C. Obok umieszczona jest zatopiona rurka D, również końcem zanurzona w rtęci. Jest ona napełniona powietrzem i służy jako manometr wskazujący ciśnienie. Wszystko jest umieszczone w cylindrze szklanym E zamkniętym u dołu metalową podstawą F.

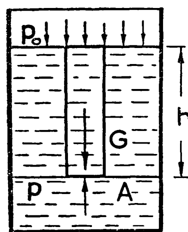


Rys. 6.3. Piezometr Oersteda

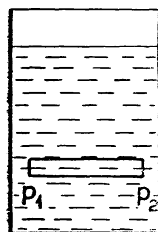
Cylinder napełniony jest wodą i zamknięty szczelną metalową pokrywą G. Przez obrót śruby S można wywierać na wodę duże ciśnienie, które za pośrednictwem wody przenosi się na rtęć. Rtęć wówczas podnosi się w rurce włoskowatej. Przy wywarciu ciśnienia zmniejsza się jednocześnie objętość bańki szklanej i objętość zawartej w niej cieczy. Znając ściśliwość szkła (objętość bańki zmniejsza się tak samo jak ciała pełnego) można określić ściśliwość badanej cieczy. Regnault za pomocą przyrządu będącego odmianą piezometru mógł jednocześnie określić ściśliwość materiału bańki i ściśliwość badanej cieczy.

Pomiary wykazały, że woda zmniejsza swą objętość o $5 \cdot 10^{-5}$ przy powiększeniu ciśnienia o jedną atmosferę. Przy powiększeniu więc ciśnienia o 100 atmosfer jej objętość zmniejsza się zaledwie o 0,5%. Alkohol i eter etylowy zmniejszają swą objętość o $11 \cdot 10^{-5}$ przy powiększeniu ciśnienia o jedną atmosferę, a zatem są przeszło 2 razy bardziej ściśliwe nafta — o $8 \cdot 10^{-5}$, rtęć — tylko o $4 \cdot 10^{-6}$.

6.4. Ciśnienie w cieczy ciężkiej. Gdy ciężar cieczy nie może być zaniedbany wobec ciśnienia zewnętrznego, wówczas nie możemy stosować prawa Pascala. Nie trudno się przekonać za pomocą prostych przyrządów, że ciśnienie w cieczy rośnie z głębokością. Aby obliczyć ciśnienie na głębokości h pod powierzchnią swobodną, weźmy pod uwagę ciecz znajdującą się w dostatecznie głębokim naczyniu, a w niej prostopadłościan o przekroju A cm², którego górna podstawa znajduje się na powierzchni swobodnej cieczy, dolna zaś na głębokości h pod powierzchnią swobodną (rys. 6.4). Ponieważ znajduje się on w równowadze, zatem parcie wywierane przez ciecz na jego dolną podstawę pA musi równoważyć parcie działające na jego górną podstawę p_0A wywierane przez powietrze atmosferyczne oraz ciężar prostopadłościanu $G = \gamma h A$, gdzie h oznacza głębokość dolnej podstawy pod powierzchnią swobodną i jednocześnie wysokość prostopadłościanu, a γ — ciężar właściwy cieczy. Musimy więc mieć



Rys. 6.4. Ciśnienie wewnątrz cieczy ciężkiej



Rys. 6.5. Ciśnienie w płaszczyźnie poziomej w cieczy jest wszędzie jednakowe

$$pA = p_0 A + \gamma h A,$$

skąd otrzymujemy

$$\boxed{p = p_0 + \gamma h.} \tag{6.5}$$

Natomiast we wszystkich punktach powierzchni poziomej musi być wszędzie jednakowe ciśnienie. Aby to udowodnić, wyobraźmy sobie leżący poziomo prostopadłościan albo walec o bardzo małym przekroju (rys. 6.5). Wewnątrz

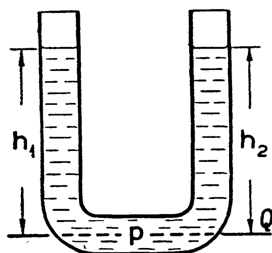
tej wyobrażanej powierzchni znajduje się dana ciecz. Ponieważ ona się nie porusza, zatem parcia na podstawy lewą i prawą muszą być równe. Oznaczając ciśnienia w miejscach, gdzie się znajduje lewa i prawa podstawa, odpowiednio przez p_1 i p_2 otrzymamy

$$p_1 A = p_2 A,$$

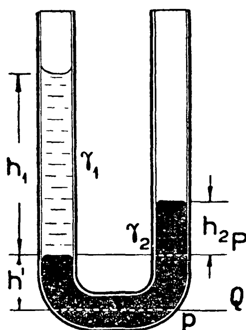
skąd otrzymujemy

$$p_1 = p_2.$$

6.5. Naczynia połączone. Dwa lub kilka naczyń połączonych ze sobą tak, że ciecz może przepływać z jednego do drugiego, nazywamy naczyniami połączonymi. Jeżeli przeprowadzimy płaszczyznę poziomą Q tak, aby przechodziła ona wszędzie przez ciecz i jednocześnie przez różne naczynia (rys. 6.6), to w tej płaszczyźnie w przypadku równowagi ciśnienie musi być wszędzie jednakowe. Oznaczmy wysokości powierzchni swobodnej nad płaszczyzną Q w lewym naczyniu przez h_1, a w prawym przez h_2. Ciśnienie w płaszczyźnie Q w lewym naczyniu będzie



Rys. 6.6. Równowaga cieczy w naczyniach połączonych



Rys. 6.7. Równowaga dwóch różnych cieczy w naczyniach połączonych

$$p_1 = p_0 + \gamma h_1, \tag{6.6}$$

w prawym zaś

$$p_2 = p_0 + \gamma h_2. \tag{6.7}$$

Ponieważ te ciśnienia muszą być równe, zatem

$$p_0 + \gamma h_1 = p_0 + \gamma h_2,$$

skąd

$$h_1 = h_2. \tag{6.8}$$

Ciecz więc musi się wszędzie wznosić do tej samej wysokości ponad płaszczyzną poziomą.

W życiu praktycznym i w technice mamy liczne zastosowania tej zasady: sieć wodociągowa, urządzenia wielu naczyń takich, jak czajniki, dzbanki itp.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy mamy w naczyniach połączonych dwie różne ciecze. Weźmy naczynia połączone najprostszej postaci (rys. 6.7) i wlejmy do nich dwie ciecze o różnych ciężarach właściwych, np. rtęć i wodę. Poprowadźmy płaszczyznę Q tak, żeby przechodziła ona przez oba naczynia, ale przez jedną tylko ciecz (rtęć). Skoro ciecz jest w spoczynku, to ciśnienie w płaszczyźnie Q musi być wszędzie jednakowe. Poprowadźmy jeszcze jedną płaszczyznę poziomą

P przez powierzchnię zetknięcia się obu cieczy. Ciśnienie w płaszczyźnie Q' z lewej strony wyrazi się wzorem

$$p = p_0 + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h', \tag{6.9}$$

z prawej zaś

$$p = p_0 + \gamma_2 h_2 + \gamma_2 h'. \tag{6.10}$$

Z tych dwóch równań otrzymamy:

$$\gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2,$$

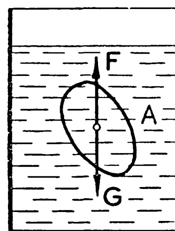
zatem

$$h_1 : h_2 = \gamma_2 : \gamma_1. \tag{6.11}$$

otrzymaliśmy zatem twierdzenie, że wysokości cieczy liczone od powierzchni zetknięcia się cieczy są odwrotnie proporcjonalne do ich ciężarów właściwych.

6.6. Prawo Archimedesa: ciało zanurzone w cieczy doznaje od niej parcia skierowanego ku górze równego co do wielkości ciężarowi wypartej przez to ciało cieczy.

Aby udowodnić to twierdzenie, wyobraźmy sobie ciało dowolnego kształtu otoczone powierzchnią A i zanurzone w cieczy (rys. 6.8). Wyjmijmy to ciało z cieczy i wyobraźmy sobie w tym samym miejscu wewnątrz cieczy jego objętość ograniczoną powierzchnią A wypełnioną cieczą znajdującą się w naczyniu. Ponieważ ciecz jest w równowadze, zatem wszystkie siły działające na ciecz wewnątrz powierzchni A muszą dawać wypadkową równą zeru. Jedną z tych sił jest ciężar cieczy G wypełniającej powierzchnię A, drugą będzie parcie otaczającej cieczy. Ponieważ ciśnienie wzrasta z głębokością, więc parcie na głębiej położone części powierzchni A będzie większe niż na znajdujące się płyciej. Wypadkowa sił wywieranych na powierzchnię A przez otaczającą ciecz będzie zatem skierowana ku górze i musi się znosić z ciężarem cieczy zawartej wewnątrz powierzchni A, zatem musi być co do bezwzględnej wartości równa temu ciężarowi. Oznaczając ciężar właściwy cieczy przez γ, a objętość zawartą wewnątrz powierzchni A przez V możemy napisać na ciężar G cieczy zawartej wewnątrz powierzchni A wzór następujący:



Rys. 6.8. Działanie parcia ku górze na ciało zanurzone w cieczy

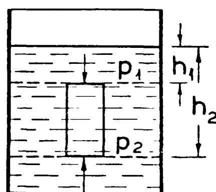
$$G = \gamma V. \tag{6.12}$$

Taka sama zatem siła działająca ku górze

$$F = \gamma V \tag{6.13}$$

wywierana jest przez ciecz na ciało w niej zanurzone.

Jeżeli ciało ma proste geometryczne kształty, to łatwo jest ten wzór wyprowadzić ze wzorów na ciśnienie w cieczy ciężkiej. Wyobraźmy sobie np. w cieczy prostopadłościan o przekroju A z dowolnego materiału (rys. 6.9). Parcia na jego boczne ściany muszą się znosić. Parcie na górną podstawę jest



Rys. 6.9. Działanie parcia ku górze na prostopadłościan zanurzony w cieczy

$$p_1A = p_0A + \gamma h_1A, \tag{6.14}$$

na dolną zaś

$$p_2A = p_0A + \gamma h_2A. \tag{6.15}$$

To ostatnie jest większe. Wypadkowa tych dwóch sił skierowana ku górze będzie miała wartość

$$F = p_2A - p_1A = \gamma(h_2 - h_1)A = \gamma V, \tag{6.16}$$

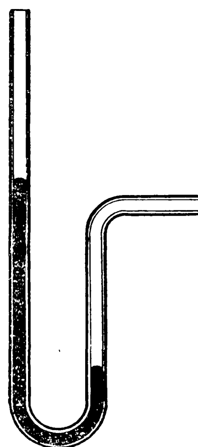
gdzie V jest objętością tego prostopadłościanu. Na prostopadłościan działa zatem parcie ku górze równe γV, czyli ciężarowi cieczy zawartej w jego objętości.

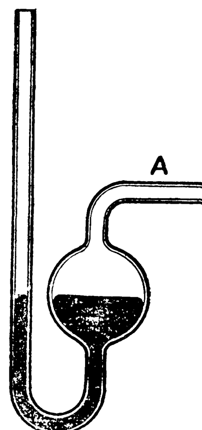
6.7. Manometry. Na zasadzie naczyń połączonych zbudowane są przyrządy służące do mierzenia ciśnienia, najczęściej gazów, zwane manometrami.

M a n o m e t r o t w a r t y jest to rurka szklana w kształcie litery U napełniona cieczą, a więc rtęcią, wodą, alkoholem itp. (rys. 6.10). Często jedna rurka jest krótsza i zaopatrzona w zbiorniczek o większej objętości (rys. 6.11). Gdy połączymy koniec A rurki ze zbiornikiem, w którym chcemy zmierzyć ciśnienie (najczęściej łączy się rurką gumową, niekiedy metalową), ciecz wznosi się w drugim ramieniu. Ciśnienie łatwo obliczyć ze wzoru.

$$p = p_0 + \gamma h, \tag{6.17}$$

gdzie h jest różnicą poziomów cieczy w obu ramionach manometru. Różnica wysokości słupków cieczy w obu ramionach manometru jest miarą nadwyżki ciśnienia wewnątrz zbiornika nad ciśnieniem atmosferycznym.


Rys. 6.10. Manometr otwarty



Rys. 6.11. Odmiana manometru otwartego

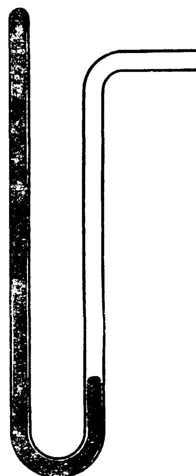
M a n o m e t r d o m i e r z e n i a n i s k i c h c i ś n i e ń. Manometr ten podobnie jak manometr otwarty składa się z rurki szklanej zgiętej w kształcie litery U, lecz jeden jej koniec jest zatopiony (rys. 6.12). Rurkę napełnia się całkowicie rtęcią. Ciśnienie w ramieniu połączonym ze zbiornikiem gazu przyciska

rtęć do zatopionego końca rurki. Gdy ciśnienie w zbiorniku zmaleje tak, że nie może już utrzymać słupka rtęci tej wysokości, rtęć odrywa się od górnego końca rurki i zaczyna opadać.

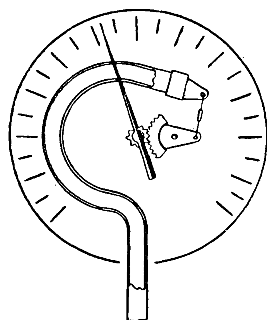
Ciśnienie w zbiorniku łatwo obliczyć ze wzoru:

$$p = \gamma h. \tag{6.18}$$

Najczęściej niskie ciśnienie wyrażamy w milimetrach słupka rtęci, nawet wtedy, gdy ta wysokość jest zbyt mała, aby ją można było zmierzyć. A więc mówimy: ciśnienie wynosi 2 mm, 0,01 mm lub 0,001 mmHg. Ciśnienie 0,001 mmHg mamy przy tzw. próżni rentgenowskiej (w przypadku niskiego ciśnienia gazu wyrażamy się zazwyczaj niepoprawnie, że mamy próżnię). Najmniejsze ciśnienia, jakie dziś potrafimy osiągnąć, wynoszą od 10^{-6} do 10^{-8} mmHg.



Rys. 6.12. Manometr zamknięty do mierzenia niskich ciśnień



Rys. 6.13. Manometr metalowy

M a n o m e t r   m e t a l o w y. Manometry metalowe bywają różnej budowy. Jedna z odmian ma — jako część reagującą na ciśnienie — rurkę metalową o przekroju owalnym zgiętą w koło (rys. 6.13). Ponieważ zewnętrzna ścianka tej rurki ma większą powierzchnię niż wewnętrzna, całkowite parcie na nią jest większe niż na ściankę wewnętrzną. Wskutek tego przy powiększaniu się ciśnienia rurka się rozgina. Ruch końca rurki przenosi się za pomocą odpowiedniego mechanizmu na wskazówkę. Po odpowiednim wycechowaniu przyrządu wskazówka pokazuje ciśnienie w odpowiednich jednostkach, a więc np. w atmosferach technicznych.

6. 8. Pływanie ciał. Według prawa Archimedesa na każde ciało zanurzone w cieczy ciecz ta wywiera parcie ku górze określone wzorem:

$$F = \gamma V \tag{6.19}$$

(F — parcie, γ — ciężar właściwy cieczy, V — objętość ciała równa objętości wypartej cieczy). Lecz na to ciało działa również jego ciężar G skierowany w dół. Ciężar jest związany z ciężarem właściwym γ_1 ciała wzorem

$$G = \gamma_1 V. \tag{6.20}$$

Mogą tu zajść trzy przypadki:

1. $\gamma_1 > \gamma$, ciężar właściwy ciała jest większy od ciężaru właściwego cieczy.

Wtedy

$$G > F,$$

wypadkowa ciężaru ciała i parcia wywieranego przez ciecz na ciało jest skierowana ku dołowi. Ciało w tym przypadku tonie w cieczy.

2. $\gamma_1 = \gamma$, wówczas

$$G = F$$

siły się równoważą, ciało będzie w równowadze wewnątrz cieczy, będzie w niej zawieszone nie tonąc ani wypływając.

Nie trudno jest dolewając do czystej wody silnego roztworu soli kuchennej dobrać tak stężenie roztworu, żeby jajko w nim zanurzone ani nie tonęło, ani nie wynurzało się z cieczy.

3. $\gamma_1 < \gamma$, ciężar właściwy ciała jest mniejszy od ciężaru właściwego cieczy. Wówczas

$$G < F,$$

wypadkowa tych dwóch sił G i F jest skierowana ku górze, ciało wypływa na powierzchnię. A więc drewno, korek i inne ciała o ciężarze właściwym mniejszym od ciężaru właściwego wody pływają po niej. Metale takie, jak żelazo, miedź, mosiądz, ołów pływają po rtęci, której ciężar właściwy jest większy od ciężaru właściwego wymienionych metali.

Ponieważ ciężar właściwy jest proporcjonalny do masy właściwej ϱ:

$$\gamma = \varrho g, \qquad (6.21)$$

gdzie g jest przyśpieszeniem siły ciężkości, zatem moglibyśmy również powiedzieć, że ciało tonie w cieczy lub pływa na niej zależnie od tego, czy jego masa właściwa jest większa, czy też mniejsza od masy właściwej cieczy.

Zadania

6.1. Jeden z cylindrów prasy hydraulicznej ma średnicę $d_1 = 2$ cm, drugi — $d_2 = 10$ cm. Jaka jest wartość liczbowa F_2 siły (przy równowadze) działającej na tłok w szerszym cylindrze, jeżeli na tłok w węższym cylindrze działa siła $F_1 = 50$ kG?

Odpowiedź: $F_2 = F_1 \dfrac{d_2^2}{d_1^2} = 1250$ kG.

6.2. Ile atmosfer (kG/cm²) wynosi ciśnienie w cieczy przy powyższym obciążeniu tłoków?

Odpowiedź: $p = \dfrac{F}{S} = 16$ at.

6.3. Na otwór w szyjce butelki wypełnionej cieczą ciśnie ciężar $G = 5$ kG. Jakie jest całkowite parcie F na powierzchnię całej butelki, jeżeli pole otworu $S_1 = 3$ cm², a cała powierzchnia butelki $S_2 = 480$ cm²?

Odpowiedź: $F = 800$ kG.

6.4. Jakie ciśnienie panuje w morzu na głębokości 1,5 km (gęstość wody morskiej $\varrho = 1{,}027\ g/cm^3$)? Wyrazić to ciśnienie w at i w paskalach.

Odpowiedź: $152{,}1 \cdot 10^6\ dyn/cm^2 = 154{,}1\ at = 152{,}1 \cdot 10^5$ paskali.

6.5. Jakie ciśnienie hydrostatyczne panuje w głębokości 10 cm pod powierzchnią rtęci (masa właściwa rtęci $\varrho = 13{,}54\ g/cm^3$, ciśnienie atmosferyczne $p_0 = 1{,}033\ kG/cm^2$).

Odpowiedź: $p = 1{,}166\ kG/cm^2$.

6.6. Obliczyć parcie F, jakie rtęć wywiera do góry na kulę o średnicy $2r = 12$ cm całkowicie w niej zanurzoną (masa właściwa rtęci $\varrho = 13{,}54\ g/cm^3$).

Odpowiedź: $F = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g = 1{,}201 \cdot 10^7\ dyn = 12{,}25\ kG$.

6.7. Jaka część V' objętości bryły lodu V (masa właściwa $\varrho = 0{,}9167\ g/cm^3$) pływającej po wodzie znajduje się nad powierzchnią wody?

Odpowiedź: $V' = 0{,}0833V \approx \frac{1}{12} V$.

6.8. W cieczy o gęstości ϱ umieszczamy kulę wydrążoną współśrodkowo, zrobioną z materiału o gęstości ϱ' o promieniu zewnętrznym R, wewnętrznym r. Jaką dobrać grubość ścianki, aby kula pływała zanurzona do połowy?

Odpowiedź: $R - r = R\sqrt[3]{\frac{\varrho}{2\varrho'}}$.

6.9. Jaką objętość V korka ($\varrho = 0{,}24$) trzeba by przyczepić do bryły ołowiu ($\varrho' = 11{,}34$) o masie 30 g, aby mogła ona wypłynąć na powierzchnię?

Odpowiedź: $V \geqslant \frac{m(\varrho' - 1)}{\varrho'(1 - \varrho)} = 36\ cm^3$.

6.10. Drut miedziany długości $l = 10$ m waży $G = 1{,}5763$ G. Drut ten zanurzony w wodzie waży $G' = 1{,}3995$ G. Jaka była średnica drutu?

Odpowiedź: $d = \sqrt{\frac{4(G - G')}{\pi l}} = 0{,}015\ cm = 0{,}15\ mm$.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Jakimi własnościami różnią się ciecze od ciał stałych?
2. Jakie prawa odnoszą się do cieczy w równowadze? Kiedy można stosować prawo Pascala?
3. Jak zależy parcie cieczy od wielkości powierzchni uciskanej?
4. Jak można zbadać ściśliwość cieczy? Czy ciecze są łatwo czy trudno ściśliwe?
5. Jakie jest wyrażenie na ciśnienie hydrostatyczne w cieczy ciężkiej? Jak je można otrzymać?
6. Jakie są warunki równowagi cieczy w naczyniach połączonych?
7. Jaka jest treść prawa Archimedesa? Jak można wyprowadzić to prawo?
8. Jak są zbudowane manometry i jak można za ich pomocą mierzyć ciśnienie?
9. W jakich przypadkach ciała pływają w cieczy, kiedy toną?

7. Ogólne własności gazów

7.1. Zasadnicze własności gazów. Gazy posiadają wiele własności takich samych jak ciecze. Mają doskonałą sprężystość objętości i moduł sztywności $G = 0$. Różnią się natomiast od cieczy rozprężliwością. Rozprężliwością nazywamy tę własność gazów, że zajmują one zawsze całkowitą objętość naczynia pustego, do którego zostaną wpuszczone. Różnią się prócz tego od cieczy jeszcze tym, że są bardzo łatwo ściśliwe. Ich moduł ściśliwości nie jest stały, lecz wzrasta ze wzrostem ciśnienia.

Poza tym pod innymi względami gazy nie różnią się od ciał stałych i cieczy. Podobnie jak te ostatnie, gazy są przyciągane przez Ziemię, mają więc pewien ciężar. Wskutek tego wywierają na wszystkie ciała w nich zanurzone ciśnienie hydrostatyczne. Wszystkie prawa odnoszące się do cieczy w równowadze również stosują się do gazów. Można więc do nich stosować prawo Pascala, które mówi w tym przypadku, że ciśnienie w gazie zawartym wewnątrz naczynia jest wszędzie jednakowe i równe ciśnieniu zewnętrznemu. Przy małych rozmiarach naczynia, gdy ciężar gazu jako bardzo mały i możemy go zaniedbać, prawo to lepiej stosuje się do gazów niż do cieczy. Przy bardzo dużych objętościach gazu trzeba uwzględniać jego ciężar. Jednakże nie możemy stosować prostego wzoru wyprowadzonego dla cieczy, gdyż ciężar właściwy gazu zmienia się wraz z ciśnieniem.

Również prawo Archimedesa stosuje się do gazów. Każde ciało zanurzone w gazie doznaje parcia ku górze równego co do wielkości ciężarowi wypartego gazu.

Gaz możemy zważyć tak jak i inne ciała. Ponieważ jednak ważymy w powietrzu wywierającym według prawa Archimedesa parcie ku górze porównywalne co do wielkości z ciężarem gazu, więc musimy inaczej postępować niż przy ważeniu ciał stałych, gdzie to parcie w wielu wypadkach możemy zaniedbać. Bierzemy więc odpowiednie naczynie, np. kolbę szklaną zamkniętą korkiem gumowym, przez który przechodzi rurka szklana zaopatrzona w kurek. Ważymy ją dwa razy: raz kolbę możliwie dokładnie opróżnioną za pomocą pompy próżniowej, drugi raz zaś napełnioną danym gazem. Różnica ciężarów jest ciężarem gazu zawartego w kolbie.

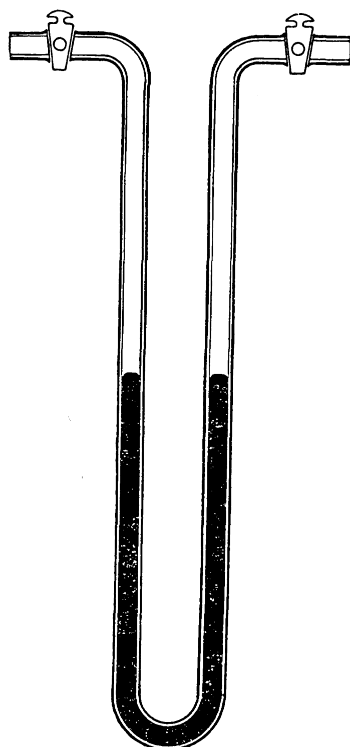
1 litr powietrza mającego temperaturę 0°C pod ciśnieniem 1 Atm waży 1,293 G. Ciężar właściwy powietrza w tych samych warunkach wynosi 0,001293 G/cm^3, masa właściwa 0,001293 g/cm^3.

Tabela 7.1.

Masy właściwe w temperaturze 0° C pod ciśnieniem 760 mmHg

Gaz	Masa właściwa w g/cm³	Gaz	Masa właściwa w g/cm³
Powietrze	0,001 293	Wodór	0,000 090
Azot	0,001 250	Gaz świetlny	0,000 6
Tlen	0,001 429	CO_2	0,001 977

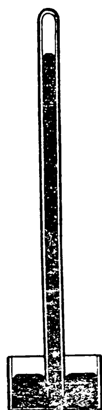
7.2. Ciśnienie powietrza. Powietrze tak jak i ciecze wywiera ciśnienie hydrostatyczne. Nie odczuwamy tego zazwyczaj, gdyż znajdujemy się stale pod tym ciśnieniem i wszystkie nasze tkanki pod tym ciśnieniem wzrastają. Nasz organizm odczuwa tylko zmiany ciśnienia, w szczególności silne i nagłe zmniejszenie ciśnienia.



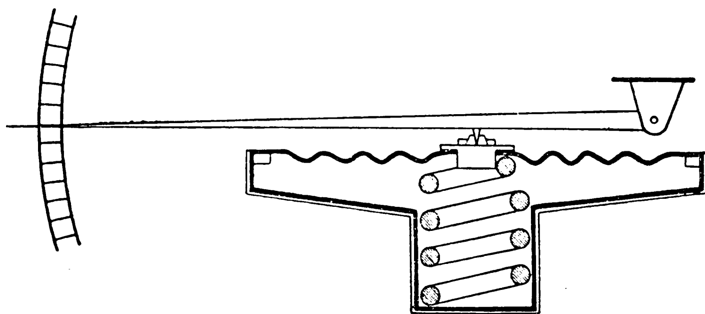
Rys. 7.1. Naczynia połączone do wykazania ciśnienia atmosferycznego

Ciśnienie to można zmierzyć za pomocą naczyń połączonych. Weźmy rurkę w kształcie litery *U* długości około 80 cm, zaopatrzoną u obu końców w kurki, wypełnioną do połowy rtęcią (rys. 7.1). Jeżeli z jednego ramienia tej rurki sponad rtęci wypompujemy powietrze zostawiając kurek przy drugim ramieniu otwarty, to rtęć podniesie się w pierwszym ramieniu, spadnie zaś w drugim. Ciśnienie słupa rtęci o wysokości h będzie wtedy równoważyć ciśnienie atmosferyczne. Zamiast jak w poprzednim doświadczeniu wypompowywać powietrze sponad rtęci, do czego jest niezbędna odpowiednia pompa, możemy postąpić inaczej. Bierzemy rurkę szklaną długości około 80 cm zatopioną na jednym końcu, napełniamy ją całkowicie rtęcią, zatykamy mocno palcem, przewracamy do góry zatopionym końcem, wkładamy zatkany palcem koniec do naczyńka z rtęcią i usuwamy palec (rys. 7.2). Rtęć opada wtedy w rurce nieco, lecz zatrzymuje się na pewnej wysokości tworząc słupek około 76 cm wysokości (lub nieco niższy). Oczywiście i tu mamy naczynia połączone. Ciśnienie słupka rtęci w naczyniu zamkniętym u góry równoważy ciśnienie atmosfery na powierzchnię rtęci w naczyniu otwartym. Tego rodzaju przyrządy służące do pomiaru ciśnienia atmosferycznego nazywamy barometrami. Ciśnienie atmosferyczne wskutek prądów powietrza oraz zmian temperatury ulega zmianom. Z tych zmian ciśnienia można często przewidzieć przebieg pogody na najbliższe dni.

Często do pomiaru ciśnienia atmosferycznego używany jest przyrząd mniej dokładny zwany aneroidem. Główną jego częścią jest puszka metalowa o karbowanym elastycznym wieczku, szczelnie zalutowana, z której wypompowuje się powietrze (rys. 7.3). Wgnieceniu wieczka do wnętrza zapobiega silna sprężyna. Przy zmianach ciśnienia atmosferycznego sprężyna — mając do pokonania większe lub mniejsze parcie na wieczko puszki — wykonywa ruchy przekazywane przez odpowiednie urządzenie mechaniczne (dźwignie i kółka trybowe) wskazówce poruszającej się wzdłuż podziałki. Przyrząd musi być wycechowany przez porównanie z barometrem rtęciowym.



Rys. 7.2. Barometr



Rys. 7.3. Aneroid

Średnie ciśnienie powietrza na poziomie morza równa się ciśnieniu słupa rtęci wysokości 760 mm. Ciśnienie to równa się ciśnieniu 1,033 kG/cm² lub 1 013 250 dyn/cm².

Oczywiście w miarę wznoszenia się w górę na coraz większą wysokość ciśnienie powietrza się zmniejsza, wysokość słupka barometrycznego maleje.

7.3. Prawo Boyle'a. Doświadczenie łatwo stwierdza, że w danej objętości można zmieścić większą lub mniejszą ilość gazu. Za pomocą pompy np. możemy wtłoczyć dużą ilość powietrza do gumy rowerowej lub samochodowej.

Boyle (czyt. Bojl) stwierdził doświadczalnie, że objętość i ciśnienie danej masy gazu są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Jeżeli objętość danej masy gazu m pod ciśnieniem p_1 oznaczymy przez V_1, zaś pod ciśnieniem p_2 przez V_2, to między tymi wielkościami zachodzi związek

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}, \tag{7.1}$$

skąd otrzymujemy

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Ponieważ ten związek zachodzi dla dowolnych objętości gazu, możemy zatem ogólnie napisać

$$\boxed{pV = \text{const},} \tag{7.2}$$

gdzie V oznacza objętość danej masy gazu pod ciśnieniem p. Zależność tę nazywamy prawem Boyle'a.

Ponieważ między masą i gęstością gazu mamy związek:

$$\varrho = \frac{m}{V}, \tag{7.3}$$

zatem określając z tego równania V:

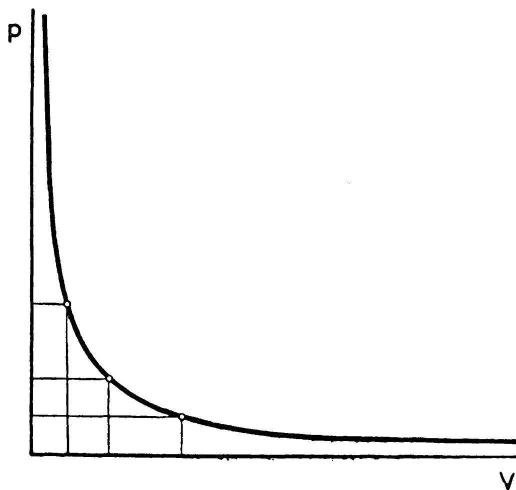
$$V = \frac{m}{\varrho}, \tag{7.4}$$

i podstawiając do równania (7.2) otrzymamy prawo Boyle'a w innej postaci:

$$\boxed{\frac{p}{\varrho} = \text{const.}} \tag{7.5}$$

Masa właściwa gazu jest proporcjonalna do ciśnienia.

Prawo Boyle'a tylko wtedy stosuje się do gazów, jeżeli temperatura podczas doświadczenia się nie zmienia. Zjawiska zachodzące przy niezmiennej, stałej temperaturze nazywamy *zjawiskami izotermicznymi*. Prawo Boyle'a odnosi się do izotermicznych zmian objętości gazu.



Rys. 7.4. Izoterma gazu

Krzywą przedstawiającą zależność ciśnienia gazu od jego objętości przy stałej temperaturze nazywamy *izotermą* gazu. Jak widać z równania (7.2), izoterma gazu jest hiperbolą równoboczną odniesioną do swych asymptot jako osi współrzędnych (rys. 7.4).

Późniejsze doświadczenia wykazały, że gazy niezupełnie dokładnie stosują się do prawa Boyle'a i wykazują przy tym indywidualne różnice. Badania Regnaulta i Amagata (czyt. Reniolta i Amagata) stwierdziły, że iloczyn pV nie jest dokładnie stały. W pewnych zakresach ciśnienia (małych) stopniowo maleje, w innych (dużych) stopniowo wzrasta. Przebieg tych zmian, jak wykazały badania Witkowskiego i Wróblewskiego, zależy od temperatury.

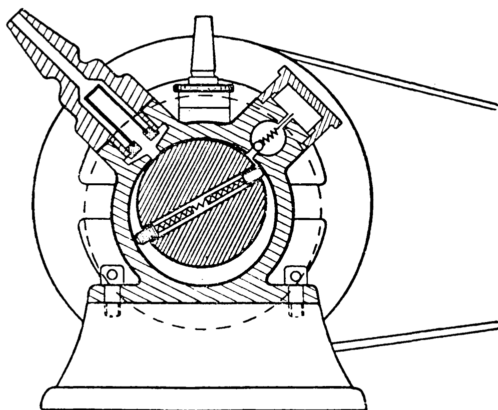
Do gazów znajdujących się pod niewielkimi ciśnieniami (zbliżonymi do atmosferycznego) i przy dostatecznie wysokich temperaturach (powyżej 0°C) możemy z dostatecznym przybliżeniem stosować prawo Boyle'a.

7.4. Ciśnienie mieszanin gazów. Prawo Daltona. Dalton doświadczeniami wykazał, że jeżeli do jednego naczynia wprowadzimy kilka gazów, to ciśnienie wytworzonej w ten sposób mieszaniny gazów równa się sumie ciśnień, jakie wywierałyby jej składniki, gdyby każdy z osobna zajmował całą objętość naczynia. Prawo to nazywamy prawem Daltona. Według tego prawa każdy gaz mieszaniny wywiera takie ciśnienie, jak gdyby innych gazów w naczyniu nie było.

Ciśnienia, jakie każdy z gazów wywiera znajdując się w naczyniu w nieobecności pozostałych: $p_1, p_2, \ldots, p_n$, nazywamy ciśnieniami cząstkowymi. Zatem według prawa Daltona ciśnienie całkowite mieszaniny gazów p równa się sumie ciśnień cząstkowych:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n .$$

7.5. Pompy próżniowe. Do wypompowywania gazów z naczyń używa się pomp rozmaitych konstrukcyj. Dawniej używane pompy tłokowe prawie już wyszły z użycia. Obecnie używa się pomp rotacyjnych różnych systemów. Rysunek 7.5 przedstawia jedną z najprostszych i najczęściej używanych pomp, tzw. pompę kapslową. W pustym cylindrze metalowym obraca się walec stalowy mniejszej średnicy osadzony nie współśrodkowo, lecz tak, że górna część mniejszego walca przylega do górnej części wewnątrz pustego większego walca. Dwie łopatki, które mogą się wsuwać i wysuwać z mniejszego walca, ślizgają się po wewnętrznej powierzchni większego walca. Specjalny olej uszczelnia łopatki i walec. Działanie pompy łatwo zrozumieć z rysunku. Pompa ta nie daje bardzo dobrej próżni, lecz do wielu celów wystarcza oraz służy często jako tzw. pompa wstępna dla pomp dyfuzyjnych, których działanie jest opisane w innym rozdziale (ust. 11.8). Za jej pomocą osiąga się ciśnienie gazu wynoszące koło 0,1 mmHg. Obecnie często budują dwie takie pompy połączone w szereg jedna za drugą, poruszane jednym silnikiem elektrycznym. Taki zespół daje próżnię tzw. rentgenowską, tj. ciśnienie o około 0,001 mmHg.



Rys. 7.5. Pompa kapslowa do wypompowywania powietrza

O wiele dalej w osiągnięciu dobrej próżni pozwalają się posunąć pompy rotacyjne rtęciowe, pompy molekularne oraz najczęściej obecnie używane do celów naukowych i technicznych pompy dyfuzyjne rtęciowe i olejne. Dla działania tych pomp konieczne są pompy pomocnicze, które dają próżnię wstępną.

Zadania

7.1. Z jaką siłą klosz cylindryczny o średnicy $2r = 20$ cm ustawiony na talerzu pompy będzie przyciskany do podstawy, gdy spod niego wypompujemy powietrze, jeżeli ciśnienie barometryczne $b = 740$ Tr (1 Tr = 1333, 2 dyn/cm²)?
Odpowiedź: 315,9 kG.

7.2. Jaka byłaby przy ciśnieniu atmosferycznym = 760 Tr wysokość słupka cieczy w barometrze napełnionym: 1) wodą? 2) gliceryną (gęstość gliceryny $\varrho = 1{,}26$ g/cm³)?
Odpowiedź: 1) 10,33 m; 2) 8,20 m.

7.3. Jaka jest różnica Δp ciśnień barometrycznych między parterem i czwartym piętrem przy różnicy wysokości = 18 m (przy założeniu, że gęstość powietrza nie zmienia się do tej wysokości)?
Odpowiedź: $\Delta p = \varrho g h = 2283$ dyn/cm² = 1,7 Tr.

7.4. Jaką siłę nośną ma 1 m³ wodoru na powierzchni ziemi przy ciśnieniu atmosferycznym 760 Tr (gęstość wodoru 0,00008988 g/cm³, gęstość powietrza 0,001293 g/cm³)?
Odpowiedź: 1,203 kG.

7.5. Jaką siłę nośną ma 1 m³ helu przy ciśnieniu atmosferycznym 760 Tr (gęstość helu $\varrho = 0{,}000\,1785$ g/cm³)?
Odpowiedź: 1,114 kG.

7.6. Wodór, którym wypełniony jest balon, zajmuje przy powierzchni ziemi objętość $V_1 = 2000$ m³, gdy ciśnienie powietrza jest $p_1 = 740$ Tr. Jaką zajmie objętość po wzniesieniu się do wysokości 8000 m, na której ciśnienie powietrza $p_2 = 267$ Tr?
Odpowiedź: $V_2 = \frac{p_1}{p_2} V_1 = 5544$ m³.

7.7. Balon kulisty o średnicy 5 m napełniony jest wodorem, zaś 1 m² tkaniny powłoki waży 200 g. Jaką siłę nośną będzie miał ten balon?
Odpowiedź: 62,8 kG.

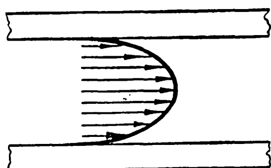
7.8. Powietrze pod normalnym ciśnieniem atmosferycznym ma gęstość $\varrho_0 = 0{,}001293$ g/cm³. Jaką będzie miało gęstość ϱ_1 i ile będzie ważyć powietrze napompowane do butli stalowej o pojemności 20 litrów do ciśnienia 200 atmosfer kG/cm².
Odpowiedź: $\varrho_1 = \frac{p_1}{p_0} \varrho_0 = 0{,}259$ g/cm³; $G = 5{,}18$ kG.

Pytania do powtórzenia materiału

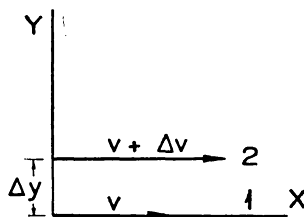
1. Jakie własności wspólne mają gazy z cieczami, a jakie różne?
2. Jakie prawa są wspólne dla cieczy i gazów?
3. Jak można zmierzyć ciśnienie powietrza?
4. Jaka jest treść prawa Boyle'a? W jakich warunkach stosuje się ono do gazów?
5. Jaka jest treść prawa Daltona?
6. Jak są zbudowane pompy próżniowe? Jakie jest ich działanie?

8. Ruch cieczy i gazów

8.1. Wywoływanie ruchu. Tarcie wewnętrzne. Ruch ustalony. Gdy do jednego z naczyń połączonych wlejemy więcej cieczy niż do innych, tak aby powierzchnia swobodna znajdowała się w nim na wyższym poziomie, natychmiast ciecz zacznie płynąć od naczynia, gdzie powierzchnia swobodna znajduje się wyżej, do naczynia o niżej położonej powierzchni swobodnej, czyli od miejsca o ciśnieniu większym do miejsc o ciśnieniu mniejszym. Jak widzieliśmy w hydrostatyce, gdy ciśnienie w tej samej płaszczyźnie poziomej w cieczy jest wszędzie jednakowe, ciecz jest w równowadze. Różnica ciśnień zaś natychmiast wywołuje ruch. Przy ruchu cieczy przez rurę łączącą naczynia cząstki cieczy poruszają się z różnymi prędkościami. Najprędzej poruszają się cząstki znajdujące się w środku, to znaczy na osi rury. W miarę zmniejszania się odległości od ścian płyną coraz wolniej, przy samej ścianie prędkość cząstek równa się zeru (rys. 8.1). Powodem tego zjawiska jest tarcie wewnętrzne cieczy lub gazu nazywane także lepkością. Warstwy cieczy przesuwające się jedne względem drugich trą się wskutek różnicy w ich prędkościach, co powoduje niszczenie energii ruchu, zamianę



Rys. 8.1. Prędkości różnych cząstek cieczy płynącej przez rurę



Rys. 8.2. Warstwa płynąca szybciej wywiera ciśnienie styczne na warstwę płynącą wolniej

jej na ciepło. Gdy dwie warstwy znajdujące się w odległości Δy jedna od drugiej poruszają się — jedna z prędkością v, drugą z prędkością $v + \Delta v$ (rys. 8.2) — wtedy warstwa poruszająca się prędzej stara się powiększyć prędkość wolniejszej. Na odwrót, warstwa wolniejsza hamuje ruch prędszej. Przesuwające się z różnymi prędkościami warstwy wywierają jedne na drugie ciśnienia styczne. Jeżeli oznaczymy przez τ wielkość ciśnienia stycznego wywieranego przez warstwę *2* na warstwę *1* (rys. 8.2), to ciśnienie to jest proporcjonalne do różnicy prędkości

warstw, a odwrotnie proporcjonalne do ich odległości Δy, a więc

$$\tau \sim \frac{v + \Delta v - v}{\Delta y},$$

czyli

$$\tau \sim \frac{\Delta v}{\Delta y}.$$

Wprowadzając współczynnik proporcjonalności η możemy napisać

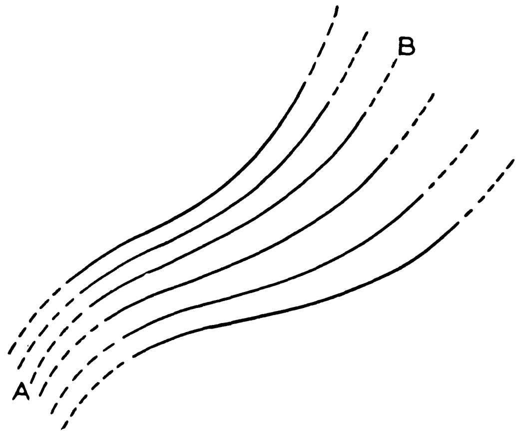
$$\tau = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y}, \tag{8.1}$$

a w granicy

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy}. \tag{8.2}$$

Współczynnik proporcjonalności η zależny od rodzaju cieczy i od temperatury nazywa się jej współczynnikiem lepkości. Ciecz, którą sobie często wyobrażamy, dla której ten współczynnik $\eta = 0$, nazywa się cieczą idealną.

Rozpatrzymy w dalszym ciągu wykładu kilka zagadnień odnoszących się do cieczy idealnych. Ponieważ ciecze są bardzo mało ściśliwe, nie będziemy uwzględniali ich zmian objętości, czyli będziemy je uważali za nieściśliwe. Otrzymane równania po wprowadzeniu pewnych poprawek można stosować do cieczy rzeczywistych. Nawet zresztą bez wprowadzenia poprawek równania te pozwalają na zdanie sobie w przybliżeniu sprawy z przebiegu zjawisk w cieczach.



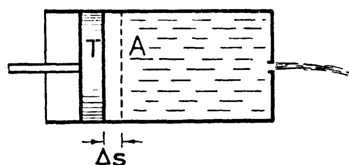
Rys. 8.3. Linie prądu

Będziemy się zajmowali ruchem ustalonym cieczy. *Ruchem ustalonym* nazywamy taki ruch, przy którym prędkości i ciśnienia w danych punktach przestrzeni są stałe, chociaż przez te punkty przepływają coraz inne cząstki cieczy. Jeżeli więc wybieramy jakiś punkt obserwacji, to chociaż przez ten punkt przepływają kolejno różne cząstki cieczy, każda cząstka ma w tym punkcie tę samą prędkość co do wielkości i kierunku, jak cząstki poprzednie. Ciśnienie w tym punkcie również się nie zmienia.

Jeżeli wewnątrz płynącej cieczy nakreślimy linię AB, po której poruszała się pewna cząstka cieczy, to i następne cząstki poruszające się za pierwszą będą się poruszać po tej samej drodze (rys. 8.3). Będzie to tzw. linia prądu. Za pomocą

linij prądu możemy podzielić płynącą ciecz na oddzielne jakby rurki nazywane strugami. Wewnątrz każdej strugi ruch odbywa się tak, jak gdyby była ona otoczona stałą ścianką.

8.2. Wypływ cieczy przez otworek pod wpływem ciśnienia. W naczyniu cylindrycznym porusza się tłok T bez tarcia pod działaniem siły F (rys. 8.4). Pole przekroju naczynia, a więc i tłoka jest A. Po przeciwnej stronie niż tłok znajduje się w dnie albo w ściance mały otworek. Tłok porusza się bardzo powoli. Jednocześnie przez otworek wypływa z pewną prędkością ciecz. Chodzi o znalezienie prędkości wypływającej cieczy. Gdy tłok przesunie się o odległość Δs, to przez otworek musi wypłynąć objętość cieczy równa $A\,\Delta s$ (skoro ciecz jest nieściśliwa). Obliczmy pracę L wykonaną przez siłę F podczas przesunięcia tłoka o Δs:



Rys. 8.4. Wypływ cieczy przez otworek pod wpływem ciśnienia

$$L = F\Delta s = \frac{F}{A} A\,\Delta s = pA\,\Delta s = pV, \tag{8.3}$$

gdzie p oznacza ciśnienie wewnątrz naczynia wywołane przez tłok i według prawa Pascala wszędzie jednakowe, a V oznacza objętość wypchniętej cieczy z powodu zmniejszenia objętości naczynia o $A\,\Delta s$ (możemy tu stosować prawo Pascala, gdyż zakładamy, że wobec bardzo małego otworka prędkość tłoka i cząstek cieczy wewnątrz cylindra jest znikoma).

Energia kinetyczna wytryskującej podczas przesunięcia tłoka cieczy będzie dana przez wzór

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{\varrho V v^2}{2}, \tag{8.4}$$

gdzie m jest masą cieczy wytryskującej podczas przesunięcia tłoka, ϱ — jej masą właściwą, a V — jej objętością ($m = \varrho V$).

Praca wykonana przez siłę F podczas przesunięcia tłoka zamienia się na energię kinetyczną wypływającej cieczy. Na mocy zasady zachowania energii jedna musi się równać drugiej. Przyrównując te wielkości otrzymamy równanie:

$$pV = \frac{\varrho V v^2}{2}, \tag{8.5}$$

skąd po skróceniu przez V otrzymamy

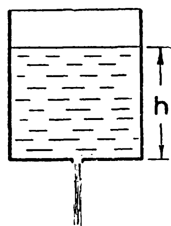
$$p = \frac{\varrho v^2}{2}. \tag{8.6}$$

Z tego równania otrzymamy ostatecznie wzór na prędkość wypływającej cieczy

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\varrho}}. \tag{8.7}$$

W całym rozumowaniu nie uwzględnialiśmy tego, że na zewnątrz panuje zwykle ciśnienie atmosferyczne. Rozumowaliśmy tak, jak gdyby na zewnątrz cylindra była próżnia. Jeżeli uwzględnimy ciśnienie atmosferyczne p_0, które przeciwdziała wypływowi cieczy, to ciecz będzie wypływać pod działaniem nadwyżki ciśnienia wewnątrz cylindra nad atmosferycznym $p - p_0$. W tym przypadku należy napisać wzór

$$v = \sqrt{\frac{2(p-p_0)}{\varrho}}. \tag{8.8}$$



Rys. 8.5. Wypływ cieczy przez otwór w dnie naczynia

Gdy ciecz ciężka znajduje się w naczyniu, w którego dnie lub w pobliżu dna zrobimy mały otworek (rys. 8.5), to ciecz będzie wypływać również z powodu różnicy ciśnień, wewnętrznego przy otworku określonego wzorem

$$p = p_0 + \gamma h, \tag{8.9}$$

gdzie h oznacza głębokość otworka pod powierzchnią swobodną, p_0 — ciśnienie atmosferyczne zewnętrzne, a γ ciężar właściwy cieczy — oraz ciśnienia zewnętrznego p_0.

Ze wzoru (8.8) otrzymamy dla tego przypadku

$$v = \sqrt{\frac{2(p_0+\gamma h - p_0)}{\varrho}} = \sqrt{\frac{2\gamma h}{\varrho}}. \tag{8.10}$$

Ponieważ ciężar właściwy

$$\gamma = \varrho g \tag{8.11}$$

(g — przyśpieszenie siły ciężkości), zatem podstawiając tę wartość na ciężar właściwy do wzoru (8.10) otrzymamy na prędkość wypływu wzór

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{8.12}$$

Wzór ten nazywają wzorem Torricellego (czytaj Toriczellego).

Jak łatwo sprawdzić, wzór ten jest identyczny ze wzorem (3.18) na prędkość ciała swobodnie spadającego z wysokości h. Otrzymujemy w ten sposób twierdzenie: ciecz wypływająca przez otworek znajdujący się na głębokości h pod powierzchnią swobodną ma taką prędkość, jak gdyby spadała swobodnie z wysokości h.

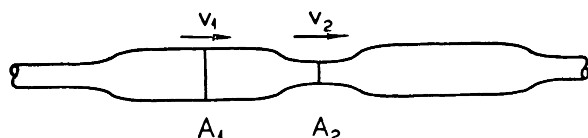
Wzór (8.8) możemy również stosować i do gazów. Gdy gaz sprężony w naczyniu zamkniętym wypływa z niego przez otworek, prędkość jego jest określona wzorem

$$v = \sqrt{\frac{2(p-p_0)}{\varrho}}, \tag{8.13}$$

przy tym na masę właściwą ϱ gazu trzeba wziąć wartość tej ostatniej w zbiorniku. Jest ona inna niż na zewnątrz zbiornika, gdzie gaz się rozpręża.

Jak wskazuje wzór (8.13), prędkość wypływu gazu jest wprost proporcjonalna do pierwiastka z różnicy ciśnień, a odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z masy właściwej gazu.

8.3. Przepływ cieczy przez rurę o zmiennym przekroju. Weźmy pod uwagę przypadek, gdy ciecz płynie przez rurę, której przekrój w różnych miejscach jest rozmaitej wielkości. Rozpatrzmy, jakie będą zachodziły stosunki w części rury ograniczonej przekrojami A_1 i A_2 (rys. 8.6). W przypadku, gdy ruch jest ustalony, tyleż cieczy musi odpływać przez przekrój A_2, ile jej wpływa przez przekrój A_1. Gdyby tak nie było, gdyby np. więcej wpływało cieczy przez przekrój A_1, niż wypływa przez przekrój A_2, to w części A_1A_2, wciąż przybywałoby cieczy. Ponieważ ciecz jest nieściśliwa, jest to niemożliwe. Gdyby zaś więcej wypływało przez przekrój A_2, niż wpływa przez przekrój A_1, musiałoby stale ubywać cieczy w części A_1A_2, musiałyby się w cieczy tworzyć coraz większe puste miejsca, próżnie, ciecz musiałaby się rozrywać na części. W każdym razie nie mógłby wtedy istnieć ruch ustalony, przy którym w danym miejscu rury stosunki nie mogą się zmieniać.



Rys. 8. 6. Przepływ cieczy przez rurę o zmiennym przekroju

Jeżeli przez v_1 i v_2 oznaczymy odpowiednio prędkości cieczy w przekrojach A_1 i A_2, to w czasie Δt przez przekrój A_1 wpływa $A_1v_1\Delta t$ jednostek objętości cieczy, przez przekrój zaś A_2 — wypływa $A_2 v_2 \Delta t$ jednostek. Jedna ilość musi się równać drugiej, zatem otrzymamy równanie

$$A_1v_1\Delta t = A_2v_2\Delta t, \tag{8.14}$$

skąd otrzymamy

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}. \tag{8.15}$$

A więc prędkość (średnia) cieczy jest odwrotnie proporcjonalna do przekroju rury.

Równanie (8.15) piszą często w postaci:

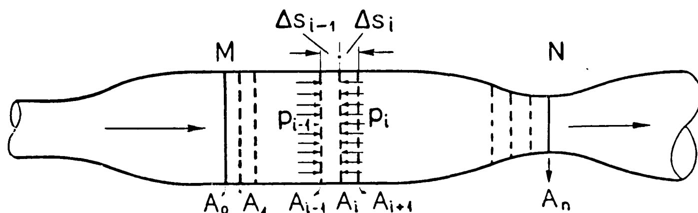
$$A_1v_1 = A_2v_2. \tag{8.16}$$

Równanie to nosi nazwę równania ciągłości. Wyraża ono fakt, że w danej objętości rury mimo wpływania i wypływania coraz to nowych cząstek cieczy objętość cieczy jest stała, ciecz się nigdzie nie rozrywa.

Iloczyn przekroju rury przez prędkość cieczy daje nam objętość cieczy przepływającej przez jakikolwiek przekrój w jednostce czasu. Nazywamy go *wydatkiem prądu*.

Zmianę szybkości cieczy możemy łatwo obserwować w rzekach. Tam, gdzie łożysko rzeki jest szerokie i głębokie, a więc przekrój jest duży, prędkość wody jest mała, woda płynie spokojnie, powoli. Natomiast tam, gdzie łożysko jest płytkie i wąskie, np. wśród skał, mamy silny, gwałtowny prąd, prędkość wody jest znacznie większa.

8.4. Ciśnienie w rurze o zmiennym przekroju. Gdy ciecz przepływa z szerokiej części rury do wąskiej, prędkość jej, a zatem i energia kinetyczna rośnie. Przyrost ten dokonuje się kosztem pracy wykonanej przez ciśnienie. Aby obliczyć, jak się zmienia ciśnienie wzdłuż rury, weźmy pod uwagę pewną jej część, np. MN (rys. 8.7) i podzielmy przekrojami $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ na równe



Rys. 8.7. Przy przepływie cieczy przez rurę układ ciśnień wykonuje pracę

objętości, tak małe, by ciśnienia panujące między sąsiednimi przekrojami można było uważać w przybliżeniu za stałe. Ciśnienie panujące w przekroju A_i oznaczmy przez p_i, gdzie $i = 0,1,2,\ldots, n$. Weźmy pod uwagę objętość cieczy zawartą między przekrojami A_{i-1} a A_i. Na tę porcję cieczy ciecz z lewej strony wywiera ciśnienie p_{i-1}, a więc całkowite parcie $p_{i-1}A_{i-1}$. Zaś ciecz znajdująca się po prawej stronie wywiera w przeciwnym kierunku ciśnienie p_i, a więc całkowite parcie $p_i A_i$. Jeszcze jedno robimy tu założenie: że dzielimy rurę na tak wąskie części, że przekrój każdej części możemy w przybliżeniu uważać za stały, to znaczy, że każdą z części, na które podzieliliśmy rurę, uważamy za walec, gdy w rzeczywistości części te są to stożki ścięte. Popełniamy tu tym mniejszy błąd, na im mniejsze części dzielimy rurę.

Gdy więc ciecz zawarta między przekrojami A_{i-1} a A_i przejdzie do objętości zawartej między przekrojami A_i a A_{i+1} (rys. 8.7), to przez układ ciśnień zostanie wykonana praca:

$$p_{i-1}A_{i-1}\Delta s_{i-1} - p_i A_i \Delta s_i,$$

gdzie Δs_{i-1} oznacza odległość między przekrojami A_{i-1} a A_i, natomiast Δs_i — odległość między przekrojami A_i a A_{i+1}. Gdy ta porcja cieczy przesunie się dalej do objętości zawartej między przekrojami A_{i+1} a A_{i+2}, to przez ciśnienia zostanie wykonana praca

$$p_i A_i \Delta s_i - p_{i+1}A_{i+1}\Delta s_{i+1}.$$

Całkowita praca ciśnień L, wykonana przy przejściu rozważanej porcji cieczy zawartej między przekrojami A_0 i A_1 aż za przekrój A_n, będzie sumą prac wy-

konywanych przy przemieszczaniu cieczy od jednego sąsiedniego przekroju do drugiego:

$$L = p_0 A_0 \Delta s_0 - p_1 A_1 \Delta s_1 + p_1 A_1 \Delta s_1 - p_2 A_2 \Delta s_2 + p_2 A_2 \Delta s_2 - \ldots + \\ + p_{n-1} A_{n-1} \Delta s_{n-1} - p_n A_n \Delta s_n .$$

Wszystkie wyrazy środkowe znoszą się i otrzymamy

$$L = p_0 A_0 \Delta s_0 - p_n A_n \Delta s_n . \tag{8.17}$$

Lecz $A_0 \Delta s_0$ jest objętością cieczy, która wpłynęła do przestrzeni MN rury, a $A_n \Delta s_n$ — objętością cieczy, która w tym samym czasie wypłynęła z tej przestrzeni. Objętości te są równe. Oznaczając ich wartość literą V otrzymamy

$$L = (p_0 - p_n) V. \tag{8.18}$$

Kosztem tej pracy wykonanej przez układ ciśnień wzrasta energia kinetyczna rozważanej porcji cieczy. Jeżeli prędkość cieczy w przekroju A_0 oznaczymy przez v_0, zaś w przekroju A_n oznaczymy przez v_n, to przyrost energii kinetycznej tej porcji cieczy będzie

$$\frac{mv_n^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{\varrho V (v_n^2 - v_0^2)}{2}, \tag{8.19}$$

gdzie ϱ oznacza masę właściwą cieczy.

Pisząc, że praca wykonana przez ciśnienia podczas przemieszczania się rozważanej porcji cieczy od przekroju A_0 do A_n równa się przyrostowi jej energii kinetycznej, otrzymamy równanie

$$(p_0 - p_n) V = \frac{\varrho V (v_n^2 - v_0^2)}{2}. \tag{8.20}$$

Upraszczając to równanie przez V i przenosząc wyrazy ze wskaźnikiem n na lewo, a ze wskaźnikiem 0 na prawo otrzymamy równanie

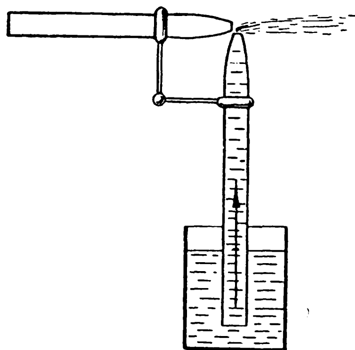
$$p_n + \frac{\varrho v_n^2}{2} = p_0 + \frac{\varrho v_0^2}{2}. \tag{8.21}$$

Przeprowadziliśmy rozumowanie dla dowolnych dwóch przekrojów rury. Jak widać z równania (8.21), suma ciśnienia oraz połowy iloczynu masy właściwej przez kwadrat prędkości cieczy w pewnym przekroju A_n równa się sumie identycznych wyrazów dla innego przekroju A_0. Możemy zatem powiedzieć, że suma dwóch takich wyrazów dla dowolnego przekroju ma zawsze taką samą wartość. Opuszczając wskaźniki możemy dla dowolnego przekroju rury napisać

$$\boxed{p + \frac{\varrho v^2}{2} = \text{const.}} \tag{8.22}$$

Z równania tego wynika, że w szerokich miejscach rury, gdzie prędkość cieczy jest mała, a więc drugi wyraz równania (8.22) jest mały, pierwszy wyraz, to znaczy ciśnienie, musi być duże. Ciśnienie panujące w poruszającej się cieczy nazywamy ciśnieniem hydrodynamicznym. W wąskich miejscach rury, gdzie prędkość cieczy jest duża, ciśnienie hydrodynamiczne musi być małe, jak to wynika z równania (8.22). Gdy w jakimś miejscu przekrój rury jest bardzo mały, prędkość może być tak znaczna, że ciśnienie może spaść poniżej atmosferycznego. Jeżeli w takim miejscu rury zrobimy otwór, to nie tylko ciecz nie będzie przezeń wypływać, ale przeciwnie, zewnętrzne powietrze zacznie wchodzić do środka. Przy bardzo znacznej prędkości cieczy ciśnienie może spaść niemal do zera. W osiągnięciu tak niskiego ciśnienia przeszkadza zwykle ciśnienie pary wydzielającej się z cieczy.

To małe ciśnienie wytwarza się nie tylko w rurze przy dużej prędkości cieczy, ale również w strudze szybko płynącej cieczy lub gazu w środowisku spoczywającym. Tak np. w rozpylaczu struga szybko wdmuchiwanego przez poziomą rurkę gazu wylatuje przez jej przewężony otwór (rys. 8.8). Struga gazu przewęża się jeszcze więcej tuż poza końcem rurki. Druga rurka, pionowa, ma wylot w miejscu, gdzie cząstki gazu wskutek przewężenia rurki poziomej mają bardzo wielką prędkość. Toteż w tym miejscu strugi panuje bardzo małe ciśnienie hydrodynamiczne, mniejsze od ciśnienia otaczającego spokojnego powietrza atmosferycznego. Rurka pionowa zanurzona jest w cieczy. Ponieważ u jej wylotu górnego panuje mniejsze ciśnienie od ciśnienia wywieranego na powierzchnię swobodną w naczyniu, więc ciecz wznosi się w rurce pionowej i wytryskuje do góry z jej górnego otworka. Porwana tam prądem poziomo biegnących cząstek powietrza rozpyla się na drobne kropelki unoszone przez wydmuchiwane powietrze.

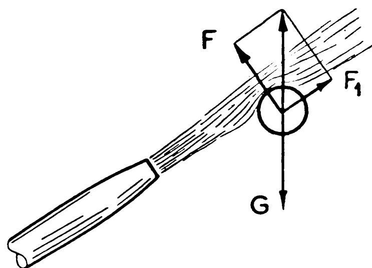


Rys. 8.8. Rozpylacz

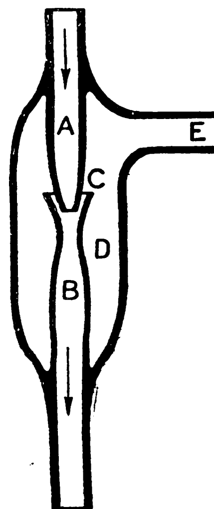
W sposób uderzający sprawdzić można otrzymany tu wynik za pomocą następującego doświadczenia: przez rurkę średnicy kilku do kilkunastu milimetrów nieco przewężoną na końcu, nachyloną dość znacznie do poziomu wydmuchuje się silny prąd powietrza za pomocą mieszka, pompy rotacyjnej (kapslowej na przykład, która jedną rurką wciąga powietrze, a drugą je wydmuchuje) lub też z butli stalowej, w której znajduje się zgęszczone powietrze (rys. 8.9). W odległości kilkunastu centymetrów od wylotu rurki, nieco poniżej jej osi ostrożnie umieszczamy lekką kulkę, najlepiej piłeczkę celuloidową od ping-ponga. Przy umieszczeniu w dobrze dobranym miejscu kulka zawisa w powietrzu i wisi nieruchomo przez dowolnie długi czas (zwykle tylko wirując). Zjawisko to tłumaczy się w sposób następujący: ponieważ ciśnienie hydrodyna-

miczne w strudze szybko poruszającego się powietrza jest mniejsze od ciśnienia w otaczającym spokojnym powietrzu, więc ta nierówność ciśnień powoduje powstanie parcia, siły F przyciskającej piłeczkę niejako do strugi poruszającego się powietrza. Ciężar kulki G działa pionowo w dół. Zaś uderzające o piłeczkę powietrze wywiera parcie F_1. Piłeczka zawisa w takim miejscu strugi, w którym te trzy siły dają wypadkową równą zeru.

Często używanym w pracowniach przyrządem jest pompka wodna, zbudowana również na tej zasadzie, że w mocno przewężonej części rurki ciśnienie hydrodynamiczne jest bardzo małe. Pompka wodna składa się z dwóch rurek szklanych lub metalowych A i B ustawionych osiowo, jak na rys. 8.10. Górny koniec rurki A łączy się z kranem wodociągowym. Gdy przez rurki A i B puścimy silny strumień wody, w miejscu przewężonym C wytwarza się bardzo niskie ciśnienie. Powietrze zawarte w zbiorniczku D wchodzi przez otwór C do wnętrza rurki B i zostaje wyrzucone z prądem wody na zewnątrz. Naczynie, z którego chcemy wypompować powietrze, łączymy z pompką rurką E.



Rys. 8.9. Piłeczka utrzymywana w powietrzu przez strugę wydmuchiwanego powietrza



Rys. 8.10. Pompka wodna

Za pomocą takiej pompki można uzyskać ciśnienie równe ciśnieniu pary nasyconej wody w danej temperaturze, tj. zazwyczaj kilkunastu mmHg.

8. 5. Prawo Bernoulliego. Gdy rura nie jest pozioma, tylko tworzy z poziomem pewien kąt, to do pracy ciśnień dołącza się praca siły ciężkości równa stracie energii potencjalnej cieczy w ilości

$$G(h_1 - h_2) = \gamma V\,(h_1 - h_2), \tag{8.23}$$

gdzie G jest ciężarem rozważanej porcji cieczy (rys. 8.11).

Musimy w tym przypadku napisać równanie wyrażające, że przyrost energii kinetycznej cieczy dokonywa się na koszt pracy ciśnień i pracy sił ciężkości.

Będzie ono następujące:

$$(p_1 - p_2)V + (h_1 - h_2)\gamma V = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{8.24}$$

Pierwszy wyraz po lewej stronie wyraża pracę ciśnień, drugi — pracę sił ciężkości, zaś po prawej stronie mamy przyrost energii kinetycznej.

Po uwzględnieniu związków:

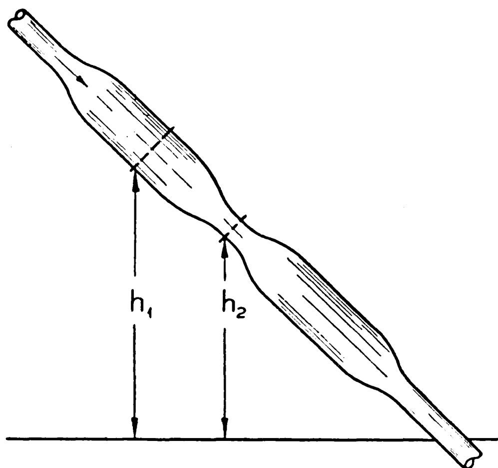
$$m = \varrho V \quad \text{i} \quad \gamma = \varrho g, \tag{8.25}$$

po skróceniu równania i uporządkowaniu wyrazów otrzymamy równanie:

$$p_1 + h_1 \varrho g + \frac{\varrho v_1^2}{2} = p_2 + h_2 \varrho g + \frac{\varrho v_2^2}{2} = \text{const}. \tag{8.26}$$

Dzieląc całe równanie przez $\varrho g = \gamma$ otrzymamy tzw. równanie Bernoulliego:

$$h + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{const}, \tag{8.27}$$

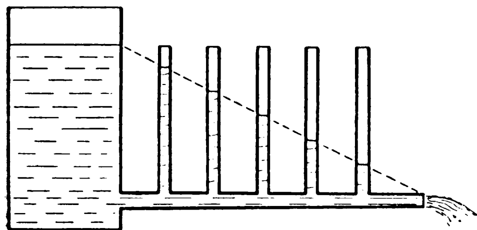


Rys. 8.11. Przepływ cieczy ciężkiej przez rurę nachyloną do poziomu

w którym h jest wysokością geometryczną porcji cieczy znajdującej się w pewnym przekroju nad poziomem odniesienia, zaś $\frac{p}{\gamma}$ jest tak zwaną wysokością piezometryczną. Jest to wysokość, do której wzniosłaby się ciecz w rurce manometrycznej zamkniętej od dostępu atmosfery, mierząc swą wysokością ciśnienie hydrodynamiczne wewnątrz rury ($p = \gamma h$). Gdybyśmy umieścili wzdłuż rury rurki manometryczne otwarte, to wysokość słupka cieczy w nich mierzyłaby oczywiście tylko nadwyżkę ciśnienia hydrodynamicznego nad ciśnieniem atmosferycznym: $p - p_0$. Wyraz $\frac{v^2}{2g}$ nazywamy wysokością prędkości, gdyż wyraz ten daje wysokość, z której ciało musiałoby spadać swobodnie, aby uzyskać prędkość v (patrz ust. 3.7). Otrzymaliśmy zatem twierdzenie, że suma trzech wysokości, mianowicie wysokości cieczy nad pewnym poziomem odniesienia, wysokości ciśnienia i wysokości prędkości jest dla całej rury wielkością stałą, we wszystkich przekrojach rury ma tę samą wartość.

Równanie Bernoulliego można również stosować i do gazów, jeżeli prędkości ich są niewielkie. Wtedy i zmiany masy właściwej są niewielkie i możemy tak rachować, jakbyśmy mieli do czynienia z cieczą nieściśliwą.

8.6. Przepływ przez rurę cieczy rzeczywistej. Jeżeli ciecz płynie w poziomej rurze o stałym przekroju, wówczas pierwszy wyraz h i trzeci $\frac{v^2}{2g}$ równania Bernoulliego są stałe. Wynikałoby stąd, że i drugi wyraz $\frac{p}{\gamma}$ powinien być stały, to znaczy, że ciśnienie hydrodynamiczne cieczy w całej rurze powinno być jednakowe. Doświadczenie wykazuje jednak, że tak nie jest. Jeżeli wzdłuż rury, przez którą wypływa ciecz z naczynia, umieścimy rurki piezometryczne (manometryczne, rys. 8.12), to ciecz w pierwszej rurce przy samym naczyniu wzniesie się najwyżej, mianowicie do wysokości h, wskazując nadwyżkę ciśnienia p ponad ciśnieniem zewnętrznym, w następnych poziomy cieczy będą coraz niższe, wskazując na stały spadek ciśnienia wzdłuż rury. Praca ciśnień zużywa się tu na pokonanie tarcia wewnętrznego, któreśmy poprzednio zaniedbali. Do pędzenia przez rurę cieczy rzeczywistej potrzebna jest stała różnica ciśnień między początkiem i końcem rury. Wielkość tej różnicy ciśnień zależy od długości i przekroju rury oraz od prędkości, z jaką chcemy ciecz przepędzić przez rurę. W ogólności zależność ta nie jest prosta, ponieważ przy znacznych prędkościach cieczy i dostatecznie szerokiej rurze ruch cząstek cieczy może być bardzo skomplikowany.



Rys. 8. 12. Ciśnienie wzdłuż rury, w której płynie ciecz, maleje stopniowo

Jeżeli chcemy otrzymać równanie, które dokładniej stosowałoby się do cieczy rzeczywistej od poprzedniego równania Bernoulliego, musimy to ostatnie nieco uzupełnić. Równanie to otrzymaliśmy z zasady zachowania energii wyrażonej przez równanie (8.24)

$$(p_1 - p_2) V + (h_1 - h_2) \gamma V = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

gdzie lewa strona równania wyrażała pracę ciśnień oraz pracę wykonaną kosztem energii potencjalnej cieczy. Praca ta równała się przyrostowi energii kinetycznej cieczy. Przyrost ten wyraża prawa strona równania. Jeżeli istnieje tarcie, to część wykonanej pracy zużywa się na pokonywanie tarcia. Wobec tego przyrost energii kinetycznej będzie mniejszy, niż to odpowiada wykonanej pracy. A więc będziemy mieli

$$(p_1 - p_2) V + (h_1 - h_2) \gamma V > \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{8.28}$$

Równanie będziemy mogli napisać wtedy, gdy uwzględnimy, że pewna część pracy L' została zużyta na pokonanie tarcia:

$$(p_1 - p_2) V + (h_1 - h_2) \gamma V = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + L', \tag{8.29}$$

skąd po prostych przeróbkach otrzymamy równanie

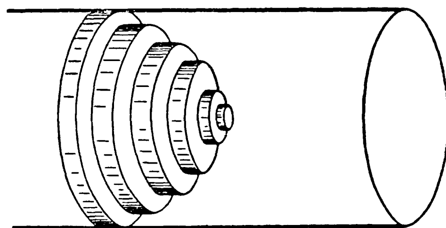
$$p_1 + h_1\gamma + \frac{\varrho v_1^2}{2} = p_2 + h_2\gamma + \frac{\varrho v_2^2}{2} + \frac{L'}{V}. \tag{8.30}$$

Dzieląc jak poprzednio obie strony przez ϱg będziemy mogli napisać

$$h_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} < h_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}.$$

Suma trzech wysokości, która w przypadku braku tarcia wewnętrznego jest stała, w cieczy rzeczywistej maleje stopniowo wzdłuż rury w kierunku prądu.

8.7. Przepływ cieczy przez rurki włoskowate. Stosunkowo prosto przedstawia się zjawisko przepływu cieczy przez rurki bardzo wąskie, tzw. rurki włoskowate. W takich rurkach ciecz płynie w ten sposób, że poszczególne cząstki cieczy poruszają się po liniach prostych równoległych do osi rurki. Taki ruch nazywamy *ruchem laminarnym*. Cząstki cieczy poruszającej się takim ruchem mają rozmaite prędkości. Największą prędkość mają cząstki poruszające się wzdłuż osi rurki. Im bliżej ścianek, tym prędkość ich jest mniejsza. Przy samej ścianie prędkość równa się zeru (rys. 8.13). Można sobie taki ruch cieczy wyobrazić jako ruch bardzo wielu warstw cylindrycznych ślizgających się jedna po drugiej. Oczywistą jest rzeczą, że ważną rolę odgrywa lepkość cieczy. Obliczenie, którego nie będziemy tu przeprowadzali, pozwala otrzymać wzór na średnią prędkość v cząstek cieczy w zależności od ciśnienia p_1 na początku i ciśnienia p_2 na końcu rurki, jej długości l, promienia wewnętrznego R otworu rurki, oraz współczynnika lepkości η. Jest on następujący:



Rys. 8.13. Ruch warstw cieczy w ruchu laminarnym

$$v = \frac{(p_1 - p_2) R^2}{8\eta l}. \tag{8.31}$$

Zaś wydatek cieczy W, to znaczy ilość wypływającej cieczy w jednostce czasu, daje wzór:

$$W = \frac{(p_1 - p_2) R^4 \pi}{8\eta l}. \tag{8.32}$$

Jest to wzór Poiseuille'a (czytaj Puazejla) pozwalający wyliczyć współczynnik lepkości, gdy się zmierzy ilość przepływającej przez daną rurkę włoskowatą cieczy pod wpływem znanej różnicy ciśnień.

Współczynnik lepkości w jednostkach układu CGS (puazach) przy temp. 20° daje tabela 8.1.

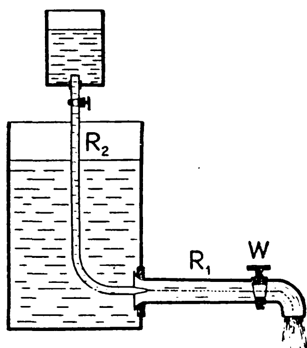
Tabela 8.1

Współczynnik lepkości

Ciecz	η w puazach	Ciecz	η w puazach
Eter etylowy	0,002	Oliwa	około 0,9
Woda	0,01006	Gliceryna	8,5
Alkohol etylowy	0,0119	Powietrze	0,000182
Rtęć	0,0156		

Współczynnik lepkości silnie maleje ze wzrostem temperatury.

8.8. Ruch burzliwy. Liczba Reynoldsa. Można się przekonać doświadczalnie, że cząstki cieczy wtedy tylko poruszają się po prostych równoległych do osi rury, dopóki ich prędkość średnia nie przekroczy pewnej wartości krytycznej.



Rys. 8.14. Doświadczenie Reynoldsa

Reynolds (czytaj Rejnolds) wykonał następujące doświadczenie przedstawione na rys. 8.14. Przez rurę R_1 wypływała ciecz z naczynia. Jej prędkość można było regulować za pomocą wentyla W. Przez wylot węższej rurki R_2 ustawiony w osi szerszej wlewała się ta sama ciecz zabarwiona. Przy małych prędkościach struga zabarwionej cieczy płynęła wzdłuż osi rury nie mieszając się z pozostałą cieczą. Było to dowodem, że ruch jest laminarny. Gdy prędkość cieczy przekraczała określoną wartość, ciecz zabarwiona zaczynała się wskutek powstawania wirów i prądów nieregularnych mieszać z cieczą niezabarwioną. Ruch taki nazywamy ruchem burzliwym. Przejście od ruchu laminarnego do ruchu burzliwego dokonywa się powyżej pewnej prędkości zależnej od średnicy rury, od fizycznych własności płynącej cieczy i od temperatury.

Wartość krytyczną prędkości średniej v określa równanie

$$\frac{\varrho v d}{\eta} = Re, \tag{8.33}$$

gdzie ϱ oznacza masę właściwą cieczy, d — średnicę rury, η — współczynnik lepkości. Liczba Re nosi nazwę liczby Reynoldsa. Jak wykazało doświadczenie, przy wartości Re mniejszej w przybliżeniu od 2000 ruch jest laminarny, przy wartości Re większej od 13 000 ruch jest burzliwy. Przy wartościach zaś zawartych między 2000 i 13 000 ruch jest nieustalony i przechodzi od czasu do czasu z jednej formy w drugą.

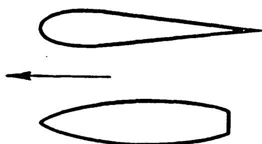
Weźmy dla przykładu wartość 2000 na liczbę Reynoldsa. Ponieważ dla wody $\eta = 0{,}01$, $\varrho = 1$, to na krytyczną prędkość otrzymamy

$$v = \frac{Re\,\eta}{\varrho d} = \frac{2000 \cdot 0{,}01}{d} = \frac{20}{d}\ \text{cm/sec}.$$

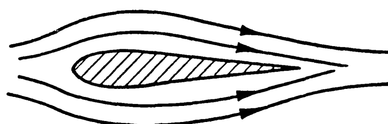
Zatem przy prędkościach mniejszych od 20 cm/sec w rurze o średnicy $d = 1$ cm ruch wody będzie laminarny. W rurze o średnicy 2 cm, aby ruch był laminarny, prędkość musi być mniejsza od 10 cm/sec itd.

8.9. Reakcja płynącej cieczy. Cząstki cieczy płynące przez rurę zakrzywioną lub płynące wzdłuż ściany zakrzywionej, łopatki albo jakiejkolwiek przeszkody zmieniają kierunek ruchu. Działają zatem na nie siły skierowane ku środkowi krzywizny. Siły te są wywierane przez ściany rury czy też przeszkody. Według trzeciej zasady dynamiki na ciała skierowujące ciecz muszą działać siły przeciwnie skierowane. Te siły reakcji wywierane przez ciecze przy każdej zmianie kierunku ich ruchu wykorzystano przy budowie kół wodnych, turbin wodnych i parowych.

8.10. Opór środowiska. Gdy ciało stałe porusza się w środowisku ciekłym lub lotnym, w cieczy lub gazie, doznaje oporu, który powoduje, że do podtrzymania ruchu w takich środowiskach potrzeba zawsze siły stale działającej. Zjawiska występujące przy ruchu ciał stałych w cieczach lub gazach są bardzo zawiłe.



Rys. 8.15. Powierzchnie napotykające na stosunkowo mały opór środowiska przy ruchu



Rys. 8.16. Powierzchnia o kształcie opływowym

W szczegóły tych zjawisk nie będziemy tu wchodzić. Omówimy tylko krótko zależność oporu środowiska od niektórych czynników. Przede wszystkim ważny tu jest kształt powierzchni poruszającego się ciała, w szczególności jego przedniej a również tylnej części. Powierzchnie spiczaste, wrzecionowate, ostre z przodu, jak u ryb, łódek, okrętów, sterowców powietrznych napotykają na znacznie mniejszy opór niż jakiekolwiek inne (rys. 8.15). Lecz i kształt tylnej powierzchni ciała nie jest wcale obojętny. Jeżeli powierzchnia ta jest np. ucięta płasko, poza powierzchnią tworzą się wiry pochłaniające dużo energii, a więc powiększające opór. Najmniejszy opór jest wtedy, gdy powierzchnia ma tak zwany kształt opływowy, gdy cząstki cieczy lub gazu poruszają się równolegle do bocznej powierzchni ciała nie tworząc wirów poza nim (rys. 8.16).

Jeżeli weźniemy pod uwagę ciało o pewnej określonej powierzchni, to opór w danym środowisku zależy w ogólności od prędkości ciała, przy tym przy ma-

łych prędkościach opór ten jest proporcjonalny do prędkości, przy znacznych prędkościach — proporcjonalny w przybliżeniu do kwadratu prędkości. Gdy więc na ciało poruszające się w środowisku działa siła stała, prędkość tego ciała wzrasta tylko do chwili, dopóki siła ta nie zrówna się z oporem środowiska. W dalszym ciągu przy działaniu tej stałej siły ruch będzie jednostajny o tym większej prędkości, im większa jest siła działająca na ciało.

Weźmiemy jeszcze pod uwagę, jako przypadek szczególny, ruch kulki o promieniu r w środowisku ciekłym lub gazowym. Według prawa Stokesa opór F, jakiego doznaje kulka, jest proporcjonalny do promienia r kulki, do jej prędkości v oraz do współczynnika lepkości η:

$$F = 6\pi\eta r v.$$

Rozpatrzmy zjawisko spadania kulki w środowisku ciekłym lub gazowym pod działaniem jej własnego ciężaru. Kulka będzie z początku poruszać się ruchem przyśpieszonym. Jednocześnie opór środowiska będzie wzrastał wraz z prędkością, aż wreszcie zrówna się z ciężarem. Od tej chwili kulka będzie spadała ruchem jednostajnym. Tak spadają np. krople deszczu w powietrzu. Ruch ich w pobliżu ziemi jest już ruchem jednostajnym.

Ciężar kulki jest proporcjonalny do jej objętości: $\frac{4}{3}\pi r^3$, a więc do trzeciej potęgi promienia. Opór zaś jest proporcjonalny do pierwszej potęgi promienia. Stąd wynika, że siła rozpędzająca kulkę (jej ciężar) będzie bardzo szybko rosła z wielkością kulki, opór zaś stosunkowo powoli. Im większa zatem kulka, tym większej prędkości nabierze, zanim opór zrówna się z ciężarem. Większe krople deszczu zawsze szybciej spadają niż małe. Jeżeli kulki mają bardzo małe rozmiary, to ciężar ich jest bardzo mały, a opór środowiska bardzo znaczny. Toteż małe kuleczki wody tworzące mgłę spadają tak wolno, że ruch ich jest prawie niewidoczny. Drobne pyłki zawieszone w powietrzu spadają w spokojnym powietrzu godzinami tworząc po dłuższym czasie warstwę kurzu na meblach w pokoju.

Zadania

8.1. Jakie ciśnienie p trzeba wytworzyć w sikawce, aby woda wytryskiwała na wysokość $h = 10$ m przy zewnętrznym ciśnieniu atmosferycznym $p_0 = 740$ Tr?

O d p o w i e d ź: $p = p_0 + \varrho g h = 1{,}967 \cdot 10^6$ dyn/cm² ≈ 2 kG/cm².

8.2. Jaka będzie prędkość wypływu cieczy z beczki przez otwór znajdujący się o $h = 60$ cm pod powierzchnią swobodną cieczy?

O d p o w i e d ź: $v = \sqrt{2gh} = 343$ cm/sec $= 3{,}43$ m/sec.

8.3. Przy ustalonym prądzie cieczy w rurze o zmiennym przekroju, w miejscu, gdzie średnica rury $d_1 = 18$ cm, prędkość $v_1 = 25$ cm/sec. Jaka jest prędkość v_2 cieczy w miejscu, gdzie średnica rury $d_2 = 6$ cm?

O d p o w i e d ź: $v_2 = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2} = 225$ cm/sec.

8.4. W rurze poziomej o średnicy $d_1 = 5$ cm płynie woda z prędkością $v_1 = 40$ cm/sec przy ciśnieniu $p_1 = 2$ at (kg/cm²). W dalszej części rura jest węższa i w niej panuje ciśnienie $p_2 = 1{,}8$ at. Jaka jest prędkość v_2 wody w wąskiej części rury i jaka jej średnica?

Odpowiedź: $v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\varrho} + v_1^2} \approx 628$ cm/sec; $d_2 = d_1 \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} = 1{,}3$ cm

8.5. W rurze poziomej o zmiennym przekroju płynie woda ruchem ustalonym. W miejscu, gdzie średnica rury $d_1 = 6$ cm, prędkość wody $v_1 = 1$ m/sec, ciśnienie 1,5 at (kG/cm²). Jakie ciśnienie panuje w miejscu, gdzie średnica rury $d_2 = 2$ cm?

Odpowiedź: $p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \varrho(v_2^2 - v_1^2) = 1{,}09$ at.

8.6. Na jaką wysokość podniesie się woda w rurce pionowej, której dolny koniec zanurzony jest w zbiorniku z wodą, górny zaś połączony z wąską częścią rury poziomej, przez którą przepływa woda, jeżeli w szerokiej części rury o średnicy $d_1 = 3$ cm prędkość wody $v_1 = 60$ cm/sec przy ciśnieniu $p_1 = 1{,}1$ at (kG/cm²), wąska zaś część rury ma średnicę $d_2 = 1$ cm? (zewnętrzne ciśnienie atmosferyczne $p_0 = 740$ Tr).

Odpowiedź: $$h = \frac{p_0 + \frac{1}{2} v_1^2 \left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1\right] - p_1}{\varrho g} = 52{,}4 \text{ cm.}$$

Pytania do powtórzenia materiału

1. W czym objawia się lepkość cieczy? Co to jest współczynnik lepkości?
2. Jaki ruch cieczy nazywamy ustalonym? Co nazywamy liniami prądu?
3. Od czego zależy prędkość cieczy wypływającej przez otworek z naczynia? Jak otrzymać wzór na prędkość?
4. Jaka jest prędkość cieczy wypływającej przez otworek w dnie naczynia?
5. Jak się zmienia prędkość cieczy płynącej przez rurę o zmiennym przekroju?
6. Jak zmienia się ciśnienie wzdłuż takiej rury? Jakie są zastosowania tych zjawisk?
7. Jaka jest treść prawa Bernoulliego?
8. Jak się zmienia ciśnienie wzdłuż rury przy przepływie cieczy rzeczywistej?
9. Jaki ruch nazywamy laminarnym? Jak się porusza ciecz w rurkach włoskowatych? Od jakich czynników zależy średnia prędkość cząstek cieczy przepływającej przez rurkę włoskowatą?
10. Jakie są cechy ruchu burzliwego cieczy? Co określa liczba Reynoldsa?
11. Kiedy występuje zjawisko reakcji cieczy? Jak wykorzystano to zjawisko?
12. Od czego zależy opór środowiska? Jak się poruszają w środowisku ciekłym lub gazowym ciała, na które działa siła stała?

9. Ciepło

9.1. Temperatura. W życiu potocznym używamy terminów: zimny, ciepły, letni, gorący. Za pomocą tych terminów wyrażamy porównanie pewnej własności ciał, dla odczuwania której mamy odpowiedni zmysł. Gdy mamy przed sobą dwa ciała *A* i *B*, to dotykając ich po kolei możemy stwierdzić, że albo:

1) ciało *A* jest cieplejsze od ciała *B*, albo
2) ciało *A* jest zimniejsze od ciała *B*, albo
3) ciała *A* i *B* są jednakowo ciepłe.

Zamiast mówić: ciało *A* jest cieplejsze od ciała *B*, wyrażamy się w nauce: ciało *A* ma wyższą temperaturę od ciała *B*. Gdy są jednakowe ciepłe, mówimy, że mają jednakowe temperatury.

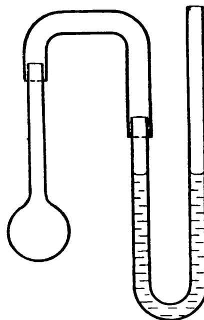
Zasadniczy jest tu fakt następujący: gdy dwa ciała *A* i *B* znajdują się w zetknięciu albo nawet tylko w sąsiedztwie i ciało *A* ma wyższą temperaturę od ciała *B*, wówczas ciało *A* ochładza się, a ciało *B* się ogrzewa. Jak wyrażamy się często obrazowo, ciepło przechodzi od ciała *A* do ciała *B*. Gdy ciała te są w zetknięciu dostatecznie długo, to ich temperatury się wyrównują. Wykluczyć przy tym trzeba ciała, które nazywamy źródłami ciepła, takie jak palący się węgiel, palący się gaz — ciała, które właśnie łączą się chemicznie, jak również ciała promieniotwórcze.

Gdy więc ciało nie będące źródłem ciepła jest otoczone ciałami o jednakowej temperaturze (nie przepuszczającymi promieniowania, patrz 9.33), to po dostatecznie długim czasie przybiera ono temperaturę otoczenia.

9.2. Zmiany własności ciał pod wpływem zmian temperatury. Doświadczenia stwierdzają, że przy ogrzewaniu lub oziębianiu ciał wszystkie ich własności ulegają zmianie. Zmieniają się więc: objętość, masa właściwa, ściśliwość, sztywność, wytrzymałość, lepkość, opór elektryczny itd. W szczególności ważne są dla nas zmiany rozmiarów ciał przy ogrzewaniu. Sztaby lub pręty z materiałów stałych przeważnie wydłużają się. Ciała ciekłe w większości wypadków powiększają swoją objętość. Gazy zamknięte w stałej objętości powiększają ciśnienie przy ogrzewaniu, przy stałym zaś ciśnieniu zewnętrznym powiększają swoją objętość.

9.3. Termoskopy i termometry. Termometr rtęciowy. Jakkolwiek możemy porównywać temperatury różnych ciał bezpośrednio przez dotknięcie, to

jednak bardzo łatwo mylimy się w ich ocenie. Nie możemy zaś w ogóle porównywać temperatur bardzo wysokich (ciał gorących, rozpalonych) ani bardzo niskich, przy których nasz zmysł ciepła zawodzi. Również nie możemy porównywać temperatur, jeżeli nasze oceny oddzielone są dłuższym odstępem czasu. Opierając się na fakcie zmian różnych własności ciał przy zmianach temperatury można zbudować przyrządy służące do porównywania temperatur. Przyrządy takie nazywamy termoskopami. Najprostszymi termoskopami są: bańka szklana napełniona powietrzem, połączona z manometrem (rys. 9.1) lub też bańka szklana zakończona rurką włoskowatą, napełniona cieczą (rys. 9.2). Żeby na wskazania tego ostatniego termoskopu nie wpływały zmiany ciśnienia atmosferycznego, zwykle zatapia się rurkę włoskowatą.
Termoskop zaopatrzony w skalę sporządzoną według jakiejkolwiek powszechnie uznanej zasady nazywamy termometrem. Używane obecnie termometry najczęściej napełnione są rtęcią, która ma tę zaletę, że ciśnienie jej pary jest znikomo małe w zwykłych temperaturach i że jej temperaturę wrzenia od temperatury krzepnięcia oddziela stosunkowo duży odstęp. Używaną obecnie powszechnie skalą termometryczną jest skala stustopniowa, zwana zwykle skalą Celsjusza. Oparta jest ona na dwóch zasadniczych temperaturach: topnienia lodu i wrzenia wody. Sporządza się ją w sposób następujący: najpierw umieszcza się termoskop w drobno potłuczonym topniejącym lodzie. Tam, gdzie się zatrzyma słupek rtęci, robi się kreskę oznaczając ją numerem 0. Następnie umieszcza się termoskop w parze wrzącej wody (pod ciśnieniem 760 mmHg). Gdy słupek rtęci zatrzyma się, znowu robi się kreskę w miejscu, gdzie słupek się kończy, i oznacza się numerem 100. Odstęp między kreskami 0 i 100 dzieli się na 100 równych części. Następnie przedłuża się otrzymaną podziałkę poniżej 0 i powyżej 100. Odstęp między kreskami nazywamy stopniem. Oznacza się go symbolem °C. W ten sposób otrzymaną skalę temperatur nazywamy skalą rtęciową stustopniową zwaną również skalą Celsjusza. Używana jest ona w życiu potocznym i przy pomiarach, w których temperatura gra drugorzędną rolę.



Rys. 9.1. Termoskop gazowy



Rys. 9.2. Termoskop z cieczą

W ten sposób określona temperatura nie jest wielkością w zwykłym znaczeniu tego słowa używanym w fizyce. Można wprawdzie określić, kiedy dwie temperatury są równe, również można określić, która temperatura jest wyższa, ale nie ma sensu dodawanie temperatur. Nie miałoby także sensu powiedzenie, że jakaś temperatura t_1 jest dwa czy trzy razy większa od temperatury t_2.

Należy dokładnie odróżniać pojęcie temperatury od pojęcia ilości ciepła, o której będzie mowa w ust. 9.14. Ilość ciepła jest wielkością fizyczną, którą możemy mierzyć odpowiednią jednostką. Temperatury zaś możemy tylko porównywać.

W dokładnych pomiarach naukowych obowiązuje tzw. skala termodynamiczna temperatur, którą się wyznacza przeważnie drogą elektrycznych pomiarów. Będzie o niej mowa w termodynamice. Różnice między skalą rtęciową a termodynamiczną w zakresie od 0° do 100° są niewielkie. Termometry rtęciowe cechowane przez odpowiednie urzędy (u nas Główny Urząd Miar) nie powinny się różnić w tym zakresie więcej od skali termodynamicznej niż o parę dziesiątych stopnia. Przy wysokich temperaturach różnice dochodzą do paru stopni. Termometry laboratoryjne mają często podziałkę dzieloną na piąte lub dziesiąte części stopnia.

Oczywiście wskazania termometru zależą od j e g o temperatury. Termometr wskazuje zawsze temperaturę własną, a o temperaturze otoczenia wnioskujemy, że równa się temperaturze termometru, gdy ten ostatni znajduje się dostatecznie długo w zetknięciu z otoczeniem (i gdy nie pada nań bezpośrednio promieniowanie, np. światło słoneczne).

Temperaturze przypisujemy liczbę wymiarową niezależną od liczb wymiarowych długości, masy i czasu. Oznaczamy ją zwykle literą [t].

Wyrabia się również termometry napełniane alkoholem, do niskich temperatur zaś — pentanem. Ponieważ alkohol czy inna ciecz użyta do napełnienia termometru nieco inaczej się rozszerza w różnych temperaturach niż rtęć, to takie termometry zgadzają się z rtęciowym tylko w temperaturach 0° i 100°. W pośrednich temperaturach ich wskazania się różnią.

9.4. Rozszerzalność liniowa i objętościowa. Łatwo się przekonać za pomocą prostych doświadczeń, że długość prętów z rozmaitych materiałów zmienia się jednocześnie ze zmianą temperatury. Przeważnie powiększa się przy ogrzewaniu. Przy niewielkich zmianach temperatury przyrost długości jest proporcjonalny do przyrostu temperatury oraz do pierwotnej długości pręta.

Weźmy pod uwagę pręt umieszczony w topniejącym lodzie, to znaczy posiadający temperaturę 0°C. Oznaczmy jego długość symbolem l_0. Po ogrzaniu do temperatury $t°$ pręt się wydłuży i uzyska długość l_t. Możemy napisać:

$$l_t - l_0 \sim l_0 \quad \text{oraz} \quad l_t - l_0 \sim t.$$

Wprowadzając współczynnik proporcjonalności α zależny od rodzaju materiału, z którego pręt jest zrobiony, możemy napisać

$$l_t - l_0 = \alpha l_0 t, \tag{9.1}$$

skąd

$$\boxed{l_t = l_0(1 + \alpha t).} \tag{9.2}$$

Z równania (9.1) możemy określić współczynnik α. Otrzymamy

$$\alpha = \frac{l_t - l_0}{l_0 t}. \tag{9.3}$$

Tak określony współczynnik nazywamy średnim współczynnikiem rozszerzalności liniowej materiału pręta pomiędzy temperaturami 0° i t°. Jest to, jak widać, średni przyrost długości przypadający na jednostkę pierwotnej długości i na jeden stopień ogrzania.

Ze względu na to, że współczynnik rozszerzalności jest bardzo małą wielkością dokładny jego pomiar wymaga bardzo czułych przyrządów. Najdokładniejszą metodą jest pomiar długości pręta za pomocą komparatora, tj. dwóch mikroskopów, z których każdy zaopatrzony jest w mikrometr, tzn. podziałkę pozwalającą odczytywać setne części mm. Mikroskopy skierowuje się na kreski zrobione na pręcie zanurzonym w kąpieli w odpowiedniej temperaturze. Z porównania długości przy dwóch znanych temperaturach t_1 i t_2 można obliczyć współczynnik rozszerzalności. Tabela 9.1 zawiera współczynniki rozszerzalności liniowej niektórych ciał.

Tabela 9.1

Współczynniki rozszerzalności liniowej różnych materiałów

Materiał	α	Materiał	α
Kwarc topiony (szkło kwarcowe)	0,0000006	Cynk mikrokrystaliczny	0,000036
Dąb		Miedź	0,000014
‖ do włókien	0,000005	Kryształ górski (kwarc)	
⊥ „ „	0,000054	⊥ do osi kryst.	0,000016
Szkło	0,000008	‖ „ „ „	0,0000096
Platyna	0,000009	Mosiądz	0,000019
Żelazo	0,000012	Glin	0,000023
Cynk		Kalcyt (szpat islandzki)	
⊥ do osi kryst.	0,000013	‖ do osi	0,000026
‖ „ „ „	0,000064	⊥	−0,000006

Jak widać z powyższej tabeli, niektóre ciała, jak kryształ górski, drewno, kalcyt, cynk krystaliczny mają w różnych kierunkach różne współczynniki rozszerzalności. Takie ciała, których rozmaite własności w różnych kierunkach są różne, nazywamy ciałami anizotropowymi, w odróżnieniu od ciał izotropowych, w których różne kierunki nie różnią się pod względem własności*.

* Po grecku ἴσος (izos) oznacza równy, ten sam
ἄνισος (anizos) „ nierówny
τροπος (tropos) „ kierunek

Do ciał anizotropowych należy drewno, a przede wszystkim kryształy. Do ciał izotropowych — takie ciała jak szkło, kwarc topiony, większość cieczy. Metale mają zwykle strukturę mikrokrystaliczną, to znaczy składają się z drobnych kryształków i w większej masie zachowują się jak ciała izotropowe (wyjąwszy przypadki, gdy kryształki te są częściowo skierowane w pewnym kierunku, jak to następuje np. przy wyciąganiu drutów, przy walcowaniu blach itp.).

Niektóre ciała, jak np. kauczuk kurczą się przy ogrzewaniu, a więc mają współczynnik rozszerzalności ujemny.

Średni współczynnik rozszerzalności zależy od granic temperatur, między którymi jest mierzony. A więc np. dla glinu

$\alpha =$ 0,0000238 między 20° C i 100° C
0,0000247 „ 20° C i 200° C
0,0000257 „ 20° C i 300° C

Gdy rozmiary ciał przy ogrzewaniu zmieniają się, to oczywiście zmienia się również ich objętość.

Średnim współczynnikiem rozszerzalności objętościowej nazywamy średni przyrost objętości ciała przypadający na jednostkę pierwotnej objętości i na jeden stopień ogrzania przy niezmiennym ciśnieniu zewnętrznym*. Oznaczając

objętość ciała przy temperaturze 0° C przez V_0,
zaś „ „ „ „ „ t° C „ V_t

otrzymamy na średni współczynnik rozszerzalności objętościowej wzór

$$\gamma = \frac{V_t - V_0}{V_0 t}. \tag{9.4}$$

Rys. 9.3. Gdy każda krawędź sześcianu wydłuża się podczas ogrzewania, jego objętość rośnie

Ze związku (9.4) otrzymujemy wzór

$$\boxed{V_t = V_0 (1 + \gamma t),} \tag{9.5}$$

który daje zależność objętości cieczy od temperatury.

Między współczynnikiem rozszerzalności liniowej a współczynnikiem rozszerzalności objętościowej istnieje prosty związek. Aby go znaleźć, wyobraźmy sobie sześcian z badanego materiału umieszczony w topniejącym lodzie, a więc w temperaturze 0°C. Niech jego krawędź będzie l_0, a objętość V_0 (rys. 9.3). Gdy ogrzejemy sześcian do temperatury t°, każda jego krawędź wydłuży się i przybierze długość l_t. Jak już wiemy,

$$l_t = l_0 (1 + \alpha t). \tag{9.6}$$

Jednocześnie objętość oczywiście też się powiększy. Oznaczmy ją po ogrzaniu przez V_t. Między V_t i V_0 mamy związek (9.5). Między objętością sześcianu

* Podczas ogrzewania ciśnienie zewnętrzne powinno być stałe, gdyż jak już wiemy, zmiany ciśnienia również wywołują zmiany objętości ciał.

i długością jego krawędzi istnieje, jak wiadomo z geometrii, prosty związek, że objętość równa się sześcianowi krawędzi. Możemy więc napisać

$$V_0 = l_0^3 \quad \text{i} \quad V_t = l_t^3.$$

Podstawiając te wartości do równania (9.5) otrzymamy

$$l_t^3 = l_0^3 (1 + \gamma t).$$

Podstawiając na l_t wartość z równania (9.6) otrzymamy

$$l_0^3 (1 + \alpha t)^3 = l_0^3 (1 + \gamma t),$$

skąd

$$1 + 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3 = 1 + \gamma t. \tag{9.7}$$

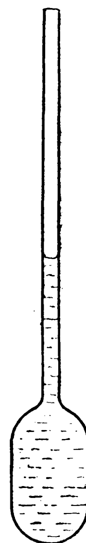
Wyrazy $3\alpha^2 t^2$ i $\alpha^3 t^3$ zawierające wyższe potęgi bardzo małej wielkości α możemy opuścić jako bardzo małe wobec wyrazu $3\alpha t$. Wtedy otrzymamy ostatecznie równanie: $3\alpha t = \gamma t$, skąd otrzymujemy

$$3\alpha = \gamma. \tag{9.8}$$

Współczynnik rozszerzalności objętościowej równa się potrójnemu współczynnikowi rozszerzalności liniowej.

Współczynniki rozszerzalności na ogół wzrastają przy wzroście temperatury.

9.5. Rozszerzalność cieczy. Gdy chodzi o ciecze, to zwykle badamy zmiany ich objętości ze zmianą temperatury. Do bezpośredniego pomiaru przyrostu objętości cieczy przy ogrzewaniu używamy przyrządów zwanych dilatometrami (rys. 9.4). Dilatometr jest to bańka szklana zwykle kształtu cylindrycznego, do której dolutowana jest wąska rureczka. Dilatometr kalibruje się przed pomiarem, tzn. mierzy się, jakiemu przyrostowi pojemności dilatometru odpowiada podniesienie się o daną wysokość słupka cieczy w rurce.



Rys. 9.4. Dilatometr do mierzenia rozszerzalności cieczy

Znając objętość dilatometru w temperaturze topniejącego lodu V_0 i przyrost objętości $V_t - V_0$ możemy obliczyć współczynnik rozszerzalności

$$\gamma = \frac{V_t - V_0}{V_0 t}.$$

Przy pomiarach trzeba brać pod uwagę rozszerzalność samego naczynia (jeżeli naczynie jest zrobione z kwarcu topionego, to ze względu na bardzo małą rozszerzalność kwarcu można tego nie uwzględniać).

Tabela 9.2 zawiera przykłady współczynników rozszerzalności objętościowej.

Porównanie tabel 9. 1 i 9. 2 łatwo pozwala stwierdzić, że współczynniki rozszerzalności cieczy są przeważnie znacznie większe niż ciał stałych. Tak. np. alkohol rozszerza się 45 razy więcej niż szkło.

Tabela 9.2

Współczynniki rozszerzalności objętościowej cieczy

Ciecz	γ	Ciecz	γ
Woda 10°—20°	0,00015	Nafta	0,00096
20°—40°	0,00030		
Rtęć	0,000181	Alkohol etylowy	0,00110
Gliceryna	0,00049	Eter etylowy	0,00162

9.6. Zmiana masy właściwej ciał z temperaturą. Siły występujące przy przeciwdziałaniu zmianom rozmiarów ciał. Między masą właściwą i objętością ciała mieliśmy związek

$$\varrho = \frac{m}{V}. \tag{9.9}$$

Ponieważ objętość ciała przy ogrzewaniu rośnie, masa właściwa ze wzrostem temperatury maleje. Podstawiając do wzoru (9.9) wyrażenie na objętość w temperaturze t° otrzymamy na masę właściwą w temperaturze t° wzór

$$\varrho_t = \frac{m}{V_0(1+\gamma t)} = \frac{\varrho_0}{1+\gamma t}. \tag{9.10}$$

Ze względu na bardzo małą wartość współczynnika rozszerzalności możemy napisać wzór przybliżony:

$$\varrho_t = \varrho_0(1-\gamma t)^*. \tag{9.11}$$

Jeżeli przy ogrzewaniu ciała lub przy jego oziębianiu przeciwstawimy się zmianom rozmiarów ciała, powstają przy rozszerzaniu się lub przy kurczeniu ciał bardzo wielkie siły, z którymi zawsze trzeba się liczyć w praktyce i w technice. Druty telegraficzne muszą mieć w lecie odpowiedni zwis, aby się mogły skurczyć w zimie, między szynami zostawia się zawsze niewielki odstęp, aby w lecie mogły się rozszerzyć**. Tak samo przewiduje się przy mostach możliwość rozszerzania się przęseł itd. Butelek nigdy się nie napełnia szczelnie cieczą, gdyż przy podwyższeniu temperatury ze względu na większą rozszerzalność cieczy niż szkła butelka zostałaby rozerwana.

* Dzieląc ϱ_0 przez $1+\gamma t$ według zwykłej reguły dzielenia wielomianów otrzymujemy: $\varrho_0(1-\gamma t+\gamma^2t^2-\gamma^3t^3+\ldots)$ i odrzucając wyrazy wyższych stopni począwszy od drugiego otrzymujemy $\varrho_0(1-\gamma t)$.

** Odnosi się to do szyn kolejowych, które, gdyby nie pozostawiono odstępu do rozszerzania, mogłyby ulec tzw. wyboczeniu (wygięciu w bok). Szyny tramwajowe wbetonowane w jezdnię nie mogą ulec wyboczeniu, toteż są zwykle spawane.

9.7. Rozszerzalność wody. Woda pod względem rozszerzalności stanowi wyjątek pomiędzy innymi ciałami ciekłymi, ponieważ w zakresie temperatur od 0°C do 4°C (dokładnie do 3,98°C) zmniejsza swoją objętość przy podwyższaniu temperatury. Po przekroczeniu temperatury 4°C woda rozszerza się ze wzrostem temperatury tak jak i inne ciecze.

Poniższa tabela podaje objętość 1 kg wody przy różnych temperaturach.

Tabela 9.3

Objętość 1 kg wody w różnych temperaturach

Temperatura w °C	Objętość w litrach	Temperatura w °C	Objętość w litrach	Temperatura w °C	Objętość w litrach
0	1,00013	3	1,00001	6	1,00003
1	1,00007	4	1,00000	7	1,0001
2	1,00003	5	1,00001	10	1,0018

Ponieważ masa właściwa jest odwrotnie proporcjonalna do objętości, masa właściwa wody będzie największa przy temperaturze +4°C (dokładnie 3,98°C). Tak przy niższych jak i przy wyższych temperaturach masa właściwa wody jest mniejsza. Wskutek tego woda o temp. 4°C zbiera się na dnie głębokich jezior i stawów. Chłodniejsza woda jako lżejsza pływa po niej, wreszcie zamarza na powierzchni. Tabela 9.4 podaje masy właściwe wody w gramach na mililitr w różnych temperaturach.

U w a g a. 1 mililitr $= \frac{1}{1000}$ litra. Litr zaś jest to objętość 1 kg wody w temperaturze +4°C przy ciśnieniu 760 mmHg. Litr nie jest identyczny z decymetrem sześciennym. 1 litr = 1,000 028 dm³. Jeżeli wielka dokładność nie jest wymagana, to oczywiście można uważać te jednostki za równe.

Tabela 9.4

Masa właściwa wody

Temperatura w °C	Masa właściwa w $\frac{\text{gramach}}{\text{mililitr}}$	Temperatura w °C	Masa właściwa w $\frac{\text{gramach}}{\text{mililitr}}$	Temperatura w °C	Masa właściwa w $\frac{\text{gramach}}{\text{mililitr}}$
0	0,99987	5	0,99999	10	0,99973
1	0,99993	6	0,99997	12	0,99953
2	0,99997	7	0,99993	20	0,99823
3	0,99999	8	0,99988	30	0,99567
4	1,00000	9	0,99981	40	0,9922
				100	0,9584

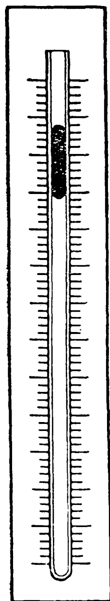
Maksimum masy właściwej wody wypada przy innej temperaturze, gdy woda zawiera jakieś składniki rozpuszczone. Tak np. woda morska ma maksimum masy właściwej przy temperaturze około +2°C. Położenie maksimum masy właściwej zależy również od ciśnienia. Przy wzroście ciśnienia o 1 atmosferę temperatura maksimum gęstości obniża się o 0,025°.

9.8. Rozszerzalność gazów. Współczynnik objętościowej rozszerzalności gazów określamy w taki sam sposób, jak dla cieczy i ciał stałych:

$$\gamma = \frac{V_t - V_0}{V_0 t}. \tag{9.12}$$

Oczywiście podczas ogrzewania ciśnienie, pod jakim znajduje się gaz, musi być niezmienne, gdyż, jak wiemy, zmiany ciśnienia wywołują bardzo znaczne zmiany objętości gazu.

Najprostszym sposobem pomiaru współczynnika rozszerzalności gazu jest zamknięcie pewnej objętości danego gazu znajdującego się w zatopionej na jednym końcu wąskiej rurce szklanej (o średnicy około 2 mm) za pomocą kropli rtęci (rys. 9.5). Rurkę z przymocowaną do niej podziałką umieszcza się w topniejącym lodzie i notuje położenie górnej granicy słupka rtęci zamykającego gaz. Następnie umieszcza się rurkę w koncentrycznej szerszej rurze, przez którą przepuszcza się parę wrzącej wody. Przyrost objętości jest proporcjonalny do przemieszczenia słupka rtęci.



Rys. 9.5. Prosty aparat do pomiaru rozszerzalności gazów

Badania Charlesa i Gay-Lussaca (czytaj Szarlsa i Gej-Liussaka) wykazały, że pod względem rozszerzalności gazy różnią się wybitnie od ciał stałych i cieczy. Jak wiadomo, ciała tak stałe, jak i ciekłe mają rozmaite współczynniki rozszerzalności. Są między nimi duże indywidualne różnice. Natomiast wszystkie gazy mają ten sam współczynnik rozszerzalności

$$\gamma = \frac{1}{273}.$$

Fakt ten zwany jest zwykle prawem Gay-Lussaca, chociaż wykryty był już dawniej przez innych fizyków. Można by prawo to wypowiedzieć w takiej formie: zależność objętości przy stałym ciśnieniu od temperatury jest dana przez równanie

$$\boxed{V_t = V_0 (1 + \gamma t),} \tag{9.13}$$

gdzie γ ma tę samą dla wszystkich gazów wartość równą $\frac{1}{273}$.

9.9. Równanie stanu gazów. Rozprężliwość gazów. Niech objętość gazu przy temperaturze 0° będzie V_0, a ciśnienie — p_0. Ogrzejmy najpierw gaz pod stałym ciśnieniem do temperatury $t°$. Objętość gazu zmieni się i przybierze wartość V_t. Następnie nie zmieniając temperatury zmieńmy objętość na V. Zatem

przy temperaturze 0°C gaz posiada objętość V_0, ciśnienie p_0;
„ „ $t°$ „ „ „ V_t, „ p_0;
„ „ $t°$ „ „ „ V, „ p.

Do pierwszego przebiegu możemy zastosować prawo Gay-Lussaca i napisać

$$V_t = V_0 (1 + \gamma t).$$

Do drugiego zaś stosuje się prawo Boyle'a, a zatem

$$\boxed{pV = p_0 V_0 (1 + \gamma t).} \tag{9.14}$$

Równanie to nazywa się **równaniem** stanu gazów. Zawiera ono w sobie tak prawo Boyle'a, jak i prawo Gay-Lussaca. Zakładając bowiem, że temperatura gazu jest stała, otrzymujemy z niego

$$pV = \text{const} \qquad \text{(prawo Boyle'a).}$$

Zakładając, że ciśnienie podczas ogrzewania gazu jest stałe: $p = p_0 = \text{const}$, otrzymujemy

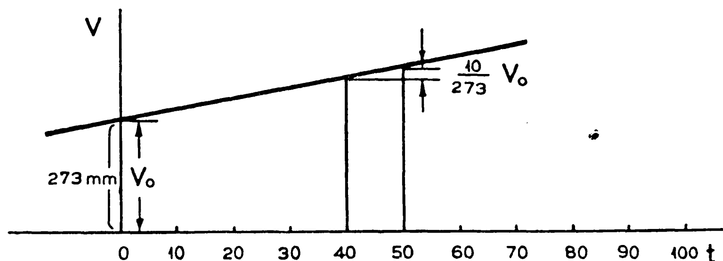
$$V = V_0 (1 + \gamma t) \qquad \text{(prawo Gay-Lussaca).}$$

Zakładając wreszcie, że objętość podczas ogrzewania gazu jest stała: $V = V_0 = \text{const}$, otrzymujemy trzecie prawo będące konsekwencją tamtych dwóch:

$$p = p_0 (1 + \gamma t), \tag{9.15}$$

to znaczy że gdy gaz jest zamknięty w stałej objętości i ogrzewamy go, wówczas przy podwyższeniu jego temperatury o 1°C ciśnienie wzrasta o $\frac{1}{273}$ część tego ciśnienia, jakie miał przy temperaturze 0°C.

Trzeba tu podkreślić, że tak przyrost objętości, jak i przyrost ciśnienia przy ogrzewaniu gazu są odniesione do jego objętości i ciśnienia w temperaturze 0°C,



Rys. 9. 6. Wzrost objętości gazu w zależności od temperatury

tzn. do temperatury topniejącego lodu. Funkcja przedstawiająca objętość gazu w zależności od temperatury jest funkcją liniową. W układzie współrzędnych V, t wykresem jej będzie linia prosta. Przyrost wielkości wynosi $\frac{V_0}{273}$ na jeden stopień (rys. 9.6). Gdybyśmy za objętość odniesienia przyjęli jakąś inną objętość niż przy 0°C, współczynnik γ byłby inny. Gdybyśmy np. przyrost objętości

gazu odnieśli do objętości, jaką ma on przy temperaturze $+20°C$, to współczynnik rozszerzalności byłby $\frac{1}{293}$.

Dokładne pomiary rozszerzalności różnych gazów, zmian ich ciśnienia przy stałej objętości przy zmianach temperatury oraz zmian ciśnienia ze zmianą objętości stwierdziły, że tak prawo Boyle'a, jak i prawo Gay-Lussaca są prawami przybliżonymi. Według prawa Boyle'a, iloczyn pV ma przy stałej temperaturze stałą wartość. Tymczasem pomiary Regnaulta, Amagata i Witkowskiego stwierdziły, że przy dużych zmianach ciśnienia iloczyn ten stopniowo się zmienia. Gdy więc np. tak dobierzemy ilość powietrza, aby iloczyn pV (w temperaturze 0°C) przy ciśnieniu 1 atmosfery równał się jednostce, to przy ciśnieniach:

	10 Atm	100 Atm	200 Atm	500 Atm
pV ma wartość:	0,9951	0,9681	1,0100	1,3400

Podobnie rzeczy się mają z rozszerzalnością. Bardzo dokładne pomiary wykazały, że współczynniki rozszerzalności różnych gazów nieco się różnią między sobą, również różnią się współczynniki przyrostu ciśnienia przy wzroście temperatury w równaniu (9.15), które by można nazwać współczynnikami rozprężliwości, przy tym współczynniki rozszerzalności nieco się różnią od współczynników rozprężliwości. Należałoby więc zamiast równania (9.15) napisać równanie

$$p = p_0 (1 + \beta t), \tag{9.16}$$

gdzie β ma nieco inną wartość niż γ. Pomiar współczynnika rozprężliwości gazów można wykonać za pomocą termometru gazowego, który opisany będzie później.

W tabeli 9. 5 wymienione są oba współczynniki γ i β dla kilku gazów.

Tabela 9.5

Współczynniki rozszerzalności γ (0° — 100°) i współczynniki rozprężliwości β gazów pod ciśnieniem 1 metra rtęci

Gaz	γ	β	Gaz	γ	β
Powietrze	0,00 3674	0,00 3675	Hel	0,00 3658	0,00 3660
Azot	0,00 3673	0,00 3674	Neon	—	0,00 3661
Wodór	0,00 3659	0,00 3662	CO_2	0,00 3741	0,00 3726

Przy zmniejszaniu się gęstości gazów, a więc przy zmniejszaniu ciśnienia oba współczynniki dla wszystkich gazów różnią się coraz mniej między sobą dążąc do wspólnej granicy

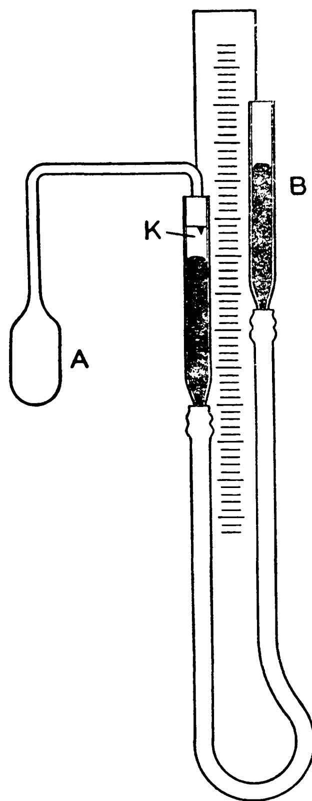
$$\frac{1}{273,15} = 0,003661.$$

Podana poprzednio wartość współczynnika γ jest przybliżona, używana jednak często przy obliczeniach, gdy nie jest potrzebna wielka dokładność.

Często przeprowadzamy rozumowania nad gazem, który w rzeczywistości nie istnieje, a który sobie tylko wyobrażamy — nad takim mianowicie, który

się stosuje w każdej temperaturze i pod wszelkim ciśnieniem do prawa Boyle'a i Gay-Lussaca, to znaczy, którego zachowanie określałoby dokładnie równanie (9.14). Gaz taki nazywamy gazem doskonałym albo gazem idealnym, a równanie to — równaniem stanu gazu idealnego. To określenie gazu doskonałego będzie jeszcze uzupełnione w ust. 10.4. Przy ciśnieniach niewysokich, zbliżonych do 1 atmosfery lub mniejszych, i przy temperaturach wyższych od 0°C możemy obliczenia odnoszące się do gazów rzeczywistych dokonywać stosując równanie stanu gazu idealnego. W tych warunkach takie gazy, jak powietrze, tlen, azot, wodór, hel, neon i wiele innych bardzo niewiele różnią się w swym zachowaniu od gazu doskonałego.

9.10. Termometr gazowy. Skala gazowa temperatur. Przez długi czas, mianowicie od r. 1887 do 1924 obowiązywała tzw. skala gazowa temperatur, przyrządem zaś, za pomocą którego inne termometry były cechowane, był termometr gazowy. Składa się on z bańki *A* zwykle wydłużonego kształtu szklanej lub kwarcowej napełnionej gazem (według uchwały Międzynarodowej Komisji Miar i Wag — wodorem pod ciśnieniem 1 metra rtęci) oraz z manometru, którego ramiona połączone są giętką rurką gumową (rys. 9.7). Bańka połączona jest z manometrem cienką rurką włoskowatą szklaną lub giętką, platynową. Przyrząd nastawia się zawsze tak, aby przy każdej mierzonej temperaturze gaz zajmował tę samą stałą objętość. Można to uczynić w ten sposób, że powierzchnię rtęci doprowadza się przez odpowiednie podniesienie rurki *B* manometru do zetknięcia się z kolcem *K*. Na manometrze odczytuje się ciśnienie. Oczywiście ciśnienie gazu równa się ciśnieniu wskazywanemu przez manometr plus ciśnienie barometryczne.



Rys. 9.7. Termometr gazowy

Umieszczając bańkę w topniejącym lodzie odczytujemy ciśnienie p_0 gazu. Umieszczając ją następnie w parze nad wrzącą wodą odczytujemy ciśnienie p_{100}. Dzieląc przyrost ciśnienia przez p_0 i przez 100 otrzymamy współczynnik rozprężliwości

$$\beta = \frac{p_{100} - p_0}{100 p_0}. \tag{9.17}$$

Pisząc następnie równanie

$$p_t = p_0 (1 + \beta t) \tag{9.18}$$

otrzymamy z niego na temperaturę, przy której termometr wskazuje ciśnienie p_t,

wzór

$$t = \frac{p_t - p_0}{\beta p_0}. \tag{9.19}$$

Otrzymujemy w ten sposób stustopniową skalę gazową temperatur. Z powodu nieco zmieniającego się z temperaturą współczynnika rozszerzalności rtęci skala rtęciowa nieco się różni od skali gazowej. Różnice między 0° i 100° są niewielkie, wynoszące kilka dziesiątych stopnia, powyżej 100° dochodzą do kilku stopni.

Obecnie obowiązuje skala termodynamiczna temperatur, od której skala gazowa różni się bardzo nieznacznie, zaledwie w setnych stopnia. Nieco większe różnice występują przy bardzo niskich temperaturach. Skala termodynamiczna nie różniłaby się zupełnie od skali gazowej, gdyby gaz użyty do napełnienia termometru był gazem doskonałym.

9.11. Temperatura bezwzględna. Tak zwana bezwzględna skala temperatur jest to skala gazowa (idealna, tzn. oparta na rozprężliwości gazu idealnego), różniąca się tym od zwykłej, stustopniowej, zwanej pospolicie skalą Celsjusza, że jej zero jest przesunięte względem 0° skali stustopniowej w dół o 273° (dokładniej o 273,15°). Temperatura na skali bezwględnej, którą zwykle się oznacza literą T, jest związana z temperaturą skali stustopniowej równaniem

$$T = t + 273° \qquad (\text{dokładniej } T = t + 273{,}15°).$$

Skala bezwzględna jest identyczna ze skalą termodynamiczną temperatur. Stopień na tej skali oznacza się symbolem °K. K jest to pierwsza litera nazwiska lorda Kelvina, który pierwszy zaproponował wprowadzenie skali termodynamicznej. Będzie o niej mowa w termodynamice.

Temperatura topniejącego lodu wyraża się w skali bezwzględnej liczbą 273°K temperatura wrzenia wody — 373°K.

Temperatura 0° na skali bezwzględnej, czyli — 273,15° na skali Celsjusza, nosi nazwę absolutnego albo bezwzględnego zera. W tej temperaturze gaz idealny według równania

$$p = p_0 \left(1 - \frac{273{,}15}{273{,}15}\right)$$

miałby ciśnienie równe zeru. Jest to teoretycznie najniższa możliwa temperatura — kres, do którego zbliżamy się stopniowo pokonując coraz większe trudności.

9.12. Gramatom i gramodrobina. W dalszym ciągu potrzebne nam będą pojęcia gramatomu i gramodrobiny. Chociaż zazwyczaj pojęcia te są wyjaśniane w chemii, to jednak dobrze będzie przypomnieć ich treść. Jak wiadomo, drobiną nazywamy zwykle połączenie kilku atomów siłami międzyatomowymi w jedną całość. Tak np. dwa atomy wodoru są zwykle związane w drobinę H_2. Podobnie w tlenie lub azocie istnieją drobiny O_2, N_2. W dwutlenku węgla CO_2 mamy trzy

atomy, jeden węgla i dwa — tlenu, połączone w jedną drobinę. Podobnie trzy atomy znajdują się w drobinie wody, H_2O. W wielu związkach, w szczególności organicznych, istnieją drobiny zawierające dziesiątki i setki atomów (chemicy często nazywają takie zespoły atomów cząsteczkami. Nazwa ta jest jednakże niefortunna, gdyż wyrazu tego używa się w życiu potocznym w innym znaczeniu. Mówi się np. cząsteczki kurzu, cząsteczki wody, nie rozumiejąc pod tym chemicznych połączeń atomów. W fizyce używa się bardzo często terminu „cząstka" w znaczeniu jeszcze mniejszych tworów od „cząsteczki". Mówimy np. o cząstkach alfa, cząstkach beta, które są setki tysięcy razy mniejsze od drobin).

Terminu drobina będziemy używali nawet wtedy, gdy atomy danego pierwiastka są pojedyncze, nie tworząc połączeń, jak to jest np. w tzw. gazach szlachetnych: helu (He), neonie (Ne), argonie (A) i innych. A więc drobina jest pojęciem obszerniejszym niż atom.

Ciężarem atomowym lub lepiej — masą atomową danego pierwiastka nazywamy liczbę równą stosunkowi masy atomu danego pierwiastka do $^1/_{16}$ średniej masy atomu tlenu, to znaczy, że za jednostkę masy atomowej jest przyjęta $^1/_{16}$ średniej masy atomu tlenu (jest to masa atomowa liczona według tzw. skali chemicznej. Jak to będzie wyjaśnione w drugiej części książki, tlen zawiera mieszaninę kilku odmian atomów nieco różniących się masą. W chemii mierzy się średnią mas tych atomów). Oznaczając masę atomu danego pierwiastka przez m, a masę atomu tlenu przez m_0 otrzymujemy na masę atomową liczbę

$$16\frac{m}{m_0}.$$

Jako stosunek dwóch mas jest to liczba bezwymiarowa.

Przykłady mas atomowych: H — 1,008, He — 4,003, C — 12,010, N — 14,008, O — 16, Cu — 63,57, Pb — 207,21.

Ciężarem drobinowym lub masą drobinową nazywamy stosunek masy drobiny danego pierwiastka lub związku chemicznego do $^1/_{16}$ średniej masy atomu tlenu. Stąd łatwo wywnioskować, że masę drobinową otrzymamy dodając masy atomów tworzących drobinę.

Przykłady mas drobinowych: H_2 — 2,016, He — 4,003, N_2 — 28,016, O_2 — 32, CO_2 — 44,010, H_2O — 18,016.

Gramatomem danego pierwiastka nazywamy masę tego pierwiastka zawierającą tyle gramów, ile wynosi jego ciężar atomowy. A więc 1,008 gramów wodoru stanowi gramatom wodoru, gramatom helu zawiera 4,003 gramów, gramatom węgla — 12,010 gramów itd.

Gramodrobiną danego pierwiastka lub związku chemicznego nazywamy liczbę gramów równą jego ciężarowi drobinowemu. Gramodrobiną wodoru zatem będzie masa zawierająca 2,016 g wodoru, gramodrobiną helu — 4,003 g, gramodrobiną azotu — 28,016 g, gramodrobiną CO_2 — 44,010 g, gramodrobiną H_2O — 18,016 g.

9.13. Równanie stanu gazów, w którym temperatura jest wyrażona w stopniach Kelvina. Wprowadźmy do równania stanu gazu idealnego temperaturę wyrażoną w stopniach Kelvina. Ponieważ

$$t = T - 273,$$

więc wprowadzając to wyrażenie zamiast t do równania (9.14) otrzymamy

$$pV = p_0V_0\left[1+\frac{1}{273}(T-273)\right] = p_0V_0\left(1+\frac{T}{273}-1\right),$$

skąd otrzymamy

$$pV = p_0V_0\frac{T}{273}. \qquad (9.20)$$

W mianowniku po prawej stronie mamy temperaturę topniejącego lodu. Oznaczając ją literą T_0 możemy równanie (9.20) napisać w postaci

$$\boxed{\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} = \text{const.}} \qquad (9.21)$$

Stałą występującą po prawej stronie tego równania możemy obliczyć, jeżeli zmierzymy ciśnienie p_0 i objętość V_0 danej masy gazu przy temperaturze topniejącego lodu T_0.

Jak łatwo stwierdzić, wymiar iloczynu pV równa się wymiarowi pracy:

$$[\mathrm{pV}] = [\mathrm{ml^{-1}\,t^{-2}\cdot l^3}] = [\mathrm{ml^2\,t^{-2}}] = [\mathrm{L}]\ \text{(pracy)}.$$

A więc iloczyn $\frac{p_0V_0}{T_0}$ wyrażamy w ergach na stopień.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę masy kilku gazów równe jednemu gramowi, to otrzymamy następujące wartości na wyżej wymienioną stałą:

dla tlenu	$2{,}597\cdot10^6$	ergów/stopień,
azotu	$2{,}967\cdot10^6$	„
neonu	$4{,}122\cdot10^6$	„
helu	$20{,}783\cdot10^6$	„
wodoru	$41{,}25\cdot10^6$	„
dwutlenku węgla	$1{,}877\cdot10^6$	„

Jeżeli weźmiemy do doświadczenia m gramów któregokolwiek z tych gazów, to stała po prawej stronie równania (9.21) powiększy się m razy. Otrzymamy wtedy równania następujące:

dla tlenu $\frac{pV}{T} = 2{,}597\cdot10^6\cdot m,$

azotu $\frac{pV}{T} = 2{,}967\cdot10^6\cdot m,$

dla neonu $\frac{pV}{T} = 4{,}122 \cdot 10^6 \cdot m,$

helu $\frac{pV}{T} = 20{,}783 \cdot 10^6 \cdot m,$

wodoru $\frac{pV}{T} = 41{,}25 \cdot 10^6 \cdot m,$

dwutlenku węgla $\frac{pV}{T} = 1{,}877 \cdot 10^6 \cdot m.$

O wiele prostsze stosunki otrzymamy, gdy równanie stanu napiszemy dla gramodrobiny gazu.

Napiszmy równanie stanu dla gramodrobiny każdego z wziętych poprzednio pod uwagę gazów. Otrzymamy:

dla tlenu $\frac{pV}{T} = 2{,}597 \cdot 10^6 \cdot 32 = 8{,}312 \cdot 10^7,$

azotu $\frac{pV}{T} = 2{,}967 \cdot 10^6 \cdot 28{,}02 = 8{,}314 \cdot 10^7,$

neonu $\frac{pV}{T} = 4{,}122 \cdot 10^6 \cdot 20{,}18 = 8{,}318 \cdot 10^7,$

helu $\frac{pV}{T} = 20{,}783 \cdot 10^6 \cdot 4{,}003 = 8{,}319 \cdot 10^7,$

wodoru $\frac{pV}{T} = 41{,}25 \cdot 10^6 \cdot 2{,}016 = 8{,}316 \cdot 10^7,$

dwutlenku węgla $\frac{pV}{T} = 1{,}877 \cdot 10^6 \cdot 44{,}01 = 8{,}360 \cdot 10^7.$

Jak widać, liczby po prawej stronie różnią się bardzo niewiele. Doświadczenie wykazało, że przy dużych rozrzedzeniach gazów, a więc gdy zbliżają się one we własnościach do gazu idealnego, stałe te zbliżają się do wspólnej wartości oznaczanej zwykle literą R i nazywanej stałą gazów:

$$R = 8{,}315 \cdot 10^7 \text{ erg/gramodrobinę stopień}$$
$$(\text{lub } 0{,}8475 \text{ kGm/gramodrobinę stopień}).$$

Dla gramodrobiny gazu doskonałego możemy zatem napisać równanie:

$$\frac{pV}{T} = R$$

albo

$$\boxed{pV = RT.} \tag{9.22}$$

W równaniu tym objętość musi być wyrażona w cm^3, a ciśnienie w dynach na cm^2, jeżeli stałą R wyrażamy w ergach na stopień.

Oznaczając przez μ masę jednej gramodrobiny możemy napisać równanie dla 1 grama gazu idealnego w następującej postaci:

$$pV = \frac{1}{\mu} RT, \tag{9.23}$$

zaś dla dowolnej masy m g gazu:

$$\boxed{pV = \frac{m}{\mu} RT.} \tag{9.24}$$

To ostatnie równanie nazywają często równaniem Clapeyrona. Gazy rzeczywiste przy niezbyt dużych gęstościach stosują się do tego równania.

Z równania (9.22) wynika, że jeżeli weźmiemy gramodrobiny różnych gazów pod tym samym ciśnieniem i w tej samej temperaturze, to ich objętości będą równe. Dla gramodrobiny gazu przy temperaturze 0°C (273° K) pod ciśnieniem $p_0 = 1\,\text{Atm} = 1033 \cdot 981\ \text{dyn/cm}^2$ otrzymamy

$$V_0 = \frac{RT_0}{p_0} = \frac{8{,}314 \cdot 10^7 \cdot 273}{1033 \cdot 981} = 2{,}241 \cdot 10^4\ \text{cm}^3 \approx 22{,}4\ \text{litrów.}$$

Fakt ten możemy zrozumieć przyjmując, jak to uczynił Avogadro w r. 1811, że gramodrobiny różnych gazów zawierają jednakowe liczby drobin.

Jak stwierdzono już w ustępie 7.3, gazy rzeczywiste nie stosują się dokładnie do praw Boyle'a i Gay-Lussaca. Wobec tego i do równania (9.22) nie będą się dokładnie stosować. Van der Waals z założeń teorii kinetycznej gazów wyprowadził równanie, które znacznie lepiej oddaje zachowanie się gazów. Równanie to, zwane równaniem van der Waalsa jest następujące:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \tag{9.25}$$

W równaniu tym występują wielkości stałe a i b posiadające dla każdego gazu inne wartości. Wyraz $\frac{a}{V^2}$ określa dodatkowe ciśnienie wynikające z istnienia sił przyciągających między drobinami gazu, tzw. sił spójności van der Waalsa. Wielkość b jest związana z objętością samych drobin gazu, która to objętość jest stała i niezależna od ciśnienia. Wielkość b równa jest, jak wynika z teorii, poczwórnej objętości drobin. Odgrywa ona tym większą rolę, im więcej drobiny są zagęszczone. Dla gazów bardzo rozrzedzonych, gdy objętość V jest bardzo duża, oba wyrazy dodatkowe można pominąć i z równania (9.25) van der Waalsa otrzymujemy prostsze równanie Clapeyrona.

Zadania

9.1. Pręt stalowy umieszczony w topniejącym lodzie miał długość $l_0 = 800$ mm. Po ogrzaniu go do temperatury 100°C uzyskał długość $l = 800{,}96$ mm. Jaki jest współczynnik rozszerzalności stali?

Odpowiedź: $12 \cdot 10^{-6}$ stop^{-1}.

9.2. O ile wydłuży się przęsło mostu żelaznego długości 100 m przy podwyższeniu temperatury od 0° do 20°C (współczynnik rozszerzalności żelaza = $12 \cdot 10^{-6}$ stop^{-1})?

Odpowiedź: 2,4 cm.

9.3. Jaką przerwę należy zostawić między odcinkami szyn stalowych długości 16 m, jeżeli się je układa w temperaturze $t_1 = -10$°C, a w lecie najwyższa temperatura, do której szyny się nagrzewają, wynosi $t_2 = +40$°C?

Odpowiedź: 0,96 cm.

9.4. Aby wyjąć szklany korek, który utkwił mocno w szyjce flaszki, nagrzano szybko szyjkę do temperatury 180°C. Korek zdążył się podczas tego nagrzać do 40°C. Jakiej szerokości szczelina utworzyła się między korkiem i szyjką, jeżeli średnica korka $d = 2{,}5$ cm (współczynnik rozszerzalności szkła $\alpha = 8 \cdot 10^{-6}$ stop^{-1})?

Odpowiedź: 0,014 mm.

9.5. Obliczyć prawdziwą odległość dwu miejsc, dla której znaleziono wartość 385,73 m mierząc w temperaturze 17°C miarą żelazną sprawdzoną przy temperaturze 0°C.

Odpowiedź: 385, 81 m.

9.6. Jaki ciężar byłby potrzebny, aby przedłużyć drut stalowy średnicy 1,5 mm o tyle, o ile go przedłuża ogrzanie o 50°C?

Odpowiedź: 23,3 kG.

9.7. Naczynie o objętości 3 litrów napełniono po brzegi wodą o temperaturze 20°C. Ile wody się wyleje z niego przy ogrzewaniu wody do 100°C (średni współczynnik rozszerzalności objętościowej wody $\gamma = 0{,}000415$).

Odpowiedź: 98 cm^3, prawie 0,1 litra.

9.8. O ile mniej waży 1 m^3 ołowiu w temperaturze 100°C niż ta sama objętość ołowiu w temperaturze 0°C (gęstość ołowiu w temperaturze 0°C $\varrho = 11{,}36$ g/cm^3, współczynnik rozszerzalności liniowej $29{,}4 \cdot 10^{-6}$ stop^{-1})?

Odpowiedź: 100 kG.

9.9. Przy jakiej temperaturze gęstość rtęci będzie $\varrho = 13{,}48$ g/cm^3, jeżeli przy temperaturze 10°C jej gęstość $\varrho_{10} = 13{,}57$ g/cm^3 (średni współczynnik rozszerzalności objętościowej rtęci $\gamma = 0{,}000\,178$ stop^{-1})?

Odpowiedź: 47,6°.

9.10. Jaką objętość zajmowałby w stanie normalnym gaz, którego objętość w temperaturze 23°C pod ciśnieniem 847 Tr wynosi 3 litry?

Odpowiedź: 3,084 litra.

9.11. Ile waży 1 m^3 powietrza w temperaturze -30°C pod ciśnieniem 735 Tr?

Odpowiedź: 1405 G.

9.12. Jaka masa powietrza wyjdzie z pokoju o rozmiarach 5 m × 5 m × 4 m przy podniesieniu się w nim temperatury od 10°C do 20°C, jeżeli ciśnienie atmosferyczne $b = 750$ Tr.

Odpowiedź: $\approx 4{,}3$ kg.

9. 13. Do zbiornika o pojemności 2 m^3 wtłoczono 6 kg tlenu. Jakie będzie jego ciśnienie przy temperaturze 21°C (gęstość tlenu w warunkach normalnych: 0°C 760 Tr wynosi $\varrho_0 = 0{,}001\,429$ g/cm^3 = 1,429 g/litr).

Odpowiedź: 2,27 kG/cm^2.

9. 14. Wyrazić temperatury -252°C, -190°C, $+20$°C, $+130$°C, $+970$°C w stopniach Kelvina.

Odpowiedź: 21,15°K, 83,15°K, 293,15°K, 403,15°K, 1243,15°K.

9. 15. Jaką objętość V w temperaturze 20°C i pod ciśnieniem 2 kG/cm^2 zajmą 4 gramodrobiny azotu (gęstość azotu przy temperaturze 0°C, ciśnieniu 760 Tr wynosi $\varrho_0 =$ = 1,251 g/litr).

Odpowiedź: $V \approx 49{,}7$ l.

9.14. Ilość ciepła. Jak zobaczymy później, ciepło jest energią i można by ilość ciepła mierzyć jednostkami pracy. Na razie jednak ustanowimy pojęcie ilości ciepła na drodze czysto empirycznej (doświadczalnej). Doświadczeniami przekonywamy się, że im większa jest masa ciała, tym dłużej trzeba je ogrzewać w tych samych warunkach, np. tym samym palnikiem bunzenowskim, aby ono osiągnęło daną temperaturę. Możemy zatem przyjąć, że ilość ciepła potrzebna do ogrzania danego ciała od temperatury t_1 do t_2 jest proporcjonalna do jego masy. Również przekonać się łatwo, że im wyższą temperaturę ciało ma uzyskać, tym dłużej trzeba je ogrzewać. Przyjmujemy zatem drugie założenie (jak zobaczymy później, niezupełnie poprawne), że ilość ciepła potrzebna do ogrzania ciała jest proporcjonalna do przyrostu temperatury $t_2 - t_1$ ciała, gdzie t_1 jest jego temperaturą początkową, t_2 — końcową:

$$Q \sim m \quad \text{i} \quad Q \sim t_2 - t_1.$$

Oznaczając przez c współczynnik proporcjonalności możemy napisać

$$Q = cm\,(t_2 - t_1). \tag{9.26}$$

Wartość współczynnika c zależy od wyboru jednostek. Masę i temperaturę wyrażamy w znanych jednostkach, nie mamy natomiast dotychczas jednostki ilości ciepła. Umówiono się za jednostkę ilości ciepła przyjąć ilość ciepła potrzebną do ogrzania 1 grama wody o jeden stopień. Tę ilość ciepła nazywamy kalorią (często nazywaną niesłusznie małą kalorią albo kalorią gramową). Skrótem międzynarodowym nazwy kaloria jest cal. W nauce o cieple przypisujemy zwykle ilości ciepła oddzielny wymiar. Jeżeli woda oziębia się od temperatury t_2 do t_1, to oddaje z powrotem pobrane ciepło. Oddane ciepło wyraża się tym samym wzorem (9.26). Tysiąc razy większą jednostką od kalorii jest kilokaloria, skrót kcal (w literaturze, szczególnie starszej, można spotkać nazwy: kaloria wielka lub kilogramowa, co daje powód do wielu omyłek).

Dokładne zbadanie ogrzewania wody wykazało, że ilości ciepła pobierane przez 1 g wody przy ogrzaniu o 1°C nieco różnią się w różnych temperaturach.

Dlatego do określenia kalorii dodano jeszcze warunek, że to ma być ilość ciepła potrzebna do ogrzania 1 g wody od temperatury 14,5°C do 15,5°C. Dokładniejsze jeszcze określenie kalorii daje powiązanie jej z ilością energii elektrycznej, którą zawsze łatwo można zamienić na ciepło. Tabela 9.6 podaje, ile kalorii potrzeba, aby ogrzać 1 g wody o 1°C w różnych temperaturach. Jak można z niej stwierdzić, współczynnik c (czyli ciepło właściwe wody, jak to będzie wyjaśnione w następnym ustępie) zmienia się nieco z temperaturą, lecz mało się różni od jedności.

Możemy zatem przyjąć, że średni współczynnik c dla wody równa się jednostce według równania

$$c = \frac{Q}{m(t_2 - t_1)} = 1,$$

gdy $Q = 1$, $m = 1$, $t_2 - t_1 = 1$. Jego nazwa wskazująca jednocześnie wymiar, jak wynika z powyższego równania, będzie

$$\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{stopień}}.$$

Tabela 9.6

Ciepło właściwe wody

Temperatura w °C	Ilość ciepła w cal	Temperatura w °C	Ilość ciepła w cal
0	1,0076	50	0,9988
10	1,0015	60	0,9998
15	1,0000	70	1,0009
20	0,9990	80	1,0025
30	0,9982	90	1,0046
40	0,9983	100	1,0072

Jak widać, różnice te są zresztą niewielkie i przy obliczeniach nie wymagających wielkiej dokładności można używać wartości przy 15°, bliskiej średniej wartości pobieranego przez 1 g wody ciepła.

9.15. Ciepło właściwe. Do ogrzania jednakowych mas różnych substancji od tej samej temperatury początkowej do tej samej końcowej, jak łatwo sprawdzić, potrzeba różnych ilości ciepła. Tak np. do ogrzania 100 g rtęci od temperatury 0°C do temperatury 100°C trzeba dostarczyć około trzydziestu razy mniej ciepła niż tej samej masie wody, aby ją ogrzać od tej samej temperatury początkowej do tej samej końcowej. Dla określenia zachodzących pod tym względem różnic między różnymi materiałami wprowadzamy pojęcie ciepła właściwego. Ciepłem właściwym danego materiału nazywamy ilość ciepła przypadającą na ogrzanie 1 g danego materiału o 1°C. Zatem ilość ciepła potrzebna do ogrzania m g materiału o cieple właściwym c od temperatury t_1 do temperatury t_2 wyrazi się wzorem:

$$\boxed{Q = mc(t_2 - t_1),} \tag{9.27}$$

gdzie na c należy brać średnie ciepło właściwe między temperaturami t_1 i t_2. Z tego ostatniego równania otrzymujemy na ciepło właściwe wzór:

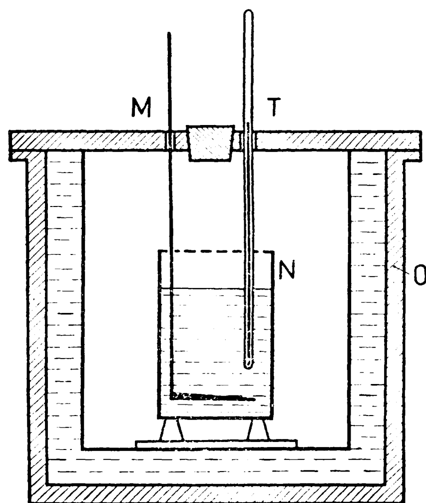
$$c = \frac{Q}{m(t_2 - t_1)}, \tag{9.28}$$

skąd widać, że ciepło właściwe wyrazi się w kaloriach na gram i stopień. Oczywiście ciepło właściwe wody przy temperaturze 15°C równa się jedności.

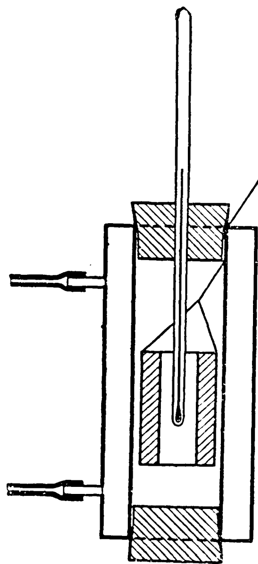
9.16. Kalorymetr. Pomiary ciepła właściwego. Do pomiarów ilości ciepła i do pomiarów ciepła właściwego używamy przyrządów zwanych kalorymetrami. Istnieją kalorymetry różnych systemów.

Przy pomiarach ilości ciepła ważną rolę odgrywają osłony zapobiegające wymianie ciepła z otoczeniem. Otaczającą ciało osłonę, która zupełnie nie przepuszcza ciepła, a więc zapobiega jego ostyganiu, nazywamy osłoną adiabatyczną. W praktyce możemy zrobić osłonę, która tylko źle przepuszcza ciepło, ale zupełnie zapobiec utracie ciepła niepodobna.

Najpospoliciej w pracowniach używany jest kalorymetr wodny. Jest to naczynie metalowe o pojemności zwykle koło ćwierć litra, napełnione wodą. Naczynie to powinno być otoczone osłoną o stałej temperaturze i możliwie nieprzepuszczającą ciepła. Robi się to zazwyczaj w ten sposób, że naczynie kalorymetryczne N, tj. właściwy kalorymetr wstawia się do większego naczynia o podwójnych ścianach, między które nalewa się wodę (rys. 9.8). Woda utrzymuje stałą temperaturę, a jednocześnie, jako zły przewodnik ciepła, zapobiega jego odpływowi. Aby



Rys. 9.8. Kalorymetr wodny
O — osłona, N — naczynie metalowe



Rys. 9.9. Termostat do kalorymetru

lepiej zapobiec wymianie ciepła z otoczeniem, zewnętrzną osłonę otacza się jeszcze wojłokiem lub filcem. W naczyniu kalorymetrycznym N umieszczamy termometr T oraz mieszadło M, za pomocą którego mieszamy wodę podczas doświadczenia w celu wyrównania temperatur w całej masie wody. Ciało, którego ciepło właściwe chcemy wyznaczyć, ogrzewamy do pewnej określonej temperatury, np. do temperatury wrzenia wody w termostacie, którego budowę wyjaśnia rys. 9.9. Między podwójne ściany termostatu wpuszczamy parę z kociołka z wrzącą wodą. Termometr umieszczony przy badanym ciele, najlepiej wewnątrz niego (co jest możliwe, gdy ma ono np. postać walca wydrążonego), wskazuje jego temperaturę. Po ustaleniu się tej temperatury wpuszczamy je do naczynia kalorymetrycznego i mieszając wodę za pomocą mieszadła obserwujemy podnoszenie się temperatury. Notujemy najwyższą temperaturę, jaką osiągnie kalorymetr.

Oznaczmy masę wody w kalorymetrze przez M, jej temperaturę początkową przez t_1, temperaturę końcową ciała i wody w kalorymetrze przez t_3, masę ciała badanego przez m, jego temperaturę przed wrzuceniem do kalorymetru przez t_2, szukane ciepło właściwe przez c.

Układamy teraz bilans cieplny rozumując, iż jeżeli naczynie kalorymetryczne znajduje się w osłonie adiabatycznej, to ciepło utracone przez ogrzane ciało wrzucone do kalorymetru musi zostać pobrane w całości przez wodę (jeżeli nie uwzględnimy ciepła, które poszło na ogrzanie naczynia kalorymetrycznego, mieszadła i termometru). Zatem ile ciepła straciło ciało badane, tyle pobrała woda:

$$mc\,(t_2 - t_3) = M(t_3 - t_1), \tag{9.29}$$

skąd

$$c = \frac{M(t_3 - t_1)}{m\,(t_2 - t_3)}. \tag{9.30}$$

Dla prostoty zaniedbaliśmy tu ciepło, które poszło na ogrzanie samego naczynia, mieszadła i termometru. Ponieważ osłony zupełnie nie przepuszczające ciepła nie istnieją, więc przy dokładnym pomiarze trzeba uwzględnić również ilość ciepła, która z kalorymetru przejdzie do otoczenia. Wtedy po prawej stronie równania przybędą jeszcze dwa dodatkowe wyrazy. Wszystkie występujące w tym równaniu wielkości możemy zmierzyć, wobec czego możemy obliczyć nieznaną wielkość c.

Ciepło właściwe ciał ciekłych da się mierzyć albo w ten sposób, że badaną ciecz zamykamy w cienkościennym szklanym naczyńku i postępujemy z nią wówczas jak z ciałem stałym, albo też napełniamy badaną cieczą naczynie kalorymetryczne i wrzucamy do niej ogrzane ciało o znanej masie i znanym cieple właściwym. Układając bilans cieplny możemy z otrzymanego równania wyliczyć nieznane ciepło właściwe cieczy. Tabele 9.7. i 9.8. podają przykłady ciepła właściwego ciał stałych i cieczy.

Tabela 9.7

Ciepło właściwe ciał stałych

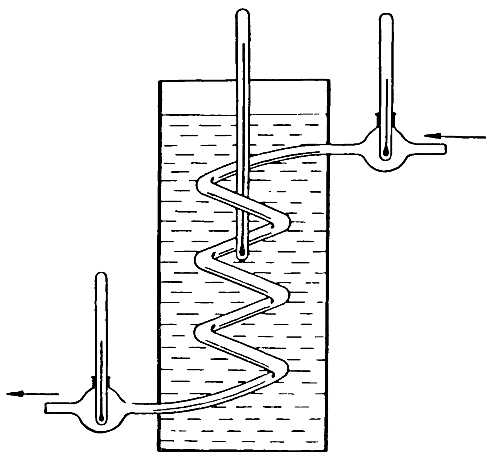
Ciało	Ciepło właściwe w $\frac{cal}{g \cdot stopień}$	Ciało	Ciepło właściwe w $\frac{cal}{g \cdot stopień}$
Ołów	0,031	Miedź	0,092
Złoto	0,0312	Cynk	0,0925
Platyna	0,032	Żelazo	0,111
Cyna	0,0523	Węgiel	0,17—0,25
Srebro	0,0556	Glin	0,214

Tabela 9.8

Ciepło właściwe cieczy przy temperaturze 18°C

Ciecz	Ciepło właściwe w $\frac{cal}{g \cdot stopień}$	Ciecz	Ciepło właściwe w $\frac{cal}{g \cdot stopień}$
Rtęć	0,033	Aceton	0,51
Chloroform	0,225	Eter etylowy	0,56
Benzen	0,408	Alkohol etylowy	0,57
Oliwa	0,47	Woda	0,9991

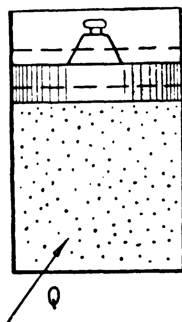
Ciepło właściwe w temperaturach wyższych od 0°C zmienia się na ogół niewiele z temperaturą. Natomiast w temperaturach zbliżonych do zera bezwzględnego silnie maleje dążąc do wartości 0.



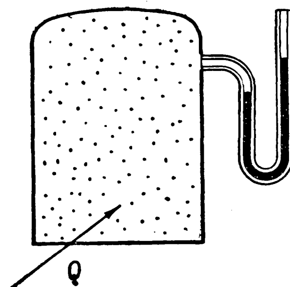
Rys. 9.10. Kalorymetr do pomiaru ciepła właściwego gazów

9.17. Ciepło właściwe gazów. Wobec tego, że masa właściwa gazów jest bardzo mała, nie możemy do wyznaczenia ich ciepła właściwego zastosować poprzednio opisanych metod. Zazwyczaj wyznacza się ciepło właściwe gazów przepuszczając znaczną ilość ogrzanego gazu przez wężownicę umieszczoną w kalorymetrze (rys. 9.10). Temperaturę gazu mierzymy przy wejściu wężownicy do kalorymetru i przy wyjściu z niego. Gaz oziębia się przechodząc przez kalorymetr, oddając mu ciepło. Kalorymetr zaś ogrzewa się. Z podwyższenia się temperatury kalorymetru, obniżenia się temperatury gazu, znając masę przepuszczonego gazu możemy obliczyć jego ciepło właściwe. Ponieważ objętość gazu ła-

two ulega zmianie, jego ciepło właściwe zależy od warunków, w jakich go ogrzewamy. Rozróżniamy tutaj dwa główne przypadki: a. Gaz pozostaje podczas ogrzewania pod stałym ciśnieniem (rys. 9.11), przy czym rozszerza się podczas ogrzewania. Ilość ciepła potrzebną do ogrzania 1 g gazu w tych warunkach nazywamy ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu i oznaczamy symbolem c_p. b. Gaz zawarty jest w naczyniu zamkniętym, tak że jego objętość zmieniać się nie może (rys. 9.12). Ilość ciepła potrzebną do ogrzania 1 g gazu w tych warunkach nazywamy ciepłem właściwym w stałej objętości i oznaczamy je przez c_v.



Rys. 9.11. Ogrzewanie gazu przy stałym ciśnieniu



Rys. 9.12. Ogrzewanie gazu w stałej objętości

W opisanym powyżej doświadczeniu należy zważać, żeby wężownica była dostatecznie szeroka, a przepływ gazu powolny. Wtedy ciśnienie przy wejściu gazu do wężownicy jest w przybliżeniu równe ciśnieniu przy jego wyjściu. Zatem mierzymy ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu c_p. Pomiar c_v jest trudny ze względu na bardzo małą masę gazu nawet w znacznej objętości. Zwykle wyznacza się za pomocą odpowiednich doświadczeń stosunek $\frac{c_p}{c_v}$, skąd już możemy obliczyć c_v.

Między c_p i c_v zachodzi dla wszystkich gazów związek

$$c_p > c_v .$$

Stosunek ciepła właściwego c_p do ciepła właściwego c_v oznacza się literą grecką kappa:

$$\boxed{\varkappa = \frac{c_p}{c_v}.} \tag{9.31}$$

Dla wszystkich gazów jednoatomowych, tzn. gazów, których drobiny składają się z pojedynczych atomów, stosunek ten w przybliżeniu wynosi 1,66, dla gazów dwuatomowych, a więc zawierających po dwa atomy w drobinie stosunek ten równa się 1,4, dla trójatomowych 1,3, dla gazów wieloatomowych jest jeszcze mniejszy. W tabeli 9. 9. zawarte są przykłady ciepła właściwego oraz stosunku $\frac{c_p}{c_v}$.

Tabela 9.9

Ciepło właściwe gazów i stosunek $\frac{c_p}{c_v}$

Gaz	c_p	$\frac{c_p}{c_v}$	Gaz	c_p	$\frac{c_p}{c_v}$
Powietrze	0,241	1,4	Hel	1,26	1,66
Tlen	0,218	1,4	Argon	0,127	1,65
Azot	0,244	1,4	CO_2	0,202	1,30
Wodór	3,400	1,4	H_2O	0,3787	1,28

9.18. Reguła Dulonga i Petita. Ciepłem właściwym nazwaliśmy ilość ciepła potrzebną do ogrzania 1 g danej substancji o 1°. Ilość ciepła potrzebną do ogrzania jednego gramatomu jakiegoś pierwiastka o 1° nazywamy ciepłem atomowym. Ponieważ gramatom jest to liczba gramów równa ciężarowi atomowemu, zatem

$$\text{ciepło atomowe} = \text{ciepło właściwe} \times \text{ciężar atomowy}.$$

Jeżeli rozpatrzymy wartości ciepła właściwego różnych pierwiastków i ich ciężary atomowe, zawarte choćby w tabeli 9. 10, to łatwo stwierdzimy, że im większy jest ciężar atomowy, tym mniejsze ciepło właściwe, jak gdyby wielkości te były w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalne. Prawidłowość tę dostrzegli pierwsi Dulong i Petit (czyt. Diuląg i Ptit), którzy sformułowali ją w postaci następującej reguły: ciepło atomowe wszystkich pierwiastków w stanie stałym ma w przybliżeniu tę samą wartość. Ponieważ gramatom rozmaitych pierwiastków zawiera zawsze jednakową liczbę atomów, wynikałoby stąd, że do ogrzania jednakowej liczby atomów różnych pierwiastków potrzeba jednakowej ilości ciepła.

Tabela 9.10

Ciepło atomowe różnych pierwiastków

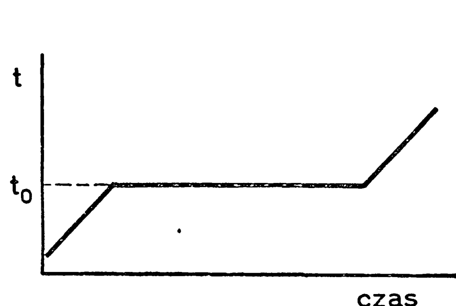
Pierwiastek	Temperatura w °C	Ciepło właściwe	Ciężar atomowy	Ciepło atomowe
Bizmut	22—100	0,030	209,00	6,3
Glin	0	0,210	27	5,7
Miedź	0	0,091	63,57	5,8
Ołów	0	0,030	207,2	6,2
Platyna	18—100	0,0324	195,23	6,3
Węgiel drzewny	0—100	0,238	12	2,9

Odstępstwa od reguły Dulonga i Petita są w wielu przypadkach bardzo znaczne, jak to widać na przykładzie węgla.

9.19. Topnienie i krzepnięcie. Jak wiadomo, ciała stałe przy dostatecznym ogrzaniu przechodzą ze stanu stałego w stan ciekły. Znanym powszechnie tego przykładem jest topnienie lodu.

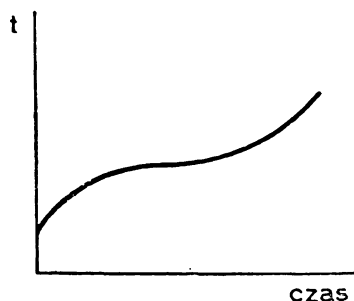
Niektóre ciała przechodzą powoli ze stanu stałego w stan ciekły, mięknąc stopniowo, tak że w pewnej temperaturze t_1 ciało jest stałe, w innej, wyższej t_2 — ciekłe. Własność taką mają ciała tzw. bezpostaciowe, nie posiadające budowy krystalicznej, np. szkło, wosk, lak, żywice. Ciała natomiast o budowie krystalicznej, jak lód, metale (pierwiastki zwykle o budowie mikrokrystalicznej, tzn. zbudowane z drobnych kryształów) mają tę własność, że poniżej pewnej określonej temperatury mogą istnieć tylko jako ciała stałe, powyżej zaś — tylko jako ciała ciekłe. Temperaturę tę nazywamy temperaturą topnienia. W temperaturze topnienia ciało może istnieć tak w postaci stałej i ciekłej. Stopy metali jednak oraz roztwory nienasycone nie mają określonej temperatury topnienia.

Jeżeli umieścimy badane ciało w kawałkach lub proszku w naczyniu, włożymy do naczynia termometr i ogrzewając naczynie będziemy obserwować wskazywaną przez termometr temperaturę, to zauważymy, że najpierw słupek termometru zacznie się podnosić, lecz podczas topnienia ciała termometr będzie wykazywać



Rys. 9.13. Przebieg zmian temperatury przy topnieniu

Odcinek poziomy odpowiada przejściu ciała stałego w ciecz



Rys. 9.14. Przebieg zmian temperatury przy topnieniu ciał takich jak szkło

Ciało mięknie stopniowo stając się coraz plastyczniejsze

niezmienną temperaturę. Przebieg zależności temperatury od czasu wskazuje wykres na rys. 9.13. Temperatura, na której termometr się zatrzyma, jest temperaturą topnienia. Dla ciał bezpostaciowych, takich jak szkło, otrzymujemy taką krzywą, jak na rys. 9.14. Widać na niej tylko zwolnienie wzrostu temperatury, w czasie którego ciało mięknie coraz więcej. Nie ma tu określonej temperatury topnienia. Proces krzepnięcia przy oziębianiu odbywa się w tej samej temperaturze, co proces topnienia, o ile w cieczy znajdują się już drobne kryształki jako zarodki, dokoła których narasta ciało stałe. W przeciwnym razie może zajść zjawisko przechłodzenia opisane w jednym z następnych ustępów.

Pomiar temperatury topnienia metali można łatwo wykonać umieszczając w odpowiednim piecu, podgrzewanym stopniowo, kawałek drutu z danego metalu i przepuszczając przezeń prąd elektryczny. Obok w piecu umieszczamy również przyrząd do mierzenia temperatury, np. termometr oporowy opisany

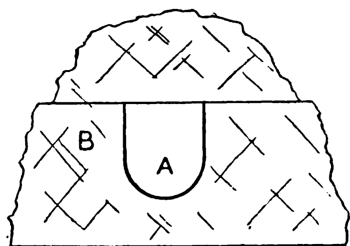
w rozdziale o prądzie elektrycznym. Temperaturą topnienia będzie temperatura wskazywana przez przyrząd w chwili przerwania się prądu.

9.20. Ciepło topnienia. Pomiar ciepła topnienia lodu. Podczas topnienia ciało pobiera ciepło, lecz mimo to jego temperatura nie podwyższa się, zatem ciepło zostaje zużyte na zamianę ciała stałego w ciecz. Ilość ciepła potrzebną do zamiany 1 g ciała stałego mającego temperaturę topnienia w ciecz o tej samej temperaturze nazywamy ciepłem topnienia.

Ciepło topnienia lodu możemy zmierzyć za pomocą kalorymetru wodnego. Kawałek lodu mającego temperaturę topnienia osuszamy szybko bibułą i wrzucamy do kalorymetru o znanej temperaturze. Lód się topi pochłaniając ciepło. Woda powstająca z lodu ogrzewa się w dalszym ciągu aż do temperatury końcowej kalorymetru. Ważąc kalorymetr przed doświadczeniem, a następnie po wykonaniu doświadczenia znajdziemy masę wody M w kalorymetrze oraz masę stopionego lodu m. Oznaczając przez t_1 temperaturę początkową kalorymetru, przez t_2 — temperaturę końcową, a przez x — nieznane ciepło topnienia, możemy ułożyć bilans cieplny całego procesu:

$$M(t_1 - t_2) = mx + m\,(t_2 - 0). \qquad (9.32)$$

Stąd możemy obliczyć ciepło topnienia lodu x. W tym równaniu wskazana jest tylko zasada układania bilansu cieplnego. Przy pomiarach należy uwzględnić jeszcze ciepło oddane przez naczynie kalorymetryczne, mieszadło i termometr oraz ciepło, które dopływa z zewnątrz do kalorymetru, jeżeli osłona nie jest dostatecznie adiabatyczna. Ciepło topnienia lodu wynosi 79,7 cal/g. W przybliżonych rachunkach można przyjmować ciepło topnienia lodu za równe 80 cal/g.



Rys. 9.15. Kalorymetr lodowy

W taki sam sposób możemy zmierzyć ciepło topnienia ciał, których temperatura topnienia leży poniżej temperatury kalorymetru, np. benzenu (temp. topnienia 5,5°C).

Ciepło topnienia ciał, których temperatury topnienia leżą znacznie wyżej, można zmierzyć za pomocą kalorymetru lodowego. Do wydrążenia A w bryle lodu B wlewamy stopione ciało o temperaturze krzepnięcia $t° > 0°C$ (rys. 9.15). Ciecz krzepnie wydzielając ciepło topnienia i topiąc pewną ilość lodu. Powstałe z cieczy ciało stałe oziębia się dalej aż do temperatury 0°C. Oznaczając przez m_1 masę stopionego lodu, m_2 — masę badanego ciała, c_1 — ciepło właściwe badanego ciała w postaci cieczy, c_2 — ciepło właściwe badanego ciała w postaci stałej, t_1 — temperaturę wlanej cieczy, t_2 — jej temperaturę topnienia, a przez x — nieznane ciepło topnienia otrzymamy

$$m_1 \cdot 79{,}7 = m_2\, c_1(t_1 - t_2) + m_2 x + m_2 c_2 t_2. \qquad (9.33)$$

Z tego równania możemy obliczyć x.

Tabela 9.11

Temperatura topnienia i ciepło topnienia

Ciało	Temperatura topnienia w °C	Ciepło topnienia w cal/g	Ciało	Temperatura topnienia w °C	Ciepła topnienia w cal/g
Ołów	327,4	5,92	Alkohol etylowy	−114,2	25,8
Glin	659	94,6	Rtęć	− 38,83	2,7
Nikiel	1452	71,6	Woda	0	79,7
Żelazo czyste	1540	64	Benzen	5,48	30,4
Platyna	1773	24,1	Tlen	−218,8	—
Wolfram	3380	45,8	Wodór	−259,2	—
Eter etylowy	−116,2	23,5	Hel	−272,8	—

9.21. Zmiany objętości ciał przy topnieniu. Przy topnieniu ciała w ogólności zmieniają swoją objętość. Niektóre, jak np. parafina, cyna, ołów, rtęć, kadm, fosfor, siarka powiększają swą objętość; inne, jak np. lód, żeliwo, bizmut — zmniejszają swą objętość przy topnieniu. Objętość wody przy krzepnięciu zwiększa się znacznie, mianowicie o 9%. Jeżeli woda krzepnie w szczelnie zamkniętym naczyniu, przy krzepnięciu usiłuje się rozszerzyć i wywiera na ściany naczynia bardzo wielkie ciśnienie. Ciśnienie to jest tak wielkie, że rozsadza nawet grube żelazne ściany. Woda zamarzająca w szczelinach skalnych rozsadza skały i przyśpiesza ich wietrzenie.

Ciała zmniejszające swoją objętość przy krzepnięciu mają po zakrzepnięciu powierzchnię wklęsłą. Łatwo to obserwować, jeżeli napełnimy zlewkę parafiną i pozwolimy jej zakrzepnąć.

9.22. Równowaga termodynamiczna. Lód i woda mogą w temperaturze 0°C istnieć obok siebie dowolnie długo. Mówimy, że układ dwóch lub więcej ciał znajduje się w równowadze termodynamicznej, jeżeli w niezmiennych zewnętrznych warunkach istnieją obok siebie w zetknięciu lub zmieszaniu nie zmieniając swego stanu, tzn. że wszystkie zmienne określające stan układu, jak objętości, temperatury, ciśnienia, masy nie zmieniają się w czasie. Równowaga ta może być popsuta przez działania zewnętrzne cieplne (doprowadzenie lub odprowadzenie ciepła) lub dynamiczne, dlatego nazywamy ją równowagą termodynamiczną. Lód w temperaturze — 10°C umieszczony w wodzie o temperaturze 0°C nie będzie z nią w równowadze termodynamicznej. W tym wypadku woda będzie krzepnąć, a temperatura lodu będzie się podnosić. Podobnie lód o temperaturze 0°C i woda o temperaturze + 20°C nie będą ze sobą w równowadze. Woda i lód znajdujące się pod ciśnieniem 1 atmosfery mogą być ze sobą w równowadze tylko w temperaturze 0°C, która nazywa się temperaturą równowagi termodynamicznej.

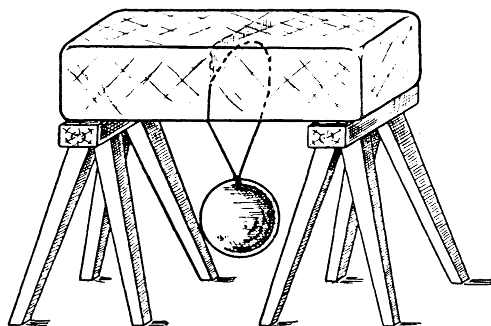
9.23. Przechłodzenie. Oziębiając ostrożnie wodę można obniżyć jej temperaturę do kilku stopni poniżej 0°C nie doprowadzając jej do zakrzepnięcia. Woda znajduje się wtedy w stanie równowagi nietrwałej. Wstrząśnięcie lub wrzucenie dowolnie małego kryształka lodu powoduje gwałtowne krzepnięcie wody

połączone z wydzielaniem ciepła topnienia, wskutek czego temperatura nagle się podnosi. Zakrzepnie taka część wody, iż wydzielone przez nią ciepło topnienia podniesie temperaturę do 0°C.

Gay-Lussac zdołał wodę przechłodzić do — 12°C. Niektóre związki organiczne dadzą się przechłodzić o kilkadziesiąt stopni poniżej temperatury krzepnięcia.

9.24. Topnienie i krzepnięcie pod ciśnieniem zwiększonym. Zamrożenie wody połączone jest z powiększeniem objętości. Zatem wielkie ciśnienie zewnętrzne będzie niejako przeszkadzać krzepnięciu. Można istotnie stwierdzić, że pod ciśnieniem większym od atmosferycznego lód topi się lub woda zamarza w temperaturze niższej od 0°C. Obniżenie wynosi około 0,007 stopnia przy wzroście ciśnienia o jedną atmosferę. Za pomocą wielkich ciśnień udało się stopić lód w temperaturze —22°C (pod ciśnieniem 2200 atmosfer).

W ogólności temperatura topnienia ciał powiększających swoją objętość przy krzepnięciu obniża się ze wzrostem ciśnienia. Stąd wynika, że wywierając wielkie ciśnienie na lód można go stopić. Jeżeli przy tym ciepła z zewnątrz nie dostarczamy dostatecznie szybko, to lód pobierać będzie ciepło topnienia z własnej swojej masy, wskutek czego temperatura tak lodu, jak i powstałej z niego wody będzie się obniżać, dopóki nie nastąpi stan równowagi termodynamicznej w nowych warunkach, to znaczy pod zwiększonym ciśnieniem i przy niższej temperaturze. Gdy wodę i lód uwolnimy spod ciśnienia, woda zakrzepnie z powrotem, a temperatura wskutek wydzielania ciepła topnienia podniesie się do 0°C. Kawałki lodu przy wywarciu na nie znacznego ciśnienia topią się częściowo nawet w temperaturze niższej od zera, głównie w miejscach zetknięcia się. Po uwolnieniu ich spod ciśnienia przymarzają jedne do drugich. Na tym polega robienie śnieżek przez ściskanie śniegu w dłoni. Udaje się to jednak tylko w temperaturach bliskich zera. Przy znacznie niższych temperaturach trzeba do stopienia lodu bardzo znacznych ciśnień, których nie można wywrzeć dłońmi. Topnienie lodu pod ciśnieniem wykazuje następujące doświadczenie. Jeżeli przez podpartą na końcach bryłę lodu o temperaturze 0°C przerzucimy drut stalowy lub miedziany i na końcach obciążymy znacznym ciężarem (rys. 9.16), to pod bardzo znacznym ciśnieniem (będzie ono bardzo wielkie wskutek bardzo małej powierzchni drutu) lód szybko się topi pochłaniając ciepło topnienia. Drut będzie się więc obniżać. Lecz woda, która natychmiast przedostaje się ponad drut, uwolniona spod ciśnienia a mająca temperaturę nieco niższą od 0°C (ozię-



Rys. 9.16. Przecinanie bryły lodu przez obciążony drut stalowy

biona wskutek pochłonięcia ciepła topnienia) natychmiast zamarza z powrotem. Drut przetnie po upływie kilkudziesięciu minut bryłę, lecz jej części będą przymarznięte jedna do drugiej. Bryła będzie stanowić jedną całość.

Temperatura topnienia ciał zmniejszających swoją objętość przy krzepnięciu wzrasta ze wzrostem ciśnienia. Tak np. temperatura topnienia parafiny podwyższa się o 0,036 stopnia przy wzroście ciśnienia o 1 atmosferę. Według Bunsena parafina, topiąca się w temp. 46,3°C pod ciśnieniem atmosferycznym, topi się w temp. 49,9°C pod ciśnieniem 100 atmosfer.

9.25. Krzepnięcie roztworów. Wiele ciał stałych po wrzuceniu do cieczy rozpuszcza się w niej tworząc jednolitą mieszaninę nazywaną roztworem. Przykładem pospolitym jest roztwór soli kuchennej w wodzie.

W znacznej liczbie przypadków rozpuszczanie się ciał w rozpuszczalniku ma pewną granicę. W wodzie np. przy określonej temperaturze może się rozpuścić tylko pewna określona ilość soli kuchennej. Gdy wsypiemy jej zbyt dużo, nadmiar opadnie na dno nie rozpuszczając się. Roztwór zawierający największą ilość ciała, jaką rozpuszczalnik może rozpuścić, nazywamy roztworem nasyconym. Ilość soli potrzebna do otrzymania nasyconego roztworu zależy od temperatury. Na przykład w 100 g wody rozpuszcza się:

w temperaturze	0°C	20°	40°	100°
NaCl	35,2 g	36,0 g	36,6 g	39,6 g
KNO_3	13,3 g	31,2 g	64,0 g	247,0 g

Roztwór krzepnie zawsze w temperaturze niższej niż rozpuszczalnik. Tak np. roztwór zawierający 1 g soli kuchennej na 100 g wody krzepnie w temperaturze —0,6°C, woda morska — w temperaturze —2,2°C.

Jeżeli roztwór jest rozcieńczony, to przy krzepnięciu wydziela się czysty rozpuszczalnik w stanie stałym. Krzepnące wodne roztwory np. wydzielają czysty lód, sól pozostaje w roztworze.

Jeżeli temperatura otoczenia jest dostatecznie niska, tak że roztwór krzepnie w dalszym ciągu, to stężenie roztworu wzrasta i jego temperatura krzepnięcia staje się coraz niższa.

Do roztworów bardzo rozcieńczonych stosują się prawa Raoulta: obniżenie temperatury krzepnięcia roztworu jest proporcjonalne do liczby gramodrobin (moli) ciała rozpuszczonego (a więc do stężenia) i niezależne od rodzaju ciała rozpuszczonego.

Prawa te jednak nie stosują się do ciał przewodzących w roztworze bardzo dobrze prąd elektryczny, tzw. elektrolitów, które rozpadają się w roztworze na jony, czyli ulegają dysocjacji elektrolitycznej. Należy do nich wiele soli, kwasów i zasad. Wywołują one znaczniejsze obniżenie temperatury krzepnięcia.

Przy oziębieniu roztworu nasyconego najpierw wydziela się ciało rozpuszczone osadzając się w postaci kryształków na dnie i ścianach naczynia. Przy dalszym oziębianiu, gdy temperatura spadnie aż do temperatury krzepnięcia roz-

puszczalnika, wówczas z roztworu nasyconego jednocześnie będzie się wydzielać tak rozpuszczalnik w stanie stałym, jak i ciało rozpuszczone w kryształkach. Taką mieszaninę nazywamy mieszaniną eutektyczną. Na przykład dla roztworu soli kuchennej w wodzie zachodzi to przy temperaturze —21,5°C przy składzie 31,3 g soli na 100 g wody. Sól z lodem może zatem pozostawać w równowadze termodynamicznej w temperaturze nie wyższej od —21,5°C. Gdy więc zmieszamy potłuczony lód o temperaturze 0°C i sól kuchenną w stosunku 100 części wagonowych do 31,3, to w tych warunkach nie będzie równowagi termodynamicznej. Lód zacznie się topić, a sól rozpuszczać w powstającej wodzie. Ponieważ topnienie połączone jest z szybkim pochłanianiem ciepła topnienia, temperatura roztworu obniża się stopniowo aż do osiągnięcia temperatury równowagi, tj. —21,5°C. Takie mieszaniny nazywamy mieszaninami chłodzącymi.

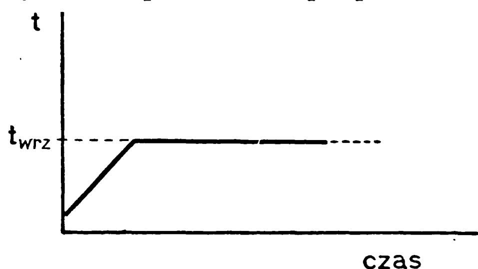
9.26. Krzepnięcie stopów. Stopy, które możemy uważać za zakrzepłe roztwory metali w metalach, mają niższe temperatury krzepnięcia niż czyste metale wchodzące w skład stopu. Niekiedy obniżenie temperatury krzepnięcia jest bardzo znaczne, szczególnie dla stopów kilku metali. Dla przykładu podajemy liczby odnoszące się do dwóch łatwo topliwych stopów. Liczby w nawiasach oznaczają ich temperatury topnienia.

Stop Rosego, temperatura topnienia 95°C	Stop Wooda, temperatura topnienia 60°C
2 części wagowe bizmutu (267°C)	15 części wagowych bizmutu (267°C)
1 część wagowa ołowiu (328°C)	8 części wagowych ołowiu (328°C)
1 część wagowa cyny (232°C)	4 części wagowe cyny (232°C)
	3 części wagowe kadmu (320,9°C)

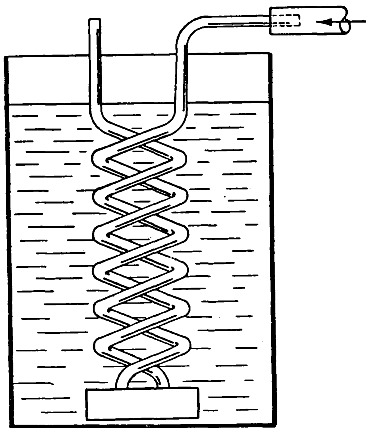
9.27. Parowanie i wrzenie. Przemiana ciała ciekłego w parę zwana parowaniem odbywa się w każdej temperaturze. Każdy wie dobrze, że w lecie po deszczu chodniki szybko wysychają. Parowanie jest zjawiskiem powierzchniowym. Szybkość parowania cieczy w powietrzu jest tym większa, im wyższa jest temperatura, im większa jest powierzchnia swobodna cieczy i im mniej jest pary w powietrzu ponad cieczą. Dlatego przewiew, prąd powietrza unoszący parę, powiększa szybkość parowania. Oczywiście szybkość parowania zależy także od rodzaju cieczy. Alkohol paruje szybciej niż woda, eter szybciej niż alkohol.

Przy stopniowym podwyższeniu temperatury cieczy dochodzimy do momentu, gdy bańki pary zaczynają się wytwarzać na ścianach naczynia, na dnie i wszędzie wewnątrz cieczy. Cała ciecz w naczyniu zaczyna się kłębić i przewracać, a termometr zanurzony w cieczy przestaje się podnosić. Zjawisko to nazywamy wrzeniem. Przebieg zmian temperatury ogrzewanej cieczy w zależności od czasu przedstawia wykres na rys. 9.17. Podczas wrzenia mimo dostarczania ciepła temperatura cieczy się nie podnosi. Najwidoczniej ciepło jest używane na zmianę stanu skupienia ciała, na przejście ze stanu ciekłego w stan lotny albo, jak mówimy, z fazy ciekłej w fazę lotną.

Wyznaczenie temperatury wrzenia jest rzeczą stosunkowo prostą. Wlewamy do szklanej kolby nieco cieczy, po czym zamykamy kolbę korkiem zaopatrzonym w dwa otwory. Przez jeden wkładamy termometr tak, aby jego bańka znajdowała się nad powierzchnią cieczy, przez drugi rurkę szklaną, która odprowadza parę. Gdy słupek cieczy zatrzyma się, oznacza to, że ciecz doszła do temperatury wrzenia. Podczas wrzenia mimo dostarczania ciepła temperatura cieczy nie podnosi się. Zatem ciepło zużywane jest wówczas na zamianę cieczy w parę. Ilość ciepła potrzebną do zamiany 1 g cieczy w danej temperaturze na parę o tej samej temperaturze nazywamy ciepłem parowania. Skraplająca się para wydziela z powrotem ciepło parowania.



Rys. 9.17. Przebieg zmian temperatury cieczy przy ogrzewaniu
Odcinek poziomy odpowiada temperaturze wrzenia



Rys. 9.18. Naczynie kalorymetryczne z wężownicą do pomiaru ciepła parowania

Wyznaczenia ciepła parowania dokonujemy za pomocą kalorymetru wodnego. W tym celu umieszczamy w naczyniu kalorymetrycznym wężownicę miedzianą (rys. 9.18). Do wężownicy wpuszczamy pewną ilość pary za pomocą rurki gumowej łączącej wężownicę z kociołkiem, w którym wytwarza się para. Para skrapla się w wężownicy ściekając do zbiorniczka umieszczonego w dole. Czekamy, aż temperatura w kalorymetrze się ustali. Po zanotowaniu tej temperatury układamy bilans cieplny. Oznaczając przez

M — masę wody w kalorymetrze,
t_1 — temperaturę początkową kalorymetru,
m_1 — masę wężownicy,
c_1 — ciepło właściwe materiału, z którego zrobiona jest wężownica,
m_2 — masę skroplonej pary,
r — szukane ciepło parowania,
t_2 — temperaturę pary,
t_3 — temperaturę końcową kalorymetru

możemy napisać równanie

$$M(t_3 - t_1) + m_1 c_1 (t_3 - t_1) = m_2 r + m_2 (t_2 - t_3). \tag{9.34}$$

Z tego równania możemy obliczyć ciepło parowania r.

Tabela 9.12 zawiera przykłady temperatur wrzenia i ciepła parowania różnych ciał.

Tabela 9.12

Temperatura wrzenia i ciepło parowania

Ciało	Temperatura wrzenia w °C	Ciepło parowania w cal/g	Ciało	Temperatura wrzenia w °C	Ciepło parowania w cal/g
Alkohol etylowy	+ 78,4	206	Kadm	+767	–
Benzen	+ 80,2	95	Cynk	+807	–
Woda	+100,0	538,9	Tlen	−183,0	50,9
Rtęć	+356,7	68	Wodór	−252,8	111,6

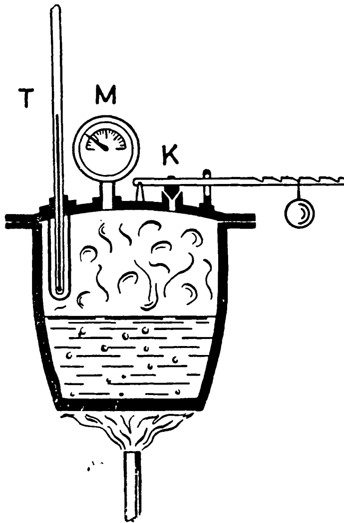
Ciepło parowania danej cieczy zależy od temperatury, w której ta ciecz zamienia się w parę. Jest tym mniejsze, w im wyższej temperaturze ciecz paruje. Ciepło parowania jest oczywiście zawsze pobierane przy zamianie cieczy w parę, nie tylko przy wrzeniu. Dlatego to woda parująca na otwartym powietrzu, szczególnie przy wietrze jest zawsze nieco chłodniejsza od otoczenia. Ciecze bardzo lotne, np. eter, parując oziębiają się bardzo znacznie. Temperatura eteru może spaść do kilkunastu stopni poniżej zera. Używany do znieczulania w medycynie chlorek etylu oziębia się przy parowaniu do —35°C.

Parują nie tylko ciała ciekłe, lecz również ciała stałe, w przeważnej części wypadków zresztą w nieznacznym stopniu. Bielizna mokra powieszona na mrozie wysycha mimo zamarznięcia. Śnieg podczas mroźnej suchej zimy powoli znika z powierzchni ziemi. Ciśnienie pary nasyconej nad lodem jest niewielkie wynosi tylko 4,58 mmHg, więc parowanie jest powolne. Są jednakże ciała takie, które parują szybko. Ciśnienie pary nasyconej nad tymi ciałami w postaci stałej, może być znaczne i często szybko rośnie przy podwyższaniu temperatury. Do takich ciał należą np. kamfora, naftalina, jod. Przy ogrzaniu ich w naczyniu zamkniętym ciała te szybko parują nie topiąc się, a wydzielająca się para zestala się na chłodniejszych ścianach naczynia nie przechodząc przez fazę ciekłą. Zjawisko to nazywamy sublimacją. Przy zamianie ciała stałego na parę pochłaniane jest również ciepło. Ilość tego ciepła potrzebna do odparowania 1 g nazywa się ciepłem sublimacji. Stały dwutlenek węgla ma ciśnienie pary nasyconej tak wielkie (o wiele większe od atmosferycznego), że paruje bardzo gwałtownie oziębiając się aż do —79°C. Dopiero w tej temperaturze ciśnienie jego pary nasyconej równa się 1 atmosferze.

9.28. Przegrzanie cieczy. Jeżeli czystą ciecz umieścimy w czystym naczyniu, np. wodę w szklanej kolbie i doprowadzimy do wrzenia, to po dłuższym wrzeniu, gdy powietrze z niej i z powierzchni szkła zostanie wypędzone, wrzenie ustaje od czasu do czasu, a temperatura cieczy podnosi się nieco ponad temperaturę wrzenia. Przy dalszym ogrzewaniu następują od czasu do czasu eksplozje mniejsze lub większe, zależnie od stopnia przegrzania, połączone z gwałtownym wywiązywaniem się pary. Niekiedy grozi to niebezpieczeństwem rozbicia kolby i wylania gorącej cieczy. Okazuje się, że ślady powietrza przywarte do ścian na-

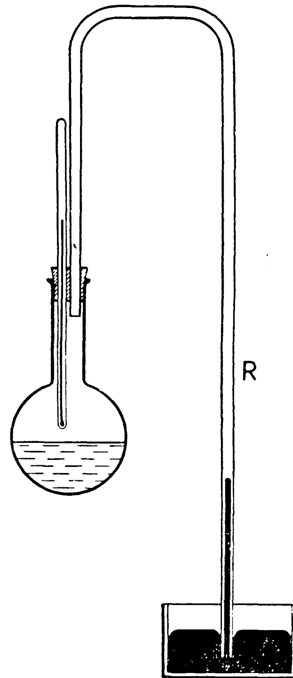
czynia służą jako zarodki baniek pary. Gdy zapas tego powietrza zostanie wydalony, ciecz przestaje wrzeć mimo podniesienia jej temperatury powyżej temperatury wrzenia. Zjawisko to nazywamy *przegrzaniem* cieczy. Dlatego to przy pomiarze temperatury wrzenia umieszczamy termometr nie w cieczy, która może ulegać przegrzaniu, lecz w parze ponad cieczą. Para ma zawsze temperaturę wrzenia. Przegrzaniu cieczy zapobiegamy przez wrzucenie na dno naczynia perełek szklanych lub piasku, którego cząstki zawierają zagęszczony na ich powierzchni znaczny zapas powietrza.

9.29. Zależność temperatury wrzenia od ciśnienia. Temperatura wrzenia, jak wykazuje doświadczenie, zależy w wysokim stopniu od ciśnienia. Do obserwacji temperatury wrzenia pod zwiększonym ciśnieniem służy kociołek Papina. Przedstawia go rysunek 9.19. Kociołek zaopatrzony jest w manometr, wlutowaną rurkę wchodzącą do wnętrza, do której



Rys. 9.19. Kociołek Papina

T — termometr, *M* — manometr, *K* — klapa bezpieczeństwa



Rys. 9.20. Pomiary temperatury wrzenia przy ciśnieniach mniejszych od atmosferycznego

można włożyć termometr wskazujący temperaturę wrzenia, oraz klapę bezpieczeństwa. Poniżej podane są temperatury wrzenia wody w zależności od ciśnienia.

Ciśnienie w atmosferach	1	2	3	4	5
Temperatura wrzenia w °C	100	121	134	144	152

Do pomiaru temperatury wrzenia przy ciśnieniach mniejszych od atmosferycznego służy kolba szczelnie zatkana korkiem gumowym, przez który wpro-

wadzamy do wnętrza termometr oraz rurkę połączoną z długą rurką *R* w kształcie odwróconej litery *U* (rys. 9.20). Wodę w kolbie doprowadza się do wrzenia, po czym odstawia się palniki i przestaje ją ogrzewać, koniec zaś rurki *R* zanurza w zbiorniczku z rtęcią. W miarę ochładzania się kolby wskutek skraplania się pary nad cieczą ciśnienie maleje. Ciecz wrze dalej, a jednocześnie słupek rtęci w rurce podnosi się. Możemy jednocześnie odczytywać temperaturę ponad cieczą oraz ciśnienie wewnątrz, które jest równe atmosferycznemu zmniejszonemu o ciśnienie słupka rtęci w rurce. Załączona tabelka podaje temperaturę wrzenia wody pod ciśnieniami mniejszymi od atmosferycznego.

Ciśnienie w mmHg	760	526	355	233	149	92	55	32	17,5	9,2	4,6
Temperatura wrzenia w °C	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0

Podobną własność mają wszystkie ciecze. Zmniejszenie ciśnienia zewnętrznego wybitnie obniża temperaturę wrzenia.

Jak z tych liczb widać, możemy doprowadzić do wrzenia ciecz zmniejszając ciśnienie zewnętrznego powietrza, umieszczając ją np. pod kloszem pompy próżniowej i wypompowując powietrze. Przy odpowiednim zmniejszeniu ciśnienia ciecz zaczyna wrzeć. Przy zamianie cieczy na parę musi być oczywiście pochłonięte ciepło parowania. Jeżeli dopływ ciepła z zewnątrz jest zbyt powolny, ciecz zamieniając się w parę pobiera ciepło parowania z własnej swojej masy, wskutek czego szybko się oziębia. Wodę można w ten sposób doprowadzić aż do zakrzepnięcia.

Wrzenie pod zmniejszonym ciśnieniem cieczy, a w szczególności skroplonych gazów, jest potężnym środkiem osiągnięcia bardzo niskich temperatur.

9.30. Wrzenie roztworów. Badania Raoulta wykazały, że roztwory ciał nielotnych w cieczach wrą w nieco wyższej temperaturze niż czysty rozpuszczalnik. Podwyższenie temperatury wrzenia przy rozpuszczeniu małej ilości ciała praktycznie nie parującego (nie elektrolitu) podlega następującym prawom:

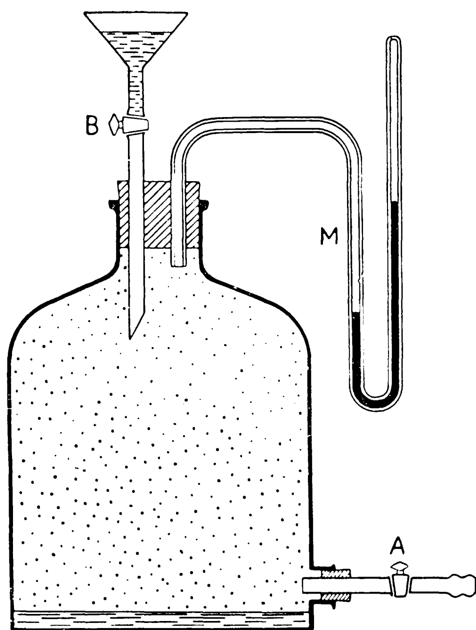
1. Podwyższenie temperatury wrzenia jest wprost proporcjonalne do ilości ciała rozpuszczonego.

2. Podwyższenie to nie zależy od rodzaju, lecz tylko od liczby gramodrobin rozpuszczonych.

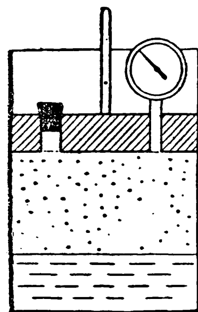
Inaczej zachowują się roztwory, których oba składniki parują. Ciekłe powietrze np., które jest mieszaniną ciekłego azotu i tlenu, wrze w temperaturze pośredniej między temperaturą wrzenia azotu (—195,8°C) a temperaturą wrzenia ciekłego tlenu (—183,0°C). Wobec niższej temperatury wrzenia azotu szybciej ulatnia się azot, ciecz staje się coraz bogatsza w tlen. Na takim przebiegu parowania polega sposób rozdzielania cieczy przez tzw. destylację frakcjonowaną. Pierwsze porcje, czyli frakcje pary będą bogatsze w składnik lotniejszy. Możemy je zebrać oddzielnie, po czym poddać je ponownie destylacji.

Wiele jednak roztworów cieczy w cieczach zachowuje się w sposób o wiele bardziej skomplikowany.

9.31. Para nasycona i jej własności. Weźmy flaszkę zaopatrzoną w boczny tubus (rys. 9.21). Oba otwory zatykamy korkami gumowymi. Przez korek w bocznym tubusie wprowadzamy rurkę *A* z kurkiem, zaś przez dwa otwory w górnym korku — rurkę *B* z kurkiem i lejkiem u góry oraz manometr zamknięty próżniowy *M*. Za pomocą rurki *A* wypompowujemy z flaszki powietrze. Do lejka *B* wlewamy ciecz, której parę chcemy badać (przy zamkniętym kurku). Otwieramy na chwilę kurek *B* tak, aby pewna porcja cieczy wlała się do wnętrza. Ciecz dostawszy się w próżnię zaczyna gwałtownie wrzeć wytwarzając parę. Ciśnienie wewnątrz flaszki, które wskazuje manometr, gwałtownie wzrasta. Po krótkim czasie zjawisko się przerywa. Jeżeli wpuściliśmy dostatecznie dużo cieczy do wnętrza, to pewna ilość cieczy pozostanie, ciśnienie się ustali i już pozostanie stałe,



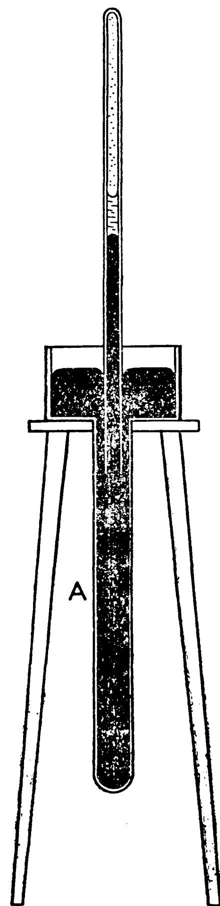
Rys. 9.21. Para nasycona w próżni



Rys. 9.22. Ciśnienie pary nasyconej nie zależy od objętości, w której znajduje się para i ciecz

jeśli tylko temperatura otoczenia się nie zmieni. Ustali się równowaga termodynamiczna między cieczą a parą, która może trwać dowolnie długo przy stałej temperaturze. Ciecz już dalej parować nie będzie, skąd wynika, że przestrzeń ponad cieczą nie może już zmieścić więcej pary. Taką parę, która pozostaje w równowadze termodynamicznej z cieczą, z której powstała, nazywamy parą nasyconą. Ma ona największą gęstość i największe ciśnienie, jakie w ogóle może posiadać para w danej temperaturze. Jak stwierdzono, para nasycona w zachowaniu się swym bardzo znacznie różni się od gazów. Aby to zbadać, wyobraźmy sobie następujące doświadczenie: weźmy cylinder z ruchomym szczelnym tłokiem. W tłoku powinien być otwór oraz na nim osadzony manometr (rys. 9.22). Wlewamy do cylindra ciecz. Przysuwamy tłok przy otwartym otworze tak, aby się on stykał z powierzchnią cieczy. Następnie zamykamy otwór szczelnie korkiem gumowym. Podnosimy tłok do góry na pewną wysokość.

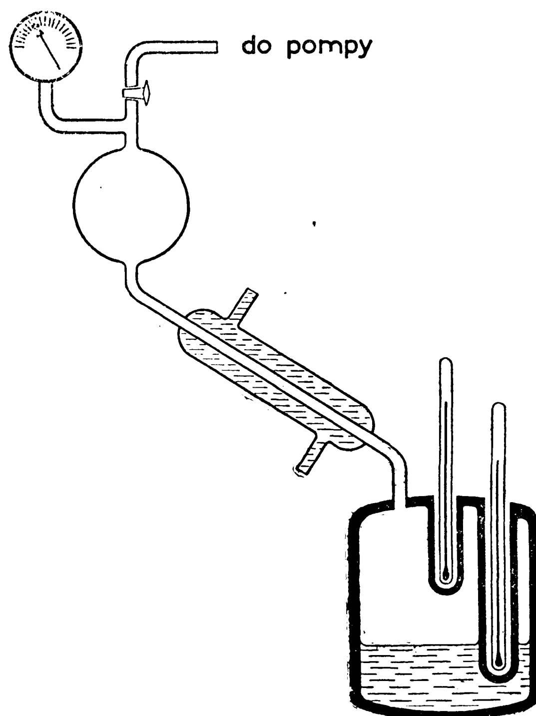
Ciecz wrze, po czym ustala się równowaga między cieczą i parą. Manometr pokaże pewne określone ciśnienie p. Przy podnoszeniu tłoka do góry objętość, w której zawarta jest ciecz i para, będzie się powiększać. Jednocześnie ciecz będzie szybko parować, masa cieczy będzie się zmniejszać, a masa pary — powiększać. Jednakże ciśnienie wskazywane przez manometr nie będzie się zmieniać, jeżeli tylko temperatura się nie zmieni (dlatego należy doświadczenie wykonywać powoli, aby potrzebne ciepło parowania zdążyło dopłynąć z zewnątrz). Gdy z powrotem tłok zaczniemy wtłaczać w dół, zjawisko się odwróci: para będzie się skraplać, jej ilość będzie się zmniejszać, masa cieczy zaś — powiększać. Doświadczenie to wykazuje jasno, że do danej objętości nie możemy wtłoczyć więcej pary niż ilość pary nasyconej. Przekonywamy się zatem, że gęstość i ciśnienie pary nasyconej nie zależą od objętości naczynia, w którym znajduje się para w równowadze z cieczą. Doświadczenie powyżej opisane nie byłoby łatwe do wykonania ze względu na konieczną szczelność tłoka. Lecz bardzo łatwo badanie takie przeprowadzić w sposób następujący: zatopioną na jednym końcu, długą rurkę szklaną napełniamy rtęcią. W opisany w ust. 7.2 sposób robimy z niej barometr zanurzając otwarty koniec rurki w naczyniu *A* napełnionym rtęcią (rys. 9.23). Naczynie to, rozszerzone u góry przechodzi w dość szeroką długą rurę dość znacznej długości. Za pomocą odpowiednio zagiętej na końcu pipetki wprowadzamy do wnętrza próżni barometrycznej trochę badanej cieczy, najczęściej eteru etylowego lub alkoholu. Ciecz dostawszy się do próżni wrze gwałtownie, po czym ustala się po krótkim czasie równowaga termodynamiczna między cieczą i parą. Słupek rtęci obniża się, a różnica między ciśnieniem tego słupka a ciśnieniem barometrycznym daje ciśnienie pary nasyconej danej cieczy. Nad słupkiem rtęci będzie się znajdować warstewka cieczy. Objętość, w której znajduje się ciecz i para, możemy zmieniać przez wsuwanie rurki barometrycznej do rury *A* lub też wysuwanie jej do góry. Doświadczenie w ten sposób przeprowadzone ma tę wyższość nad poprzednim, że tłok z rtęci doskonale uszczelnia objętość, w której znajduje się ciecz i para. Również za pomocą tego doświadczenia przekonywamy się łatwo, że ciśnienie pary nasyconej nie zależy od objętości, jeżeli tylko znajduje się w niej zapas cieczy.



Rys. 9.23. Przyrząd do stwierdzenia niezależności ciśnienia pary nasyconej od objętości

Jeżeli natomiast zmienimy temperaturę naczynia, w której znajdują się para i ciecz, to natychmiast zmieni się ciśnienie pary nasyconej. Jakościowo bardzo

łatwo to wykazać ogrzewając wyżej opisaną rurkę barometryczną z badaną parą i cieczą palnikiem bunzenowskim. Przy ogrzewaniu ciśnienie pary bardzo szybko wzrasta. Pomiary ciśnienia pary nasyconej w zasadzie mogą być wykonane w następujący sposób: kociołek metalowy połączony z chłodnicą i manometrem, do wnętrza którego wpuszczone są wlutowane zamknięte u dołu rurki (rys. 9.24), napełnia się częściowo cieczą. Powietrze nad cieczą odpompowuje się, do rurek wkłada termometry. Kociołek umieszcza się w kąpieli o odpowiedniej tempe-



Rys. 9.24. Pomiar ciśnienia pary nasyconej w zależności od temperatury

raturze. Zmieniając w ten sposób temperaturę pary, którą wskazują termometry, i odczytując ciśnienie na manometrze można znaleźć zależność ciśnienia pary nasyconej od temperatury. Podobne pomiary wykazały, że ciśnienie pary nasyconej wzrastające powoli przy niskich temperaturach wzrasta nadzwyczaj szybko przy wzroście temperatury przy temperaturach wysokich. Ciśnienie to zależy również w wysokim stopniu od rodzaju cieczy, z której para powstaje. Tak np. przy temp. $+20°C$ para nasycona eteru ma ciśnienie 432,8 mmHg, alkoholu — 44,5, wody — 17,5, rtęci — 0,0013.

Łatwo wytłumaczyć szybki wzrost ciśnienia pary nasyconej przy wzroście temperatury: przy podnoszeniu temperatury bowiem coraz to nowe ilości cieczy odparowują, pary przybywa, jej gęstość, a więc i ciśnienie musi bardzo szybko

wzrastać. Odwrotnie, przy obniżaniu temperatury para stopniowo skrapla się, zamienia się w ciecz, jej gęstość i ciśnienie szybko maleją. Tabela 9.13 podaje ciśnienie i gęstość pary wodnej w zależności od temperatury.

Tabela 9.13

Ciśnienie pary nasyconej wody i jej gęstości w zależności od temperatury

Temperatura w °C	Gęstość w g/litr	Ciśnienie w mmHg	Temperatura w °C	Gęstość w g/litr	Ciśnienie w kG/cm²
— 20		0,77	+110	0,835	1,461
— 10		1,95	+120	1,13	2,024
0	0,0049	4,58	+130	1,52	2,754
+ 10	0,0094	9,2	+140	1,99	3,685
+ 20	0,0172	17,5	+150	2,58	4,854
+ 30	0,0302	31,8	+200	7,81	15,857
+ 40	0,0511	55,3	+250	20,0	40,56
+ 50	0,0831	92,5	+300	46	87,61
+ 60	0,131	149,4	+350	114	169,63
+100	0,604	760 = 1,033 kG/cm²			

Dla porównania przytaczamy poniżej ciśnienie gazu przy stałej objętości, które łatwo wyliczyć z wzoru: $p = p_0(1 + \gamma t)$ przyjmując, iż ciśnienie gazu w temperaturze 0°C równa się 1 kG/cm². Gęstość gazu jest oczywiście stała.

Tabela 9.14

Ciśnienie gazu, który przy temp. 0°C ma ciśnienie 1 kG/cm², w zależności od temperatury

Temperatura w °C	Ciśnienie w kG/cm²	Temperatura w °C	Ciśnienie w kG/cm²
0	1,000	200	1,733
100	1,366	250	1,916
150	1,549	300	2,11

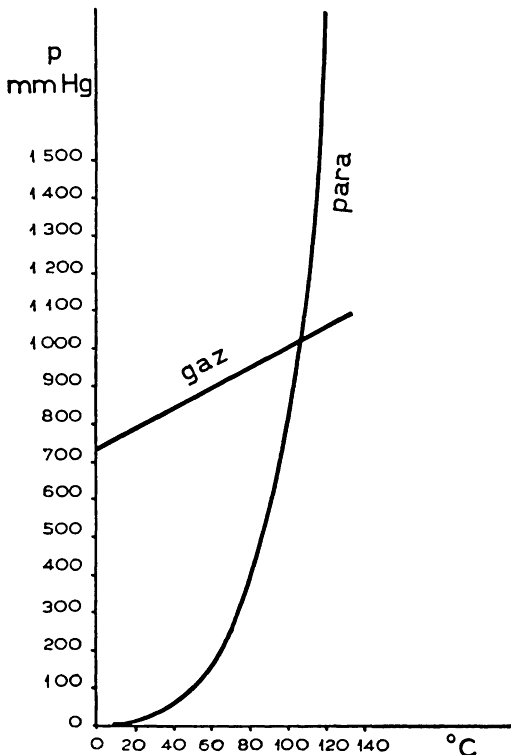
Wykres na rys. 9.25 wskazuje, jak rośnie ciśnienie pary nasyconej wody oraz gazu wraz z temperaturą. Wykres ciśnienia gazu jest oczywiście linią prostą, ponieważ jest ono funkcją liniową temperatury.

Jak z powyżej opisanych doświadczeń i pomiarów wynika, para nasycona zachowuje się zupełnie inaczej niż gazy. Nie stosuje się do prawa Boyle'a, gdyż, jak widzieliśmy, jej ciśnienie zupełnie nie zależy od objętości naczynia, w którym jest zamknięta. Nie stosuje się również do prawa Gay-Lussaca, gdyż ciśnienie jej o wiele szybciej wzrasta przy wzroście temperatury niż ciśnienie gazu. Ciśnienie pary nasyconej jest funkcją tylko temperatury:

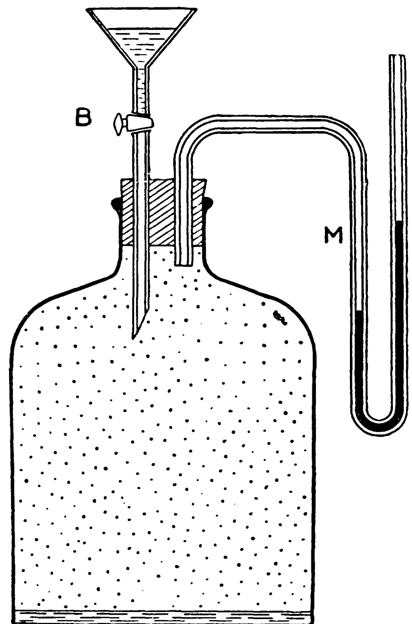
$$p = f(t).$$

Kształt tej funkcji nie został dotychczas wyprowadzony na drodze teoretycznej.

9.32. Para nasycona w powietrzu. Obecność powietrza w naczyniu nie przeszkadza wytworzeniu się pary nasyconej. Jeżeli w doświadczeniu opisanym na str. 211 naczynia nie opróżnimy z powietrza i wlejemy doń trochę cieczy, to przekonamy się, że ciecz wprawdzie nie wrze, lecz para wywiązuje się z niej powoli. Obecność powietrza zmniejsza więc tylko znacznie szybkość parowania. Po ustaleniu się równowagi między cieczą i parą ciśnienie jej i gęstość będą takie same jak w próżni. Ciśnienie dodaje się do ciśnienia powietrza. Wobec dużego początkowego ciśnienia powietrza używamy przy tym doświadczeniu manometru otwartego (rys. 9.26).



Rys. 9.25. Porównanie wzrostu ciśnienia pary nasyconej i gazu ze wzrostem temperatury



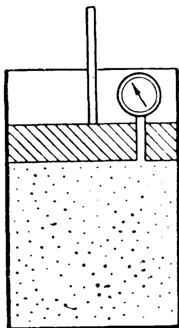
Rys. 9.26. Para nasycona w powietrzu

Ciecz wrze pod ciśnieniem zewnętrznym powietrza lub gazu zawsze w takiej temperaturze, w której ciśnienie jej pary nasyconej zrówna się z ciśnieniem zewnętrznym (właściwie musi je przewyższać). Dopiero wtedy bowiem para może pokonywać ciśnienie zewnętrznego gazu i szybko wydzielać się z cieczy.

9.33. Para przegrzana. Gdy tłok zamykający pewną objętość cylindra, w którym znajduje się ciecz i para nasycona, będziemy podnosić do góry, cieczy będzie stale ubywać. Gdy ostatnia kropla cieczy wyparuje, para będzie miała jeszcze gęstość i ciśnienie pary nasyconej. Nazywamy ją parą nasyconą suchą. Przy dalszym powiększaniu objętości gęstość i ciśnienie pary zaczynają się zmniejszać

(rys. 9. 27). Para przechodzi w odmianę zwaną parą nienasyconą lub parą przegrzaną, gdyż, jak zaraz zobaczymy, można ją również otrzymać przez ogrzanie.

Gdy temperaturę naczynia, w którym znajduje się ciecz z parą nasyconą w równowadze, zaczniemy podnosić, ciecz odparowuje, pary przybywa, jej gęstość i ciśnienie szybko rośnie. W temperaturze, w której ostatnia kropla cieczy zniknie, otrzymujemy parę nasyconą suchą. Przy dalszym podwyższeniu temperatury gęstość pary nie ulega zmianie (gdyż tak masa pary, jak i objętość jej nie zmieniają się), ciśnienie zaś powiększa się, lecz znacznie wolniej niż w parze nasyconej. Będziemy mieli parę przegrzaną.



Rys. 9.27. Para przegrzana tworzy się przy powiększeniu objętości, w której znajduje się para nasycona sucha

Im para przegrzana jest dalsza od stanu nasycenia, tym bardziej jej własności zbliżają się do własności gazów. Para przegrzana stosuje się w przybliżeniu do praw Boyle'a i Gay-Lussaca — tym lepiej, im dalszy jest jej stan od stanu nasycenia.

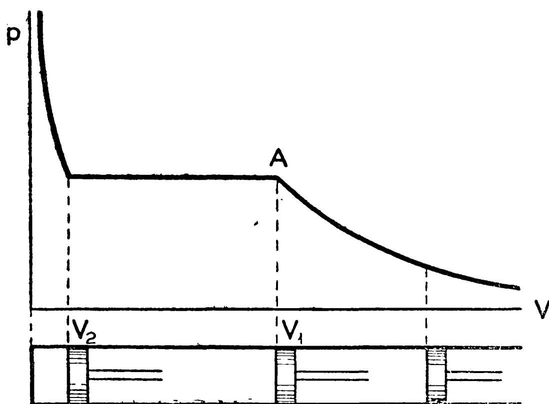
Odwrotnie, przy zmniejszeniu objętości naczynia, w którym znajduje się para przegrzana, jej gęstość i ciśnienie zaczną się powiększać, aż w końcu zrównają się z gęstością i ciśnieniem pary nasyconej. Będzie to para nasycona sucha. Przy dalszym zmniejszaniu objętości para nasycona będzie się skraplać osiadając na ścianach i dnie naczynia. Ciśnienie już potem nie będzie się zmieniać, dopóki cała para się nie skropli. Oczywiście podczas skraplania pary trzeba odprowadzać ciepło i chłodzić naczynie, gdyż skraplająca się para oddaje ciepło parowania, które jest bardzo znaczne. Gdy para całkowicie się skropli i chcielibyśmy dalej zmniejszać objętość naczynia, ciśnienie będzie gwałtownie wzrastać, gdyż ciecz jest mało ściśliwa.

Możemy również zamienić parę przegrzaną w nasyconą nie zmieniając objętości naczynia, natomiast oziębiając je. Przy oziębianiu pary przegrzanej jej ciśnienie maleje powoli, aż wreszcie zrówna się z ciśnieniem i gęstością pary nasyconej w odpowiednio obniżonej temperaturze. Przy dalszym oziębianiu następuje skroplenie. Skraplanie ułatwiają zarodki, którymi zwykle są małe pyłki, również części drobin niosące ładunki elektryczne, tzw. jony. W braku zarodków gęstość i ciśnienie pary mogą się stać przy oziębieniu większe niż gęstość i ciśnienie pary nasyconej, a mimo to para nie będzie się skraplać. Parę taką nazywamy parą przesyconą.

9.34. Izotermy par. Temperatura krytyczna. Dla lepszego zorientowania się w przebiegu przemiany pary przegrzanej w nasyconą, a następnie w ciecz, przedstawiamy zwykle przebieg ten na wykresie. Weźmy walec z ruchomym szczelnym tłokiem (rys. 9.28). Objętość zawartą pod tłokiem będziemy odkładać na osi odciętych. Jeżeli dobierzemy przekrój cylindra tak, aby jego pole równało

się jednostce, to objętość pod tłokiem będzie liczbowo równa odległości tłoka od podstawy walca (ponieważ objętość walca równa się iloczynowi podstawy przez wysokość). Przypuśćmy, że w cylindrze zawarta jest para przegrzana, i odkładajmy jej ciśnienie na osi rzędnych. Zmniejszajmy izotermicznie objętość pary. Ponieważ para przegrzana stosuje się w przybliżeniu do prawa Boyle'a, więc ciśnienie jej będzie się powiększało. Gęstość jej również będzie się powiększać, ponieważ masa się nie zmienia, a objętość maleje. W końcu gęstość i ciśnienie jej zrównają się z gęstością i ciśnieniem pary nasyconej (punkt *A* wykresu). Będzie to para nasycona sucha. Ponieważ cała objętość pod tłokiem jest wówczas wypełniona parą nasyconą, możemy znaleźć jej gęstość dzieląc masę m przez objętość V_1:

$$\frac{m}{V_1}.$$



Rys. 9.28. Zgęszczenie izotermiczne pary

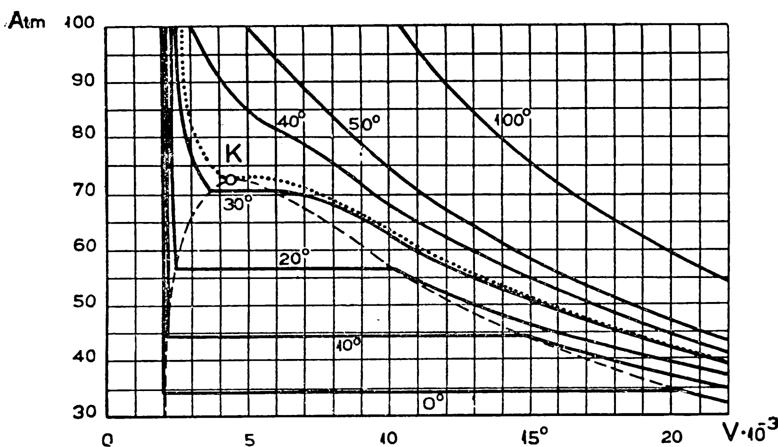
Przy dalszym zmniejszaniu objętości przez wtłaczanie tłoka para będzie się skraplać, a ciśnienie pary nie zmieni się. Na wykresie otrzymamy zatem odcinek prostej równoległej do osi odciętych. Wreszcie dojdziemy do punktu, gdy para skropli się całkowicie i pod tłokiem będzie jedynie ciecz. Jeżeli to zajdzie przy objętości V_2, to dzieląc masę cieczy równą masie pary m przez objętość otrzymamy gęstość cieczy:

$$\frac{m}{V_2}.$$

Ponieważ objętość V_1 jest znacznie większa od V_2, więc widać, że gęstość pary nasyconej jest znacznie mniejsza od gęstości cieczy. Przy dalszym wtłaczaniu tłoka ciśnienie będzie rosnąć bardzo szybko, otrzymamy szybko wznoszącą się gałąź krzywej. Otrzymaną w ten sposób krzywą, przedstawiającą przebieg całego zjawiska odbywającego się w stałej temperaturze, nazywamy izotermą.

Zachowanie się par jest zatem zasadniczo odmienne od zachowania się gazów. Powstaje więc pytanie, jaki jest stosunek par do gazów, czym one się w istocie swej różnią? Już w XVIII wieku wiedziano, że niektóre z ciał uważane poprzednio za gazy skraplają się przy oziębieniu. Okazało się więc, że są one parami cieczy, które w normalnych pokojowych temperaturach i pod ciśnieniem atmosferycznym nie istnieją. W pierwszej połowie XIX wieku udało się Faradayowi skroplić wiele gazów w zwykłej temperaturze przez silne ich zgęszczenie. Zaczęto wobec tego nabierać przekonania, że wszystkie gazy są parami. Jednakże szereg gazów

takich, jak: tlen, azot, powietrze, tlenek węgla, wodór, metan opierało się wszelkim próbom skroplenia przez zgęszczenie, mimo iż poddawano je ogromnym ciśnieniom dochodzącym do 3000 atmosfer. Nie rozumiano przyczyn, dla których gazy te nie dają się skroplić. Dopiero badania Andrewsa (czyt. Endriusa) nad dwutlenkiem węgla rzuciły światło na to zagadnienie. Andrews wykonał szereg pomiarów objętości i ciśnienia dwutlenku węgla w różnych temperaturach i wykreślił jego izotermy dla rozmaitych temperatur. Na rysunku 9.29 są narysowane te izotermy dla temperatur od 0° do 100°C. Aby rysunek nie miał zbyt wielkich rozmiarów, wykreślono na nim tylko części izoterm dla ciśnień większych od 30 atmosfer. Jeżeli dwutlenek węgla ma pod ciśnieniem atmosferycznym i przy



Rys. 9.29. Izotermy dwutlenku węgla

temperaturze 0°C objętość 1000 cm^3, to przy zmniejszaniu jego objętości aż do kilkudziesięciu centymetrów sześciennych ciśnienie jego wzrasta według prawa Boyle'a. Przy dalszym zgęszczaniu ciśnienie zaczyna się coraz więcej różnić od ciśnienia wynikającego z prawa Boyle'a (wzrasta wolniej), wreszcie przy objętości 20,3 cm^3 przechodzi w parę nasyconą. Począwszy od tej objętości gaz skrapla się. W objętości 2,16 cm^3 gaz całkowicie zamienia się w ciecz. Jeżeli to samo doświadczenie powtarzamy przy coraz wyższych temperaturach, to okazuje, się, że poziome odcinki izoterm odpowiadające przejściu pary w ciecz stają się coraz krótsze, aż wreszcie powyżej temperatury 31°C znikają zupełnie. Przy temperaturze 31°C izoterma ma tylko jeden punkt przegięcia K, w którym styczna do izotermy jest pozioma. Nazywamy tę temperaturę temperaturą krytyczną, izotermę zaś odpowiadającą tej temperaturze — izotermą krytyczną.

Jak mówiliśmy poprzednio, gęstość cieczy jest określona stosunkiem $\dfrac{m}{V_2}$ (V_2 — objętość odpowiadająca lewemu punktowi załamania się izotermy na

wykresie), gęstość zaś pary nasyconej — stosunkiem $\frac{m}{V_1}$ (V_1 — objętość odpowiadająca prawemu punktowi załamania izotermy). Jak widać z przebiegu izoterm, w miarę wzrostu temperatury punkty te zbliżają się ku sobie coraz więcej, gęstość cieczy stopniowo maleje (gdyż objętość V_2 wzrasta), gęstość pary nasyconej wzrasta (gdyż objętość V_1 maleje). W temperaturze krytycznej w punkcie *K* objętości te stają się równe, gęstości zatem również. Nie mogą w tym punkcie istnieć dwie fazy: ciekła i lotna. Wszelka różnica między cieczą i parą znika. Znika również granica między nimi, zwana meniskiem. Powyżej temperatury krytycznej dane ciało nie może istnieć w dwóch fazach, ciekłej i lotnej. Mamy już tylko jedną fazę o własnościach gazów. Przy temperaturze wyższej od krytycznej żadnym powiększaniem ciśnienia nie można gazu skroplić.

Punkt *K* nazywamy punktem krytycznym, ciśnienie w tym punkcie — ciśnieniem krytycznym, a objętość — objętością krytyczną. Po badaniach Andrewsa stało się jasne, że skroplenie gazu jest niemożliwe, jeżeli nie obniżymy tak jego temperatury, aby była ona niższa od krytycznej.

Tabela 9.15

Temperatury krytyczne, wrzenia, krzepnięcia i inne dane odnoszące się do różnych ciał

Ciało	Temperatura krytyczna w °C	Ciśnienie krytyczne w Atm	Temperatura wrzenia pod ciśnieniem 1 atmosfery w °C	Ciepło parowania w temperaturze wrzenia pod ciśnieniem atmosferycznym w cal/g	Gęstość w temperaturze wrzenia	Temperatura krzepnięcia w °C
Woda	+374,2	217,7	+100	539	0,999 (18°)	0
Alkohol etylowy	+243	63	+ 78,3	202	0,79 (18°C)	−114,2
Eter etylowy	+194	35,5	+ 34,6	90	0,72 (18°)	−123,6
CO_2	+ 31,0	73	− 78,5 (sublimacji)	142	1,53	− 56
Etylen	+ 9,5	50,6	−104	125	0,64	−169,4
Metan	− 82,85	45,6	−161,4	127,2	0,477	−185,8
Tlen	−118,82	49,7	−183,0	51	1,13	−218
Powietrze	− 140,7	38	≈ −191			
Azot	− 147,13	33,4	−195,8	48	0,79	−210,5
Neon	− 228,9	26,86	−246,1	25	1,21	−248,6
Wodór	− 239,9	12,8	−252,8	112	0,07	−259,2
Hel	− 267,84	2,26	−268,8		0,15	−272

Przez bardzo znaczne obniżenie temperatury oraz poddanie gazu dużemu ciśnieniu udało się Wróblewskiemu i Olszewskiemu otrzymać po raz pierwszy

gazy dotychczas nie dające się skroplić w postaci cieczy będących w równowadze termodynamicznej ze swoją parą. Były to: powietrze, tlen, azot i tlenek węgla. Do otrzymania niskich temperatur stosowali oni etylen (C_2H_4), który pod ciśnieniem kilkudziesięciu atmosfer skrapla się w temperaturze mieszaniny lodu z solą. Pod ciśnieniem atmosferycznym etylen ciekły wrze gwałtownie, a jego temperatura obniża się szybko aż do temperatury wrzenia pod normalnym ciśnieniem —103,5°C. Była to jeszcze temperatura wyższa od temperatury krytycznej tlenu i azotu. Przy obniżeniu zewnętrznego ciśnienia za pomocą pompy próżniowej etylen oziębia się jeszcze znaczniej i jego temperatura staje się niższa od temperatury krytycznej wymienionych gazów. Oziębiając je etylenem wrzącym pod ciśnieniem zmniejszonym i poddając wysokiemu ciśnieniu otrzymali Wróblewski i Olszewski gazy te w postaci cieczy.

Tabela 9.15 podaje dane odnoszące się do pewnej liczby ciał znanych we wszystkich trzech fazach: stałej, ciekłej i gazowej.

9.35. Wilgotność powietrza. Liczbę gramów pary wodnej zawartej w 1 m^3 powietrza nazywamy jego wilgotnością bezwzględną. Jeżeli pewną znaną objętość powietrza przeprowadzimy przez rurę, w której znajduje się ciało silnie pochłaniające wilgoć, jak chlorek wapnia, stężony kwas siarkowy lub pięciotlenek fosforu, pochłonie ono całkowicie parę zawartą w powietrzu. Z przyrostu ciężaru ciała suszącego można znaleźć ilość pary, która była zawarta w powietrzu. Znając objętość przepędzonego powietrza możemy obliczyć wilgotność bezwzględną.

Lecz znacznie ważniejszą dla nas rzeczą jest wiedzieć, jak bardzo para zawarta w powietrzu oddalona jest od stanu nasycenia. Jak wiemy, ilość pary nasyconej, jaka się może pomieścić w danej objętości, zależy w wysokim stopniu od temperatury, zatem powietrze zawierające pewną ilość, powiedzmy, m gramów pary może być w niskiej temperaturze bliskie stanu nasycenia, zaś w lecie, w temperaturze znacznie wyższej, może być bardzo dalekie od stanu nasycenia. Toteż o wiele ważniejsza jest dla nas znajomość tzw. wilgotności względnej, to znaczy stosunku ilości pary m g zawartej w powietrzu do ilości M g, jaką zawierałoby powietrze nasycone parą w danej temperaturze. Ponieważ para wodna w atmosferze aż do stanu nasycenia podlega wystarczająco dokładnie prawu Boyle'a, które możemy napisać w postaci (patrz 7.3, równanie 7.5):

$$\frac{p}{\varrho} = \text{const}, \tag{9.35}$$

gdzie ϱ jest gęstością gazu, więc stosując to prawo do pary i oznaczając odpowiednio ciśnienie i gęstość pary nasyconej przez p_0 i ϱ_0 możemy napisać

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{p_0}{\varrho_0} = \text{const}. \tag{9.36}$$

Ponieważ gęstości pary będą proporcjonalne do jej masy zawartej w tej samej objętości, zatem możemy również napisać

$$\frac{p}{m} = \frac{p_0}{M} = \text{const},$$

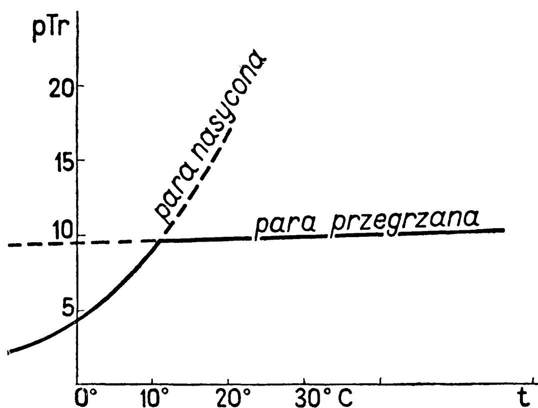
skąd

$$\frac{m}{M} = \frac{p}{p_0}. \qquad (9.37)$$

A więc wilgotność względna równa się w przybliżeniu stosunkowi ciśnienia pary aktualnie zawartej w powietrzu do ciśnienia pary nasyconej w tej samej temperaturze. Wilgotność względną wyrażamy zwykle w procentach. Oznaczając ją literą W możemy napisać

$$W\% = \frac{p}{p_0} 100 . \qquad (9.38)$$

Gdy powietrze zawierające pewną ilość pary ochładza się, to jego wilgotność bezwzględna się nie zmienia, zaś wilgotność względna powiększa się, ponieważ niższym temperaturom odpowiada niższe ciśnienie pary nasyconej p_0 (patrz wzór 9.38.) Zaś ciśnienie p pary przegrzanej w nim zawartej zmienia się z temperaturą tak nieznacznie, że możemy w przybliżeni u uważać je za stałe. Ponieważ co raz niższym temperaturom odpowiada coraz niższe ciśnienie pary nasyconej p_0, więc w końcu ciśnienie p (w liczniku) zrówna się z ciśnieniem p_0 (rys. 9.30). Przy dalszym, choćby bardzo nieznacznym oziębieniu powietrza para zaczyna się skraplać. Temperaturę, przy której para zaczyna się skraplać, nazywamy punktem rosy. Znając temperaturę punktu rosy będziemy wiedzieli, jakie jest ciśnienie pary rzeczywiście zawartej w powietrzu, gdyż jest ono równe ciśnieniu pary nasyconej przy temperaturze punktu rosy. Znalazłszy z tablic ciśnienie pary nasyconej przy temperaturze punktu rosy oraz ciśnienie pary nasyconej przy temperaturze powietrza łatwo już znaleźć wilgotność względną. Przypuśćmy np. że punkt rosy pary zawartej w powietrzu o temperaturze 20°C jest 10°C. Z tabel znajdujemy, że ciśnienie pary nasyconej przy temperaturze 10°C wynosi 9,2 mmHg (tab. 9.13). Takie jest więc ciśnienie pary zawartej w powietrzu. Ciśnienie zaś pary nasyconej w temperaturze 20°C wynosi 17,5 mmHg.



Rys. 9.30. Przejście pary przegrzanej w nasyconą przy oziębieniu

Zatem wilgotność względna

$$W = \frac{9,2}{17,5} \cdot 100 = 52\%.$$

Aby więc znaleźć wilgotność względną, trzeba wyznaczyć punkt rosy. Można go wyznaczyć za pomocą higrometru, którego najważniejszą częścią jest naczyńko o powierzchni gładkiej, polerowanej, srebrzonej lub złoconej, chłodzone parującym eterem, przez który dla przyśpieszenia parowania przepuszcza się strumień powietrza. Przy dostatecznie silnym ochłodzeniu błyszcząca powierzchnia matowieje, co jest dowodem osadzenia się na niej drobnych kropelek wody. Za pomocą termometru umieszczonego w naczyńku odczytujemy temperaturę punktu rosy. Do określenia wilgotności względnej używa się często niezbyt dokładnego, ale wygodnego higrometru włosowego opartego na własności wydłużania się odtłuszczonego włosa ludzkiego przy wzroście wilgotności. Higrometr taki musi być odpowiednio wycechowany.

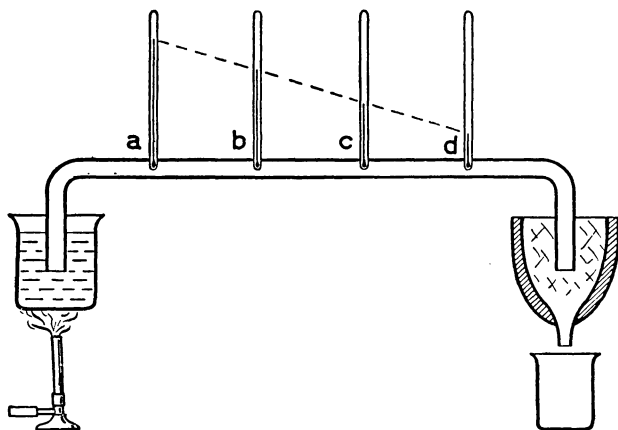
Przyrząd zwany psychrometrem składa się z dwóch termometrów, jednego suchego i drugiego, którego bańka owinięta jest kawałkiem muślinu zwilżonego wodą. Wilgotny termometr wskazuje niższą temperaturę niż suchy, ponieważ woda, którą jest zwilżony, paruje i pochłania z otoczenia, a więc i z termometru, ciepło. Im suchsze powietrze, tym szybciej paruje woda, tym niższą temperaturę wskazuje wilgotny termometr. Notując temperatury wskazywane przez oba termometry można z odpowiednich tablic psychrometrycznych odczytać wilgotność względną.

9.36. Ruch ciepła. Wiemy, że ciepło przenosi się z jednych ciał do drugich. Gdy np. wrzucimy kawałek gorącego żelaza do zimnej wody, woda się ogrzeje. Również przenosi się z jednych części ciała do innych. Gdy np. jeden koniec pręta metalowego ogrzewamy w płomieniu, drugi jego koniec po jakimś czasie również silnie się ogrzeje. Zastanowimy się teraz nad sposobami tego przenoszenia się ciepła.

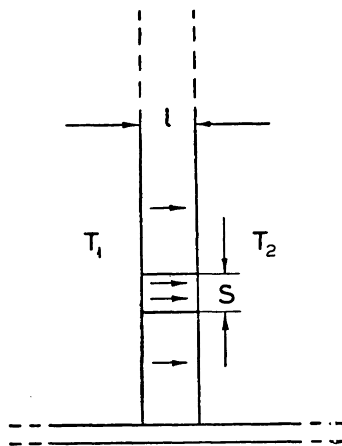
1. Konwekcja albo unoszenie ciepła. Gdy jakaś część cieczy lub gazu zostaje ogrzana, rozszerza się ona, gęstość jej maleje, wskutek czego cieplejsza porcja cieczy lub gazu wznosi się do góry, zaś z sąsiednich miejsc napływają chłodniejsze warstwy. Powoduje to powstawanie prądów. Stykając się z przedmiotami chłodniejszymi oddają im ciepło ogrzewając je w ten sposób. Tak prądy powietrza powstające w pokoju po napaleniu w piecu roznoszą ciepło oddając je ścianom, sufitowi, podłodze i przedmiotom znajdującym się w pokoju. Tak samo przy ogrzewaniu od dołu wody w naczyniu powstają prądy krążące w nim, dzięki czemu woda szybko ogrzewa się w całej swej masie. Zjawisko to nazywamy unoszeniem ciepła albo konwekcją.

2. Przewodzenie ciepła. a. *Przewodność ciał stałych.* Gdy jeden koniec pręta np. miedzianego, ogrzewamy w palniku trzymając drugi koniec w ręku, odczujemy szybko, że koniec trzymany w ręku staje się coraz cieplejszy. Najwidoczniej ciepło płynie od końca gorącego ku końcowi zimnemu.

Umieśćmy jeden koniec zagiętego pręta miedzianego jak na rys. 9.31 we wrzącej wodzie, drugi zaś w potłuczonym lodzie znajdującym się w izolowanym cieplnie od otoczenia naczyniu z odpływem. Wzdłuż pręta umieśćmy w wyżłobieniach napełnionych rtęcią termometry *a*, *b*, *c*, *d*. Zauważymy, że najpierw zacznie się podnosić rtęć termometru *a*, potem *b*, wreszcie również nieco się podniesie rtęć w termometrze *c*. Po dostatecznie długim czasie stan się ustali. Słupki rtęci w termometrach przestaną się poruszać. Stwierdzimy, że najwyższa temperatura ustali się w termometrze *a*, następne zaś będą wskazywać temperaturę coraz niższą. Wzdłuż pręta będziemy mieli spadek temperatury. Stwierdzimy również, że lód się topi. Powstająca zeń woda będzie ściekać do podstawionego naczynia.



Rys. 9.31. Przewodzenie ciepła przez pręt miedziany



Rys. 9.32. Przewodzenie ciepła przez płytę

Wniosek więc stąd, że 1) ciepło płynie wzdłuż pręta, 2) przepływ ciepła ma kierunek od temperatury wyższej do niższej w kierunku malejącej temperatury, 3) towarzyszy mu spadek temperatury wzdłuż prądu ciepła.

Zbierając wodę, która wycieknie z naczynia z lodem, i zważywszy, że stopienie 1 grama lodu wymaga doprowadzenia około 80 kalorii, możemy łatwo obliczyć, ile ciepła doprowadza pręt miedziany od końca cieplejszego do końca chłodzonego. Zatem przez ciała materialne może płynąć prąd ciepła, któremu nie towarzyszy ruch materii. Zjawisko to nazywamy przewodzeniem ciepła.

Biorąc zamiast pręta miedzianego pręt żelazny takiej samej długości i grubości stwierdzimy, że ilość przewodzonego ciepła w tym samym czasie będzie mniej więcej sześciokrotnie mniejsza niż przy pręcie miedzianym.

Różnice w przewodzeniu ciepła przez ciała materialne są bardzo znaczne. Aby móc je ująć liczbowo, wyobraźmy sobie dwa naczynia o bardzo wielkich rozmiarach, oddzielone jedno od drugiego ścianą z badanego materiału o grubości l (rys.9. 32). Niech naczynia te będą napełnione cieczą o temperaturze T_1 z jednej

strony ściany, a T_2 z drugiej strony. Ilość ciepła przepływająca przez część ściany (słupek pryzmatyczny lub walcowy) o przekroju S jest, jak wykazuje doświadczenie, proporcjonalna do wielkości tej powierzchni, do różnicy temperatur $T_1 - T_2$ i do czasu t, odwrotnie proporcjonalna zaś do grubości ściany l. Możemy więc napisać na tę ilość ciepła wzór

$$Q = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{l} t, \tag{9.39}$$

gdzie współczynnik proporcjonalności λ będzie zależeć od właściwości materiału, z którego ściana jest zrobiona. Nazywamy go przewodnością cieplną danego materiału. Gdy $S = 1\ \text{cm}^2$, $l = 1$ cm, $t = 1$ sec, $T_1 - T_2 = 1°$, wówczas $\lambda = Q$, a więc przewodność cieplna równa się liczbowo ilości ciepła przechodzącej przez 1 cm² ściany grubości 1 cm w czasie 1 sec pod wpływem różnicy temperatur równej 1°.

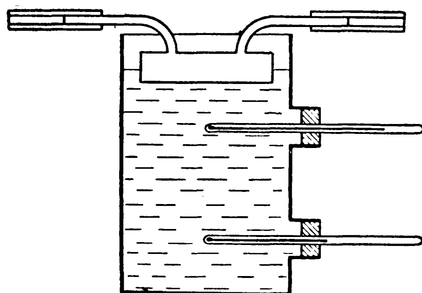
Z równania (9.39) wynika, że wymiar przewodności cieplnej

$$[\lambda] = \frac{[Q]}{[l]\,[T_1 - T_2]\,[t]}.$$

Jednostką zatem jest

$$\frac{\text{cal}}{\text{cm sec stopień}}.$$

Niektóre ciała, jak np. drewno, wykazują różną przewodność cieplną w różnych kierunkach: inna będzie wzdłuż włókien, inna w kierunku do nich prostopadłym. Także kryształy mają często przewodność cieplną różną w różnych kierunkach. Ciała wykazujące różne własności w różnych kierunkach nazywamy ciałami różnokierunkowymi albo anizotropowymi (jak o tym była już mowa w ust. 9.4). Ciała mające w różnych kierunkach jednakowe własności nazywamy ciałami izotropowymi.



Rys. 9.33. Urządzenie do stwierdzenia przewodności cieplnej cieczy

b. *Przewodność cieczy.* Przy badaniu przewodności cieczy trzeba uważać, aby nie było konwekcji. Możemy jej uniknąć ogrzewając ciecz od góry (rys. 9.33). Możemy np. ogrzewać parą naczyńko umieszczone na powierzchni cieczy i badać przepływ ciepła ku dołowi. Doświadczenie wykazuje, że przewodność cieplna cieczy jest znacznie mniejsza niż ciał stałych.

c. *Przewodność gazów.* Tak samo jak przy cieczach, przy badaniu przewodności cieplnej gazów należy usunąć konwekcję, a więc ogrzewać je od góry. Konwekcja

jest również prawie całkowicie usunięta, gdy gaz znajduje się między dwiema bliskimi stałymi ściankami. Znaczne tarcie wewnętrzne nie dopuszcza wtedy do ruchów konwekcyjnych. Przewodność cieplna gazów jest jeszcze znacznie mniejsza niż cieczy. Stąd też wszystkie ciała porowate, zawierające w sobie powietrze, jak wata, futro, filc itp. bardzo źle przewodzą ciepło.

Między gazami wodór wyróżnia się stosunkowo dużą przewodnością. Ta jego własność została wykorzystana w rozmaitych przyrządach w elektrotechnice prądów słabych, a również przy maszynach prądu silnego.

W tabeli 9.16 znajdują się dane odnoszące się do przewodności cieplnej różnych ciał w $\frac{\text{kaloriach}}{\text{cm sec stopień}}$. W technice wyraża się ją często w $\frac{\text{kilokaloriach}}{\text{metr godzinę stopień}}$. Jak łatwo wyrachować,

$$1 \frac{\text{cal}}{\text{cm sec stopień}} = 360 \frac{\text{kcal}}{\text{m godz stopień}}.$$

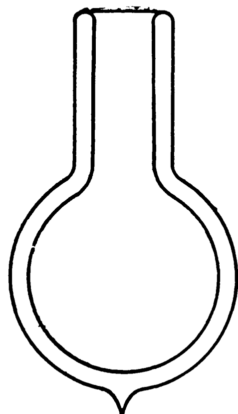
Tabela 9.16

Przewodność cieplna różnych materiałów

Ciało	Przewodność cieplna w cal/cm sec stop	Ciało	Przewodność cieplna w cal/cm sec stop
Srebro	1,00	Ebonit	0,0004
Miedź	0,95	Parafina	0,0002
Złoto	0,74	Drewno dębowe	
Glin	0,58	$\parallel$ do włókna	0,0008
Węgiel (grafit)	0,39	$\perp$ do włókna	0,0003
Cynk	0,27	Rtęć	0,015
Żelazo	0,10—0,15	Woda	0,0012
Ołów	0,08	Alkohol etylowy	0,0005
Bizmut	0,019	Eter etylowy	0,0004
Szkło	0,0011—0,0023	Nafta	0,0004
Wełna	0,00028	Wodór	0,00042
Bawełna	0,00055	Tlen	0,000059
		Azot	0,000058

3. *Promieniowanie.* Ciepło może się przenosić od jednego ciała do drugiego również bez wszelkiego pośrednictwa materii. Promienie słoneczne przenoszą bezpośrednio ciepło Słońca do Ziemi. Ciała rozgrzane, lecz posiadające temperaturę tak niską, że nie świecą, również wysyłają promieniowanie niewidzialne dla oka, zwane często promieniowaniem cieplnym. Wszelkie promieniowanie, a więc i cieplne, rozchodzi się po liniach prostych. Niektóre ciała przepuszczają to promieniowanie, inne (często nawet dla promieni świetlnych przeźroczyste)

nie przepuszczają go. Wszelkie gładkie, wypolerowane powierzchnie metaliczne odbijają promieniowanie. Za pomocą metalowego zwierciadła kulistego można promienie biegnące równolegle skupić w jednym punkcie zwanym ogniskiem zwierciadła. Zresztą wszystkie własności promieniowania cieplnego są identyczne z własnościami światła. Dlatego ogólne własności promieniowania będą omówione po optyce.



Rys. 9.34. Naczynie Dewara

Naczynia Dewara (czyt. Diuara) używane również w życiu codziennym pod nazwą termosów są tak zbudowane, aby wszystkie drogi przenoszenia się ciepła z wnętrza naczynia na zewnątrz lub odwrotnie były przecięte. W tym celu robi się naczynie ze szkła o podwójnych ścianach od wewnątrz srebrzonych, spomiędzy których jak najdokładniej wypompowuje się powietrze. W ten sposób ciepło nie może się wydostać z naczynia ani przez przewodzenie, ani przez konwekcję, ani przez promieniowanie (rys. 9.34). Takie naczynia stanowią stosunkowo bardzo dobre osłony adiabatyczne. Gorącą wodę, lód lub ciekłe powietrze można przechowywać w takich naczyniach po kilkadziesiąt godzin.

Zadania

9.16. Ile ciepła potrzeba, aby ogrzać 3 litry wody od temperatury 20°C do temperatury wrzenia (100°)?

Odpowiedź: 240 kcal.

9.17. Ile ciepła odda 10 kg wody ostygając od temperatury 90°C do temperatury 20°?

Odpowiedź: 700 kcal.

9.18. Ile wody o temperaturze $t_1 = 15°C$ trzeba dolać do 3,5 litrów wody o temperaturze $t_2 = 80°$, aby otrzymać wodę o temperaturze $t_3 = 50°$ (przy nieuwzględnieniu strat na zewnątrz)?

Odpowiedź: 3 litry.

9.19. Dla przygotowania kąpieli napuszczono najpierw do wanny pewną ilość wody gorącej o temperaturze 72°C. Jaką ilość wody o temperaturze 12° trzeba dolać, aby otrzymać 600 litrów wody o temperaturze 37°C?

Odpowiedź: 350 litrów.

9.20. Do kalorymetru wodnego zawierającego $m_1 = 300$ g wody o temperaturze $t_1 = 18°C$ wrzucono walec z cynku o masie $m_2 = 96{,}53$ g ogrzany do temperatury 99°C. Temperatura końcowa kalorymetru $t_3 = 20{,}4°C$. Jakie jest ciepło właściwe cynku c (ciepła na ogrzanie naczynia kalorymetrycznego, mieszadła i termometru nie uwzględniać)?

Odpowiedź: $c = 0{,}095$ cal/g stop.

9.21. Dla wyznaczenia ciepła właściwego nafty do mosiężnego kalorymetru o masie $m_1 = 120$ g nalano $m_2 = 200$ g nafty o temp. $t_1 = 20°C$. Następnie wrzucono ciężarek żelazny o masie $m_3 = 100$ g ogrzany do temp. $t_2 = 96°$. Temperatura nafty podniosła się do $t_3 = 26{,}6°$. Jakie znaleziono ciepło właściwe nafty c (ciepło właściwe mosiądzu $c_1 = 0{,}092$, ciepło właściwe żelaza $c_2 = 0{,}107$)?

Odpowiedź: $c = 0{,}51$.

9.22. Ile ciepła potrzeba do ogrzania o 10° powietrza znajdującego się w pokoju o rozmiarach 5 m × 4 m × 3 m przy ciśnieniu atmosferycznym $b = 740$ Tr (ciepło właściwe powietrza $c_p = 0{,}241$)?

Odpowiedź: $Q = 182{,}1$ kcal.

9.23. Do naczynia zawierającego 1 kg wody o temperaturze 17°C wrzucono 100 g lodu o temperaturze 0°C. O ile stopni oziębi się woda po stopieniu się lodu?

Odpowiedź: 8,8°.

9. 24. Do kalorymetru lodowego wlano 150 g wody o temperaturze 70°C. Ile lodu się stopiło?

Odpowiedź: 131,7 g.

9.25. $m = 700$ g miedzi ogrzanej do 100°C wrzucono do kalorymetru lodowego. Miedź stopiła 82,5 g lodu. Jakie jest ciepło właściwe miedzi c?

Odpowiedź: $c = 0{,}094$ cal/g stop.

9.26. $m_1 = 312{,}2$ g ołowiu stopionego w temperaturze topnienia 327,4°C wlano do kalorymetru lodowego. Ołów stopił $m_2 = 64$ g lodu. Obliczyć ciepło topnienia ołowiu (średnie ciepło właściwe ołowiu stałego $c = 0{,}032$ cal/g stop).

Odpowiedź: 5,86 cal/g.

9.27. W wodzie przechłodzonej do temperatury — 8°C wywołujemy krzepnięcie przez wrzucenie malutkiego kryształka lodu. Jaka część masy wódy zakrzepnie?

Odpowiedź: 0,091 całej masy.

9.28. Obniżenie temperatury topnienia lodu wynosi około 0,007° przy podwyższeniu ciśnienia o 1 kG/cm². Jaka część lodu o temperaturze 0°C stopi się z 1 kg i jaką uzyska on temperaturę po poddaniu go ciśnieniu 150 kG/cm², jeżeli ciepło z zewnątrz nie dopływa (ciepło właściwe lodu $c = 0{,}5$ cal/g stop)?

Odpowiedź: —1,05°, stopi się około 6,5 g.

9.29. Wodę oziębioną do temperatury 0°C zamrażamy odpompowując parę oraz pochłaniając ją za pomocą kwasu siarkowego stężonego. Jaka część wody odparuje, zanim reszta skrzepnie (dopływu ciepła z zewnątrz nie ma)?

Odpowiedź: 0,129 ≈ prawie $^1/_8$.

9.30. Do kalorymetru miedzianego ważącego razem z wężownicą 207,8 g wlano 450 g wody o temperaturze 18°C. Następnie wprowadzono do wężownicy parę o temperaturze 99,5°C. Ilość skroplonej pary była $m = 7{,}52$g, a kalorymetr ogrzał się do temperatury 27,8°C. Obliczyć ciepło parowania wody (ciepło właściwe miedzi $c = 0{,}094$).

Odpowiedź: około 540 cal/g.

9.31. Naczynie o pojemności 1 m³ zawierające parę wodną nasyconą suchą w temperaturze 50°C zmniejszamy do jednej piątej objętości pierwotnej w stałej temperaturze. Ile gramów cieczy i ile gramów pary będzie wówczas zawierało (patrz tab. 9.13, str. 214, gęstość wody w temperaturze 50° $\varrho = 0{,}988$ g/litr).

Wskazówka. Oznaczając przez ϱ_1 gęstość pary, ϱ_2 — gęstość wody, m — masę pary możemy napisać: $\frac{m}{\varrho_1} + \frac{83{,}1 - m}{\varrho_2} = 200$.

Odpowiedź: około 16,6 g pary, 66,5 g wody.

9.32. Temperatura powietrza $t = 30°$, punkt rosy $t_1 = 20°C$. Jaka jest bezwzględna i względna wilgotność powietrza?

Odpowiedź: wilgotność bezwzględna 17, 2 g/m³, względna 55%.

9.33. Przez ścianę o powierzchni 1 m², grubości 20 cm przechodzi w godzinie 1080 kcal ciepła. Obliczyć przewodność cieplną materiału ściany, wiedząc, że z jednej strony jest temperatura 100°C, po drugiej — 0°C.

Odpowiedź: 0,006 cal/sec cm stop.

9.34. Mieszkanie w domu z cegły oddzielone jest od zewnętrznego powietrza murem grubości 30 cm o ogólnej powierzchni 240 m². Okna podwójne zawierające warstwę powietrza grubości 20 cm zajmują z tej powierzchni 24 m². Ile ciepła traci mieszkanie przez przewodzenie na dobę przy temperaturze wewnętrznej strony ściany +18°C, zewnętrznej —10° (przewodność cieplna cegły 0,002, powietrza 0,00006, nie uwzględniamy strat wskutek promieniowania)?

Odpowiedź: około 350 000 kcal.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Według jakiej zasady sporządzona jest stustopniowa skala termometryczna (Celsjusza)?
2. Jak się określa współczynnik rozszerzalności liniowej? objętościowej? Jakie są ich wymiary?
3. Jaki jest związek między współczynnikami rozszerzalności liniowej i objętościowej?
4. Jak się zmienia masa właściwa z temperaturą?
5. Jaką osobliwość przedstawia rozszerzalność wody?
6. Jaka jest treść prawa Gay-Lussaca?
7. Jaki związek między parametrami określającymi stan gazu ustanawia równanie stanu?
8. Jaka jest zależność ciśnienia gazu od temperatury przy stałej objętości?
9. Jak jest zbudowany termometr gazowy? Na czym oparta jest skala gazowa temperatur? Skala bezwzględna temperatur?
10. W jakiej postaci można wyrazić równanie stanu przy wprowadzeniu temperatury bezwzględnej?
11. Jak się wyraża równanie stanu dla jednej gramodrobiny gazu? dla jednego grama (równanie Clapeyrona)?
12. Jakie jest prawo van der Waalsa?
13. Jak się wyraża ilość pobranego lub wydanego ciepła? Jakie są jednostki ilości ciepła?
14. Jak się określa ciepło właściwe? Jakie są jego wymiary?
15. Jakie są metody mierzenia ciepła właściwego?
16. Od czego zależy ciepło właściwe gazów? Jaka jest wartość c_p/c_v dla rozmaitych gazów?
17. Co to jest ciepło atomowe? Jaką prawidłowość stwierdza reguła Dulonga i Petita?
18. Jak się określa temperaturę topnienia i ciepło topnienia?
19. Jak można zmierzyć temperaturę topnienia i ciepło topnienia?
20. Czy można i w jakim wypadku stopić ciało przez podwyższenie ciśnienia?
21. Kiedy ciała znajdują się w równowadze termodynamicznej?
22. Jaka jest zależność temperatury topnienia od ciśnienia?
23. Co się stanie z temperaturą ciała przy stopieniu go przez poddanie wysokiemu ciśnieniu bez doprowadzenia ciepła z zewnątrz?
24. Jak się odbywa krzepnięcie roztworów rozcieńczonych? stężonych?
25. Jak określić i wyznaczyć temperaturę wrzenia?
26. Jak określamy ciepło parowania? W jakich jednostkach się wyraża?

27. W jaki sposób można zmierzyć ciepło parowania?
28. Jakie zjawisko nazywamy przegrzaniem cieczy?
29. Jaka jest zależność temperatury wrzenia od ciśnienia?
30. Jakie prawidłowości zachodzą przy wrzeniu roztworów?
31. Jaką parę nazywamy parą nasyconą? Jakie są jej własności?
32. Od czego zależy gęstość i ciśnienie pary nasyconej?
33. Czy ciśnienie i gęstość pary nasyconej w próżni i w powietrzu różnią się od siebie?
34. Jaką parę nazywamy parą nienasyconą lub przegrzaną? Jakie są jej własności?
35. Jakimi sposobami można zamienić parę przegrzaną w nasyconą?
36. Jaki przebieg mają izotermy par?
37. Jaką temperaturę nazywamy krytyczną? Jakie ciśnienie nazywamy ciśnieniem krytycznym?
38. Jak określamy wilgotność bezwzględną? względną? Jak można zmierzyć wilgotność bezwzględną i względną?
39. Jakie są sposoby przenoszenia się ciepła od jednych ciał do drugich?
40. Funkcją jakich wielkości jest ilość przewodzonego ciepła?
41. Jak musi być zbudowana osłona adiabatyczna?

10. Zasady termodynamiki

10.1. Wstęp. Termodynamika, jak sama nazwa wskazuje*, zajmuje się przemianami energii dynamicznej w cieplną i odwrotnie.

Przy najrozmaitszych doświadczeniach życia codziennego spostrzegamy, że przy wykonywaniu pracy mechanicznej wydziela się ciepło. Przy piłowaniu piłą drewna lub pilnikiem kawałka żelaza łatwo stwierdzić, że tak narzędzia, jak i piłowany materiał ogrzewają się, czasami nawet bardzo silnie. Przy uderzaniu kawałkiem stali o krzemień odpryskujące cząsteczki są rozgrzane tak silnie, że świecą tworząc snop iskier. Wiemy obecnie również, że przy spalaniu węgla pod kotłem maszyny parowej wytworzone ciepło przetwarza się (przynajmniej w części) na pracę.

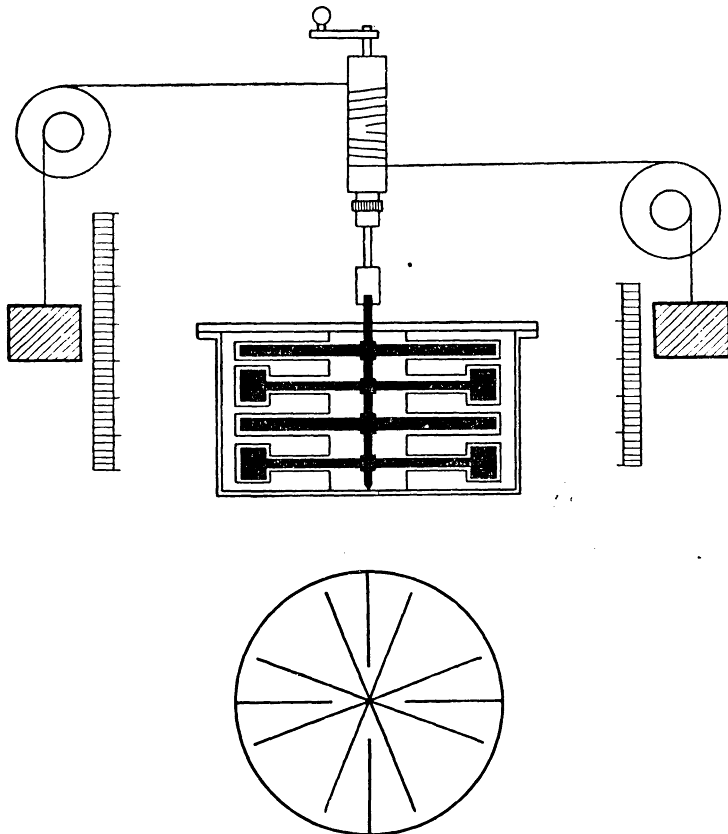
Przekonanie, że ciepło może powstawać z pracy, powoli torowało sobie drogę w nauce. Mniej więcej do początku XIX wieku było rozpowszechnione mniemanie, że ciepło jest pewnego rodzaju substancją nieważką, której ani zniszczyć ani stworzyć nie można, którą można tylko przelewać z jednego ciała do drugiego. Beniamin Thompson, późniejszy hrabia Rumford, zauważył przy wierceniu luf armatnich wydzielanie się tak dużych ilości ciepła, że można było za jego pomocą doprowadzić do wrzenia znaczniejszą ilość wody. Davy przez tarcie dwóch kawałków lodu w temperaturze — 2°C zdołał doprowadzić je do stopienia. Ostatecznie doświadczenia Joule'a (czyt. Dżula) oraz rozumowanie Mayera ugruntowały przekonanie o równoważności pracy i ciepła.

10.2. Równoważność pracy i ciepła. Mechaniczny równoważnik ciepła. W znanym doświadczeniu urządzonym tak, by praca zamieniała się całkowicie na ciepło, Joule wykazał, że przy wykonywaniu pracy wytwarza się ciepło i że ilość wytworzonego ciepła jest proporcjonalna do ilości wykonanej pracy. Doświadczenie jego polegało na mieszaniu mieszadłem z łopatkami wody w naczyniu kalorymetrycznym zaopatrzonym również w łopatki przymocowane do ścianek (rys. 10.1). W tych warunkach woda stawia duży opór mieszadłu i trzeba wykonywać znaczną pracę chcąc je obracać. Jednocześnie temperatura wody się podnosi. W doświadczeniu Joule'a praca była wykonywana przez opadające dwa duże ciężary. Ilość wykonanej pracy można było obliczyć, a jednocześnie,

* θερμός (termos) — ciepły, δύναμις (dinamis) — moc, działanie.

znając masę wody i przyrost temperatury, obliczyć ilość wytworzonego ciepła. Joule stwierdził, że ilość wytworzonego ciepła Q jest dokładnie proporcjonalna do ilości zużytej pracy L:

$$Q \propto L.$$



Rys. 10.1. Przyrząd Joule'a do pomiaru mechanicznego równoważnika ciepła

Stąd wynika oczywiście, że stosunek zużytej pracy do wytworzonego ciepła jest wielkością stałą. Oznaczamy go zwykle literą J. Nosi on nazwę mechanicznego równoważnika ciepła.

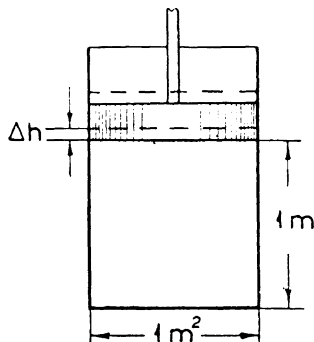
$$J = \frac{L}{Q}. \tag{10.1}$$

Według dzisiejszych danych mechaniczny równoważnik ciepła wynosi

$$J = 4{,}185 \cdot 10^7 \frac{\text{ergów}}{\text{cal}} = 0{,}4268 \frac{\text{kGm}}{\text{cal}} = 426{,}8 \frac{\text{kGm}}{\text{kcal}}.$$

Robert Mayer znalazł drogą rozumowania teoretycznego liczbowy stosunek między pracą i ciepłem opierając się na fakcie, iż ciepło właściwe gazu przy stałym

ciśnieniu ma większą wartość niż ciepło właściwe przy stałej objętości. W celu znalezienia mechanicznego równoważnika ciepła Mayer wykonał następujące doświadczenie myślowe. Powtórzymy to rozumowanie. Wyobraźmy sobie naczynie cylindryczne o podstawie, której pole wynosi 1 m². W cylindrze znajduje się szczelny tłok. Umieśćmy pod tłokiem powietrze w objętości 1 m³. Zatem tłok będzie się znajdował na wysokości 1 m nad dnem cylindra. Niech powietrze ma temperaturę 0°C i znajduje się pod normalnym ciśnieniem atmosferycznym, tzn. 760 mmHg (rys. 10.2). Ogrzejmy powietrze znajdujące się pod tłokiem o 1°. Podczas ogrzewania gaz się rozpręży i podniesie tłok nieco do góry. Przyrost objętości musi wynosić $^1/_{273}\ V_0 = 0{,}00367\ V_0$, zatem tłok przesunie się o $\Delta h = 0{,}00367$ m. Ponieważ masa powietrza w naczyniu wynosi 1,293 kg, ciepło właściwe powietrza przy stałym ciśnieniu $c_p = 0{,}2375\ \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$, przyrost temperatury wynosi 1°, zatem ilość pochłoniętego przez gaz ciepła Q_1 wyrazi się wzorem



Rys. 10.2. Doświadczenie (myślowe) Mayera

$$Q_1 = mc_p \cdot 1 = 1{,}293 \cdot 0{,}2375 \text{ kcal.} \qquad (10.2)$$

Doprowadźmy z powrotem temperaturę gazu do 0°C i powtórzmy jeszcze raz doświadczenie, lecz z małą odmianą. Przytwierdźmy mianowicie tłok tak, aby się nie mógł przesunąć. Ogrzejmy znowu powietrze o 1°. Ponieważ ciepło właściwe powietrza przy stałej objętości $c_v = 0{,}1690$, zatem ilość ciepła Q_2 pochłoniętego w tym przypadku przez powietrze wyrazi się wzorem

$$Q_2 = mc_v \cdot 1 = 1{,}293 \cdot 0{,}1690 \text{ kcal.} \qquad (10.3)$$

Różnica ciepła pobranego przez powietrze w obu wypadkach

$$Q = Q_1 - Q_2 = 1{,}293\,(0{,}2375 - 0{,}1690) = 0{,}088 \text{ kcal.} \qquad (10.4)$$

Mayer tłumaczy istnienie tej różnicy tym, że przy ogrzewaniu gazu pod stałym ciśnieniem ciepło idzie nie tylko na ogrzanie gazu, lecz również na wykonanie pracy przez gaz posuwający tłok do góry. Parcie gazu możemy uważać w przybliżeniu za równe sile zewnętrznej cisnącej na tłok (jeżeli rozprężanie się gazu następuje bardzo powoli). Siła ta

$$F = pS,$$

gdzie p jest normalnym ciśnieniem atmosferycznym wynoszącym 1,033 kG/cm², zaś S — polem powierzchni tłoka wynoszącym 10 000 cm². Zatem siła ta będzie wynosić

$$F = 1{,}033 \text{ kG/cm}^2 \cdot 10\,000 \text{ cm}^2 = 10\,330 \text{ kG.}$$

Pracę wykonaną przez rozszerzający się gaz łatwo już obliczyć, biorąc pod uwagę przesunięcia tłoka o 0,00367 m:

$$L = 10\,330\,\mathrm{kG} \cdot 0{,}00367\ \mathrm{m} = 37{,}91\ \mathrm{kGm}. \tag{10.5}$$

Na wykonanie tej pracy poszła nadwyżka ciepła w pierwszym przypadku wynosząca 0,088 kcal. Można z tych liczb znaleźć stosunek wykonanej pracy do pobranego ciepła, czyli mechaniczny równoważnik ciepła:

$$J = \frac{L}{Q} = \frac{37{,}91}{0{,}088}\ \frac{\mathrm{kGm}}{\mathrm{kcal}} = 427{,}9\ \mathrm{kGm/kcal}. \tag{10.6}$$

Otrzymuje się, jak widać, liczbę zupełnie zgodną z liczbą znalezioną doświadczalnie.

A więc tak w wypadku zamiany pracy na ciepło, jak i ciepła na pracę zawsze zachodzi stosunek

$$L \sim Q.$$

Praca i ciepło są to więc dwie równoważne postacie energii. Oznaczając współczynnik proporcjonalności jak poprzednio przez J możemy zawsze napisać

$$L = JQ, \tag{10.7}$$

gdzie

$$J = 4{,}185 \cdot 10^7\ \frac{\text{ergów}}{\mathrm{cal}} = 0{,}4268\ \frac{\mathrm{kGm}}{\mathrm{cal}} = 426{,}8\ \frac{\mathrm{kGm}}{\mathrm{kcal}}.$$

Za pomocą tego związku można zawsze ilość ciepła podaną w kaloriach lub kilokaloriach przeliczyć na ergi lub kilogramometry lub odwrotnie — ilość pracy przeliczyć na kalorie. W dalszym ciągu wykładu będziemy stale tak pracę, jak i ciepło wyrażać w tych samych jednostkach, najczęściej w kaloriach.

10.3. Pierwsza zasada termodynamiki. Przyjmiemy tu najpierw pewne umowy. Będziemy mianowicie przyjmować pracę pobraną przez układ tak samo jak w mechanice za dodatnią, pracę wydaną przez układ — za ujemną. Taką samą umowę przyjmiemy co do ciepła: ciepło pobierane będziemy uważali za dodatnie, wydawane — za ujemne.

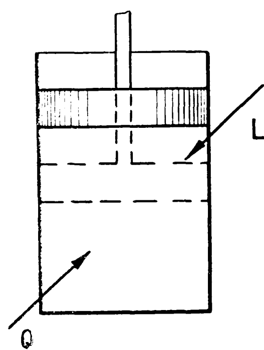
Każde ciało dzięki ruchom cząsteczek, z których jest złożone, ma pewien zapas ukrytej energii kinetycznej, dzięki zaś siłom działającym między cząsteczkami — pewien zapas energii potencjalnej. Suma tych energii stanowi tzw. energię wewnętrzną ciała, którą będziemy oznaczać literą U.

Weźmy pod uwagę jakiekolwiek ciało. Przypuśćmy, że je ogrzejemy doprowadzając pewną ilość ciepła Q oraz wykonamy nad nim pewną pracę L (np. ogrzewając oraz zgęszczając za pomocą tłoka gaz w cylindrze jak na

rys. 10. 3). Według zasady zachowania energii energia doprowadzona w postaci pracy i ciepła zniknąć nie może, musi zatem pozostać nagromadzona w ciele. Powiększy ona energię wewnętrzną ciała. Oznaczając energię wewnętrzną literą U musimy przyjąć, że przy pobraniu pracy i ciepła energia wewnętrzna początkowa ciała U_1 musi wzrosnąć do U_2 i przyrost energii wewnętrznej musi się równać sumie pobranej pracy i pobranego ciepła. Wyrazi to równanie

$$\boxed{L + Q = U_2 - U_1.} \tag{10.8}$$

Równanie to wyraża pierwszą zasadę termodynamiki, która jest właściwie zasadą zachowania energii ograniczoną do trzech jej odmian: pracy mechanicznej, energii cieplnej i energii wewnętrznej.



Rys. 10.3. Przykład pobierania pracy i ciepła przez gaz

Jeżeli się organiczymy do bardzo małych ilości doprowadzonych pracy i ciepła, to i przyrost energii wewnętrznej będzie bardzo mały. Możemy wtedy napisać równanie wyrażające I zasadę termodynamiki w postaci

$$\boxed{\Delta L + \Delta Q = \Delta U.} \tag{10.9}$$

W termodynamice ograniczamy się do rozpatrywania ciał będących w stanie równowagi. Ruchu ciał nie bierzemy pod uwagę. Ograniczamy się tu do rozpatrywania ciał jednorodnych, to znaczy takich, które w najdrobniejszych nawet częściach mają fizyczny skład jednakowy. Stan takiego ciała określony jest wówczas przez objętość ciała V, ciśnienie, pod którym się ono znajduje, p oraz temperaturę T. Trzy te zmienne, których wartości określają stan ciała, nazywamy parametrami termodynamicznymi. Jak wyjaśniliśmy w nauce o gazach, dwa tylko z tych parametrów są niezależne, trzeci zaś jest funkcją dwóch pozostałych:

$$p = f(V, T) \qquad \text{albo} \qquad V = F(p, T).$$

Energia wewnętrzna ciała jest w ogólności funkcją parametrów określających stan układu, a więc objętości ciała i jego temperatury albo też ciśnienia i temperatury.

10.4. Doświadczenia Gay-Lussaca i Joule'a — Thomsona. Energia wewnętrzna gazu doskonałego. Najprościej stosunki przedstawiają się w gazach, których równanie stanu związujące wielkości p, V i T jest znane i ma prostą postać. Pierwszym zagadnieniem, jakie się nasuwa w termodynamice, jest znalezienie, jaką funkcją parametrów termodynamicznych jest energia wewnętrzna

gazów. Oczywiście trzeba to znaleźć doświadczalnie. Doświadczenie wykonane przez Gay-Lussaca, a następnie przez Joule'a było następujące: dwa zbiorniki metalowe o równych objętościach A i B były połączone rurką zamkniętą kurkiem (rys. 10.4). Jeden ze zbiorników został napełniony powietrzem pod ciśnieniem 22 atmosfer, drugi wypróżniony. Oba zbiorniki były zanurzone w większym naczyniu napełnionym wodą. Czuły termometr zanurzony w wodzie wskazywał temperaturę. Po ustaleniu się i wyrównaniu wszędzie temperatury kurek został otwarty. Oczywiście część gazu przepłynęła od napełnionego zbiornika do pustego. Gaz się rozprężył. Termometr, chociaż użyto bardzo czułego, nie wykazał żadnej zmiany temperatury. Stąd wniosek: rozprężający się gaz nie pobrał ani nie oddał ciepła

$$Q = 0.$$

Praca sił zewnętrznych, wobec sztywnych ścian zbiorników, również była równa zeru:

$$L = 0.$$

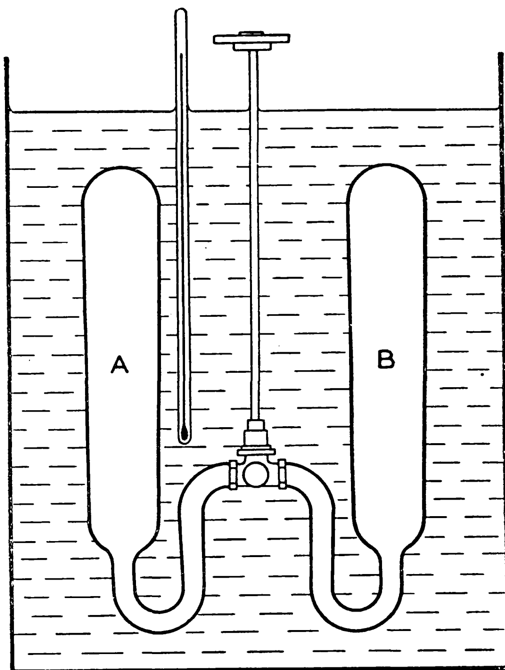
Z pierwszej zasady termodynamiki

$$L + Q = U_2 - U_1$$

otrzymamy dla rozpatrywanego zjawiska

$$U_2 - U_1 = 0, \quad \text{skąd} \quad U_2 = U_1.$$

U_2 jest to energia wewnętrzna gazu po rozprężeniu, U_1 zaś — przed rozprężeniem. Po rozprężeniu objętość gazu powiększyła się dwukrotnie, ciśnienie zaś się zmniejszyło. Skoro energia wewnętrzna nie zmieniła się, to stąd można wyciągnąć wniosek, że energia wewnętrzna gazu nie może zależeć od jego objętości czy też ciśnienia. Może zależeć zatem tylko od temperatury.



Rys. 10.4. Doświadczenie Joule'a: rozprężenie gazu w próżnię odbywa się bez zmiany jego energii wewnętrznej

Wykonane później przez Joule'a i Thomsona dokładniejsze pomiary wykazały jednak niewielkie zmiany temperatury przy rozprężaniu bez wykonywania pracy sił zewnętrznych, przy czym tlen, azot, powietrze oziębiały się nieco, wodór — ogrzewał się. Jeżeli podwyższano temperaturę, przy której doświadczenie było wykonywane, zmiany te szybko malały. Ponieważ przy temperaturach wysokich gazy zbliżają się we własnościach do gazu idealnego, możemy przyjąć,

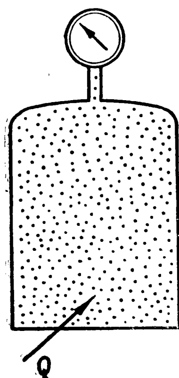
że energia wewnętrzna gazu idealnego nie zależy od jego objętości i ciśnienia. Może być jedynie funkcją temperatury:

$$U = f(T).$$

Ta własność, że energia gazu idealnego jest funkcją jedynie temperatury, będzie uzupełni niem poprzedniej definicji gazu idealnego.

10.5. Ogrzewanie gazu przy stałej objętości (przemiana izochoryczna, $V = \text{const}$). Wyznaczenie energii wewnętrznej gazu doskonałego. Zamknijmy pewną masę m g gazu w naczyniu o stałej objętości (rys. 10.5). Ogrzejmy gaz tak, aby temperatura podwyższyła się o dT. Aby to osiągnąć, będziemy musieli doprowadzić ciepło w ilości

$$\Delta Q = mc_v\, dT \tag{10.10}$$



Rys. 10.5. Ogrzewanie gazu przy stałej objętości: energia wewnętrzna gazu wzrasta

(c_v, gdyż objętość gazu jest stała). Praca sił zewnętrznych podczas ogrzewania $\Delta L = 0$. Stosując do przebiegu zjawiska I zasadę termodynamiki

$$\Delta L + \Delta Q = \Delta U$$

otrzymamy w rozpatrywanym przypadku

$$mc_v\, dT = \Delta U.$$

Zamiast ΔU możemy tu napisać różniczkę dU, gdyż, jak wiemy, U jest funkcją tylko temperatury T*:

$$dU = mc_v\, dT. \tag{10.11}$$

Całkując to równanie otrzymamy

$$U = mc_v T + \text{const}.$$

Oznaczmy stałą całkowania przez U_0. Będziemy mieli wtedy

$$U = mc_v T + U_0. \tag{10.12}$$

oeżeli podstawimy do tego wzoru $T = 0$, wówczas otrzymamy $U = U_0$. Zatem U_0 Jznacza energię wewnętrzną gazu w temperaturze zera bezwzględnego. W termodynamice możemy przyjąć, że energia ta równa się zeru**. Otrzymujemy więc na energię wewnętrzną gazu wzór

$$\boxed{U = mc_v T} \tag{10.13}$$

---

* Można wykazać, że dU jest zawsze różniczką zupełną.

** Mamy dziś podstawy do twierdzenia, że nawet w temperaturze zera bezwzględnego drobiny gazu posiadają pewną energię. Przy rozpatrywanych tu zjawiskach termodynamicznych nie ma to żadnego znaczenia, tym bardziej, że mamy tu do czynienia tylko ze zmianami energii.

Energia wewnętrzna gazu doskonałego jest proporcjonalna do temperatury bezwzględnej T.

10.6. Zgęszczanie lub rozprężanie gazu przy stałej temperaturze (przemiana izotermiczna: $T = \text{const}$). Jeżeli objętość gazu zamkniętego w cylindrze pod tłokiem (rys. 10.6) zmniejszamy dbając o to, aby jego temperatura się nie zmieniła, to pisząc równanie wyrażające I zasadę termodynamiki

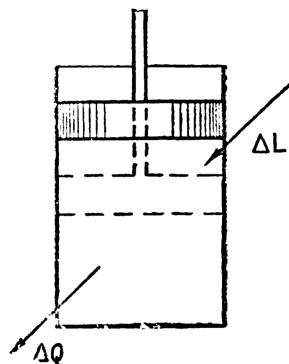
$$L + Q = U_2 - U_1 \tag{10.14}$$

otrzymamy po prawej stronie zero, gdyż jeżeli temperatura się nie zmieni, to i energia wewnętrzna nie ulegnie zmianie:

$$U_2 - U_1 = mc_v T_2 - mc_v T_1 = 0, \quad \text{gdy} \quad T_2 = T_1.$$

Otrzymamy więc z równania (10.14)

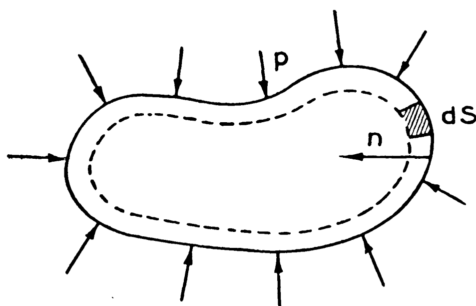
$$L + Q = 0, \quad \text{skąd} \quad L = -Q. \tag{10.15}$$



Rys. 10.6. Zgęszczenie izotermiczne gazu

Równanie to wyraża, że gdy $L > 0$, to znaczy, gdy siły zewnętrzne wykonają pracę dodatnią zgęszczając gaz, to $Q < 0$, gaz wyda ciepło, musimy mu odebrać ciepło w ilości równoważnej doprowadzonej pracy. Jeżeli zaś $L < 0$, tzn. gdy gaz wydaje pracę rozprężając się, to $Q > 0$, pobierze zatem z otoczenia ciepło w ilości równoważnej.

Przy izotermicznych zmianach objętości gazu praca sił zewnętrznych zamienia się w całości na ciepło lub odwrotnie, pobrane ciepło zamienia się w całości na pracę, którą gaz wydaje rozprężając się przy pokonywaniu sił zewnętrznych.



Rys. 10.7. Praca ciśnień zmieniających objętość ciała

10.7. Praca ciśnienia wywołującego zmianę objętości ciała. Weźmy pod uwagę ciało dowolnego kształtu i wywrzyjmy na nie ciśnienie normalne. Pod jego wpływem objętość ciała zmniejszy się od V_1 do V_2. Weźmy pod uwagę mały element powierzchni tego ciała dS (rys. 10.7). Siła działająca na ten element jest

$$p\,dS.$$

Siła ta przy ściśnięciu ciała wykona pracę

$$p\,dS\,h,$$

gdzie h oznacza przemieszczenie elementu dS w kierunku normalnej wewnętrznej n. Jeżeli podzielimy całą powierzchnię ciała na elementy, to praca

wykonana przez układ sił działających na całą powierzchnię ciała wyrazi się wzorem

$$\Delta L = p\, dS_1\, h_1 + p\, dS_2\, h_2 + p\, dS_3\, h_3 + \ldots + p\, dS_n\, h_n = $$
$$= p\,(dS_1\, h_1 + dS_2\, h_2 + \ldots + dS_n\, h_n). \tag{10.16}$$

Wyrażenie w nawiasie równa się różnicy między początkową objętością V_1 a końcową V_2:

$$dS_1\, h_1 + dS_2\, h_2 + \ldots + dS_n\, h_n = V_1 - V_2 = -(V_2 - V_1) = -dV.$$

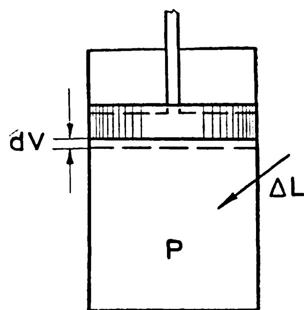
A więc praca wykonana przez układ sił zewnętrznych

$$\boxed{\Delta L = -p\, dV.} \tag{10.17}$$

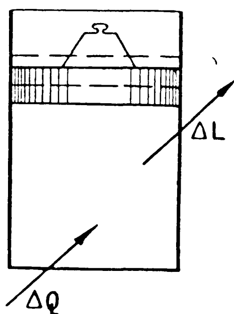
Jeżeli więc np. pod wpływem ciśnienia zewnętrznego gaz zawarty w cylindrze zmniejszy swoją objętość (rys. 10.8) o dV, lecz tak nieznacznie, aby można było uważać ciśnienie podczas zgęszczania gazu w przybliżeniu za stałe, to praca sił zewnętrznych

$$\Delta L = -p\, dV.$$

We wzorze tym p oznacza ciśnienie zewnętrzne. Zwykle jednak przy rachunkach zamiast ciśnienia zewnętrznego bierzemy ciśnienie wewnętrzne gazu. Jest to tylko wtedy usprawiedliwione, jeżeli zgęszczanie odbywa się tak wolno, że ciśnienie wewnętrzne równoważy się z ciśnieniem zewnętrznym. Jest to wtedy możliwe, gdy zjawisko odbywa się nadzwyczaj powoli, jak mówimy, niemal statycznie. Do takich jednak właśnie zjawisk ograniczamy się w termodynamice.



Rys. 10. 8. Praca wykonywana przy niewielkim zgęszczeniu gazu



Rys. 10. 9. Ogrzewanie gazu przy stałym ciśnieniu

10.8. Ogrzewanie gazu przy stałym ciśnieniu (przemiana izobaryczna $p = \text{const}$). Obliczenie różnicy $C_p - C_v$. Poddając gaz doskonały przemianie izobarycznej możemy obliczyć zależność między ciepłem właściwym gazu w stałej objętości i ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu. Zamknijmy pewną masę gazu w cylindrze pod tłokiem ruchomym, na który działa stałe ciśnienie (rys. 10.9). Doprowadźmy pewną niewielką ilość ciepła ΔQ. Temperatura gazu podniesie się o dT, a jednocześnie gaz się nieco rozpręży wykonując pracę przeciwko siłom zewnętrznym. Równanie wyrażające I zasadę termodynamiki ze względu na to, że w tym przypadku

$$\Delta Q = mc_p\, dT, \qquad \Delta L = -p\, dV, \qquad dU = mc_v\, dT,$$

możemy napisać w postaci

$$mc_p\,dT - p\,dV = mc_v\,dT, \tag{10.18}$$

skąd otrzymamy

$$m(c_p - c_v)\,dT = p\,dV. \tag{10.19}$$

Weźmy teraz do pomocy równanie stanu gazu doskonałego (Clapeyrona):

$$pV = \frac{R}{\mu} mT. \tag{10.20}$$

Różniczkując to równanie otrzymamy

$$p\,dV = \frac{R}{\mu} m\,dT \tag{10.21}$$

(p jest w naszym przypadku stałe).

Podstawiając wartość wyrażenia (10.21) do równania (10.19) otrzymamy

$$m(c_p - c_v)\,dT = \frac{R}{\mu} m\,dT, \tag{10.22}$$

skąd otrzymamy

$$c_p - c_v = \frac{R}{\mu}. \tag{10.23}$$

Mamy tu związek między ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu, ciepłem właściwym przy stałej objętości, stałą gazów i ciężarem drobinowym. Różnica między wartościami ciepła właściwego jest, jak widać z tego równania, odwrotnie proporcjonalna do ciężaru drobinowego gazu.

Mnożąc obie strony równania (10.23) przez μ otrzymamy

$$\mu c_p - \mu c_v = R, \tag{10.24}$$

gdzie μc_p jest to ilość ciepła potrzebna do ogrzania jednej gramodrobiny (mola) gazu o 1°. Nazywamy ją ciepłem gramodrobinowym lub molowym przy stałym ciśnieniu i oznaczamy przez C_p. Podobnie $\mu c_v = C_v$. Otrzymamy zatem związek

$$C_p - C_v = R. \tag{10.25}$$

Ponieważ $R = 8{,}315 \cdot 10^7$ erg/stop $= \dfrac{8{,}315}{4{,}185}\,\dfrac{\text{cal}}{\text{stop}}$ (gdyż 1 cal $= 4{,}185 \cdot 10^7$ ergów), zatem otrzymamy

$$C_p - C_v = 1{,}986 \frac{\text{cal}}{\text{gramodrobina stop}} \approx 2 \frac{\text{cal}}{\text{gramodrobina stop}},$$

zaś

$$c_p - c_v = \frac{1{,}986}{\mu}\,\frac{\text{cal}}{\text{g stop}}.$$

10.9. Zgęszczenie lub rozprężenie adiabatyczne gazu (przemiana adiabatyczna: $\Delta Q = 0$). Prawo Poissona. Zjawiskiem adiabatycznym nazywamy zjawisko, przy którym nie ma wymiany ciepła z otoczeniem: $\Delta Q = 0$. Zbadajmy, co się stanie z gazem, gdy go zgęścimy adiabatycznie. W tym celu należy umieścić gaz w cylindrze o ścianach adiabatycznych, to jest nieprzenikliwych dla ciepła. W cylindrze znajduje się masa m gazu. Na tłok zrobiony również z materiału nieprzenikliwego dla ciepła wywieramy ciśnienie p (rys. 10.10). Zostanie zatem wykonana praca

$$\Delta L = -p\,dV,$$

zaś

$$\Delta Q = 0,$$

$$dU = mc_v\,dT.$$

Zatem z równania wyrażającego I zasadę termodynamiki otrzymamy

$$-p\,dV = mc_v\,dT. \tag{10.26}$$

ΔL

Rys. 10.10. Zgęszczenie adiabatyczne gazu

Z równania Clapeyrona

$$pV = \frac{R}{\mu} mT \tag{10.27}$$

możemy określić p:

$$p = \frac{R}{\mu} m \frac{T}{V} \tag{10.28}$$

i podstawić do równania (10.26); otrzymamy wówczas

$$-\frac{R}{\mu} m \frac{T\,dV}{V} = mc_v\,dT. \tag{10.29}$$

Znaleźliśmy poprzednio, że $\frac{R}{\mu} = c_p - c_v$. Podstawiając tę wartość do równania (10.29) i dzieląc je przez T możemy napisać

$$-m(c_p - c_v)\frac{dV}{V} = mc_v\frac{dT}{T}. \tag{10.30}$$

Po skróceniu przez m, podzieleniu przez c_v i przeniesieniu wyrazów na jedną stronę otrzymujemy:

$$\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0. \tag{10.31}$$

Stosunek $\frac{c_p}{c_v}$ oznaczaliśmy literą $\varkappa$, zatem

$$(\varkappa - 1)\frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0. \tag{10.32}$$

Całkując to równanie otrzymamy

$$(\varkappa - 1) \ln V + \ln T = \text{const.} \tag{10.33}$$

Lecz według znanego twierdzenia matematyki elementarnej

$$(\varkappa - 1) \ln V = \ln V^{\varkappa - 1}, \tag{10.34}$$

a sumę logarytmów możemy zastąpić logarytmem iloczynu. Otrzymamy wtedy

$$\ln (V^{\varkappa-1} T) = \text{const.} \tag{10.35}$$

Jeżeli logarytm jakiejś wielkości jest stały, to i sama wielkość musi być stała. Możemy zatem ostatecznie napisać

$$\boxed{V^{\varkappa-1} T = \text{const.}} \tag{10.36}$$

Jest to tzw. równanie Poissona (czyt. Puassona). Mówi ono, że gdy zmniejszamy adiabatycznie objętość gazu, to jego temperatura musi się podnosić, przy adiabatycznym powiększeniu objętości gazu musi on się oziębiać. Wniosek ten moglibyśmy zresztą wysnuć bezpośrednio z równania wyrażającego I zasadę termodynamiki, które ze względu na to, że $Q = 0$, ma dla tego przypadku formę następującą:

$$L = U_2 - U_1. \tag{10.37}$$

Równanie to oznacza, że energia wewnętrzna gazu wzrasta przy zgęszczeniu adiabatycznym o ilości wykonanej pracy ($L > 0$, $U_2 > U_1$), przy rozprężeniu maleje o ilość wydanej pracy ($L < 0$, $U_2 < U_1$).

Równanie Poissona pozwala wyliczyć, do jakiej temperatury ogrzeje się gaz przy zgęszczeniu adiabatycznym. Jak nie trudno się zorientować z przykładu liczbowego, wzrost temperatury gazu przy znacznym zgęszczeniu może być bardzo znaczny. Weźmy np. 1 litr powietrza o temperaturze pokojowej 20°C = = 293°K i zmniejszmy jego objętość adiabatycznie do $^1/_{20}$ litra. A więc

przed zgęszczeniem

$$V_1 = 1 \text{ litr},$$

$$T_1 = 293°\text{K};$$

po zgęszczeniu

$$V_2 = \frac{1}{20} \text{ litra},$$

$$T_2 = ?$$

dla powietrza

$$\varkappa = 1{,}4.$$

Według równania Poissona

$$V_1^{1,4-1} \cdot T_1 = V_2^{1,4-1} \cdot T_2 = \text{const},$$

czyli

$$293 = \left(\frac{1}{20}\right)^{0,4} \cdot T_2,$$

skąd otrzymujemy

$$T_2 = 293 \cdot 20^{0,4}.$$

Logarytmując otrzymamy

$$\lg T_2 = \lg 293 + 0{,}4 \lg 20 = 2{,}4669 + 0{,}5204 = 2{,}9873.$$

Zatem $T_2 = 971°\text{K}$, czyli 698°C. Temperatura powietrza wzrośnie po zgęszczeniu do 698°C.

Ten wysoki wzrost temperatury przy zgęszczaniu gazu został wykorzystany w silnikach Diesla. Wessane do cylindra powietrze tłok spręża bardzo silnie (30 do 35 Atm). Wskutek tego temperatura powietrza podnosi się bardzo wysoko (powyżej 800°C). Wtryskiwane do cylindra za pomocą specjalnej pompki paliwo zapala się natychmiast w tej temperaturze, a ciśnienie gazów powstających przy spalaniu cisnąc na tłok wykonywa pracę podtrzymując ruch silnika.

Z adiabatycznym rozprężeniem gazu połączonym z wykonaniem pracy przeciwko siłom zewnętrznym połączone jest silne oziębienie. Zjawisko to zużytkowano w niektórych typach aparatów do skraplania gazów.

W atmosferze przy ruchach powietrza, gdy wielkie jego masy przechodzą przy wznoszeniu się do góry spod ciśnienia większego do mniejszego, oziębiają się one adiabatycznie. W przypadku ich dużej wilgotności para wskutek oziębienia przechodzi w stan nasycenia, a następnie skrapla się. Stąd pochodzi zjawisko deszczu.

Mnożąc stronami równanie (10.36) przez równanie stanu gazów

$$\frac{pV}{T} = \text{const} \tag{10.38}$$

otrzymamy równanie

$$\boxed{pV^{\varkappa} = \text{const}} \tag{10.39}$$

nazywane również równaniem Poissona. Przypomina ono wyglądem równanie Boyle'a, które, jak o tym poprzednio była mowa (patrz 7.3), stosuje się do przebiegu izotermicznego. Równanie to różni się od równania Poissona tylko wykładnikiem przy V:

równanie Boyle'a $pV^1 = \text{const}$,

równanie Poissona dla gazów dwuatomowych $pV^{1,4} = \text{const}$.

Łatwo stwierdzić, że przy adiabatycznym zmniejszaniu objętości ciśnienie szybciej wzrasta niż przy izotermicznym. Rysunek 10.11 przedstawia krzywą

dającą zależność ciśnienia gazu od jego obojętności przy stałej temperaturze, tzw. izotermę, oraz krzywą dającą zależność ciśnienia od objętości przy adiabatycznym zgęszczaniu, tzw. adiabatę.

Podnosząc równanie stanu gazów do potęgi $\varkappa$

$$\left(\frac{pV}{T}\right)^{\varkappa} = \text{const}$$

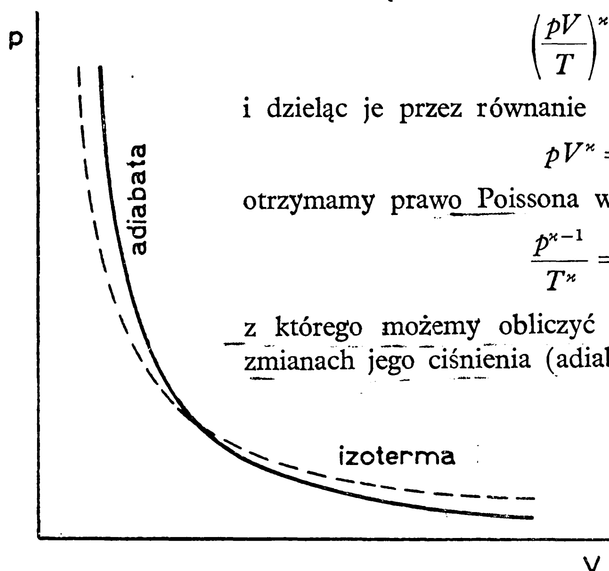
i dzieląc je przez równanie

$$pV^{\varkappa} = \text{const}$$

otrzymamy prawo Poissona w trzeciej postaci:

$$\frac{p^{\varkappa-1}}{T^{\varkappa}} = \text{const}, \tag{10.40}$$

z którego możemy obliczyć zmiany temperatury gazu przy zmianach jego ciśnienia (adiabatycznych).



Rys. 10.11. Izoterma i adiabata gazu

10.10. Zjawiska odwracalne i nieodwracalne. W termodynamice często przeprowadzamy rozumowania nad zjawiskami wyidealizowanymi, fikcyjnymi, do których jednak zjawiska rzeczywiste mogą się więcej albo mniej zbliżać. Do takich zjawisk idealnych należą tzw. zjawiska odwracalne. Zjawiskami odwracalnymi nazywamy takie zjawiska, których bieg w każdej chwili można odwrócić, mogą się zatem odbywać w jednym albo drugim kierunku. Jeżeli więc układ przechodzi od jakiegoś stanu początkowego S_1 do końcowego S_2 i gdy to zjawisko możemy odwrócić tak, aby z powrotem przeszedł on od stanu S_2 do S_1 przechodząc przez te same stany pośrednie w odwrotnym porządku i aby jednocześnie wymiana energii między tym układem a ciałami zewnętrznymi również została odwrócona, to takie zjawisko nazywamy odwracalnym. Przykładem takiego zjawiska jest b a r d z o p o w o l n e rozprężanie izotermiczne gazu, tak powolne, aby w każdym momencie siły zewnętrzne równoważyły się z parciem gazu, to znaczy, aby powiększanie objętości odbywało się przez nieskończenie powolne przejście przez szereg stanów równowagi. Takie zjawisko możemy w każdej chwili odwrócić, przy czym odwrócą się również wszelkie zmiany energetyczne tak w gazie, jak i w otoczeniu. Gdy więc izotermicznie bardzo powoli zgęszczamy gaz, pobiera on z zewnątrz pracę L i wydaje równoważną ilość ciepła Q. Przy odwróceniu zjawiska gaz się rozpręża izotermicznie, przy czym przy powrocie do stanu początkowego wydaje z powrotem pracę L, a po-

biera ciepło Q. Jest to więc zjawisko odwracalne. Również odwracalne jest bardzo powolne zgęszczanie adiabatyczne gazu. Pobiera on przy tym pracę L, która powiększa jego energię wewnętrzną. Zjawisko da się odwrócić: gaz się wówczas rozpręża i wydaje z powrotem pracę w ilości L równej poprzednio pobranej, natomiast o tyleż zmniejsza się jego energia wewnętrzna.

Zjawiska tak powolne, że w każdej chwili siły wewnętrzne równoważą się z zewnętrznymi, nazywamy quasi-statycznymi. Nie ma wówczas żadnego bodźca, który by pędził zjawisko w pewną stronę, nie ma żadnego rozpędzania części układu. Właściwie zjawiska statyczne, tzn. składające się ze stanów równowagi, nie mogą się w ogóle odbywać. Jednakże zjawiska odbywające się bardzo powoli mogą w wielu wypadkach dowolnie zbliżać się do zjawisk quasi-statycznych. To, że czas, w którym zachodziłyby te zjawiska, byłby bardzo długi, nie odgrywa roli, ponieważ w rozumowaniach termodynamicznych czas w ogóle nie występuje.

W przeciwieństwie do poprzednich wszystkie zjawiska, w których mamy rozpędzenie lub jakikolwiek bodziec wywołujący zjawisko w określonym kierunku są zjawiskami nieodwracalnymi. A więc np. upadek kamienia z pewnej wysokości na niesprężystą podstawę połączony z wydzieleniem się ciepła jest zjawiskiem nieodwracalnym. Nie mamy możliwości doprowadzenia do tego, żeby ciepło, które natychmiast się rozproszy w otoczeniu, skupiło się z powrotem i zamieniło się na energię potencjalną wznosząc kamień do góry na pierwotną wysokość. Również wszystkie zjawiska połączone z tarciem są zjawiskami nieodracalnymi. Gdy przesuniemy np. ciężar G po podłodze, powiedzmy, na prawo o s, musimy na to zużyć pewną ilość pracy L. Aby zjawisko to zostało odwrócone, musiałoby ciało wrócić do położenia pierwotnego, a więc przesunąć się w lewo o s i jednocześnie układ musiałby nam zwrócić pracę L. Wiemy, że to jest niemożliwe. Żeby wrócić do położenia pierwotnego, musimy zużyć nową ilość pracy. Przewodzenie ciepła gorącego do zimnego jest również zjawiskiem nieodwracalnym. Nie możemy zmusić ciepła do płynięcia w przeciwną stronę, od temperatury niższej do wyższej.

Zjawisko rozprężenia gazu w próżnię bez pobrania pracy ani ciepła jest również zjawiskiem nieodwracalnym. Niemożliwą jest bowiem rzeczą, aby bez doprowadzenia pracy ani odprowadzenia ciepła gaz się sam zagęścił do pierwotnej objętości.

Rozprężenie gazu bez wykonania pracy, a więc w próżnię, będziemy w dalszym ciągu stale nazywali rozprężeniem nieodwracalnym w odróżnieniu od rozprężenia adiabatycznego odwracalnego z wykonaniem pracy.

10.11. Zastosowanie nieodwracalnego rozprężenia do skraplania gazów. Jak już wspomniano na początku termodynamiki (patrz. 10.4), gazy rzeczywiste (nie wszystkie) oziębiają się w doświadczeniu Joule'a — Thomsona. Na tym zjawisku oziębiania się większości gazów przy rozprężeniu nieodwracalnym oparte są głównie obecnie używane aparaty do skraplania gazów. Oziębienie to jest bardzo małe w porównaniu do oziębienia przy odwracalnym adiabatycz-

nym rozprężeniu. Ponieważ jednak zastosowanie tego ostatniego nastręcza duże trudności techniczne, jak uszczelnienie tłoka, jego smarowanie itd., a przy nieodwracalnym rozprężaniu urządzenia mogą być bardzo proste bez żadnych części ruchomych, najpierw zostały skonstruowane aparaty, w których stosuje się rozprężenie nieodwracalne. W tabeli 10.1 przytoczone są przykłady oziębiania się gazów przy rozprężeniu nieodwracalnym od ciśnienia 6 do 5 atmosfer.

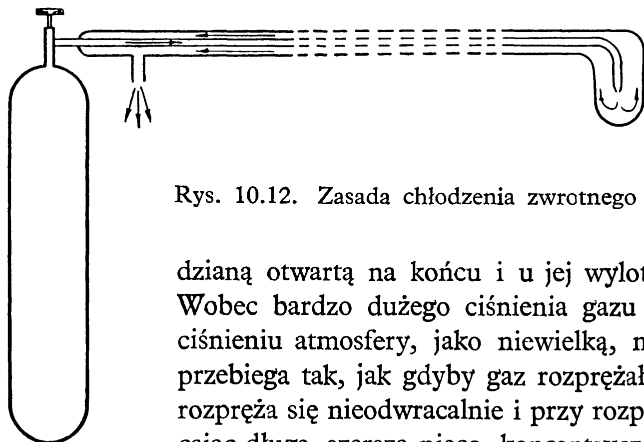
Tabela 10.1

Zmiany temperatury gazów przy rozprężeniu nieodwracalnym

Gaz	Temperatura gazu t w °C	Ciśnienie początkowe w Atm	Ciśnienie końcowe w Atm	Zmiana temperatury Δt w °C
Powietrze	39,5	6	5	−0,23
Tlen	8,7	6	5	−0,32
Azot	7,2	6	5	−0,31
CO_2	20	6	5	−1,14
Wodór	6,8	6	5	+0,03

Dla porównania przytaczamy, że powietrze rozprężone adiabatycznie w sposób odwracalny od ciśnienia 6 Atm do 5 Atm oziębiłoby się o 16,4°.

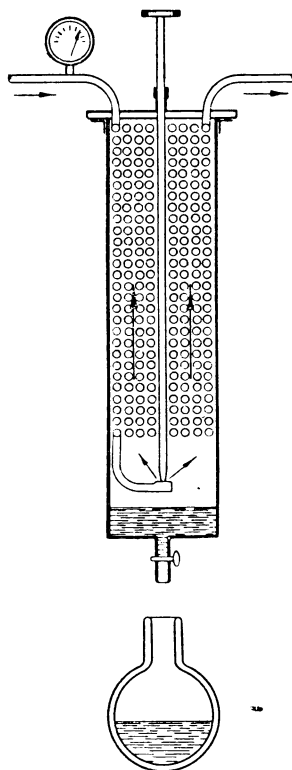
Jednakże przy dużym rozprężeniu, takim, jakie zwykle się stosuje w aparatach do skraplania, od 200 Atm do 1 Atm, obniżenie temperatury przy nieodwracalnym rozprężeniu jest znaczne.



Rys. 10.12. Zasada chłodzenia zwrotnego

Zasada aparatów do skraplania jest następująca: gaz z butli, w której znajduje się pod ciśnieniem 200 Atm, płynie długą rurką miedzianą otwartą na końcu i u jej wylotu rozpręża się gwałtownie. Wobec bardzo dużego ciśnienia gazu w rurce pracę przeciwko ciśnieniu atmosfery, jako niewielką, można zaniedbać. Zjawisko przebiega tak, jak gdyby gaz rozprężał się w próżnię. Zatem gaz rozpręża się nieodwracalnie i przy rozprężaniu ochładza się. Wracając długą, szerszą nieco, koncentryczną rurką (rys. 10.12) oziębia dopływający gaz (jest to zasada tzw. chłodzenia zwrotnego). Dopływający już oziębiony gaz rozprężając się po wypływie z rurki oziębia się w dalszym ciągu i ochładza jeszcze bardziej dopływający gaz. Wskutek tego gaz szybko się oziębia i po upływie dość krótkiego czasu (w dobrych aparatach 5 minut) temperatura jego spada aż do temperatury wrzenia, po czym wypływający gaz częściowo się skrapla przy rozprężeniu.

Ponieważ rurka miedziana dla wydatnego chłodzenia zwrotnego musi mieć długość kilkudziesięciu metrów, więc, aby zajmowała ona niewielką przestrzeń, zwija się ją w gęstą spiralę i umieszcza w naczyniu Dewara lub też inaczej chroni od dopływu ciepła z otoczenia (rys. 10.13). Nie wszystkie gazy dadzą się opisanym urządzeniem skroplić. Wodór i hel ogrzewają się przy rozprężeniu nieodwracalnym w temperaturze pokojowej. Jednakże, jak wykrył prof. Uniwersytetu Jagiellońskiego Karol Olszewski, wodór ogrzewa się przy rozprężeniu nieodwracalnym przy temperaturach wyższych od $-80{,}5°C$, natomiast przy niższych temperaturach — oziębia się. Temperatura t_i, powyżej której gaz rozprężany nieodwracalnie ogrzewa się, poniżej zaś się oziębia, nazywa się temperaturą inwersji*. Przy temperaturze inwersji $\Delta t = 0$ przy rozprężeniu nieodwracalnym. Jak się okazało, dla każdego gazu istnieje temperatura inwersji. Tabela 10.2 podaje temperatury inwersji dla kilku gazów przy rozprężeniach od ciśnienia p_1 do p_2.



Rys. 10.13. Aparat do skraplania gazu

Tabela 10.2

Temperatury inwersji

Gaz	Ciśnienie początkowe p_1 w Atm	Ciśnienie końcowe p_2 w Atm	Temperatura inwersji t_i w °C
Powietrze	100	1	+248
Powietrze	30	1	+172
Azot	100	1	+233
Azot	30	1	+165
Wodór	100	1	− 80,5

Ponieważ temperatura inwersji wodoru jest dość niska, a helu jeszcze niższa, aparaty do skraplania wodoru i helu są bardziej skomplikowane, gdyż najpierw trzeba aparat oziębić poniżej temperatury inwersji. Wodór zwykle się oziębia ciekłym powietrzem, a hel — ciekłym wodorem. Obecnie istnieją zresztą aparaty do skraplania helu oparte na innej zasadzie, pomysłu radzieckiego fizyka Kapicy.

10.12. Obliczenie pracy wykonanej przy skończonej zmianie objętości gazu. Jak to wyprowadziliśmy w ustępie 12.7, praca wykonana przez siły zewnętrzne zmieniające objętość ciała wyraża się wzorem

$$dL = -p\,dV.$$

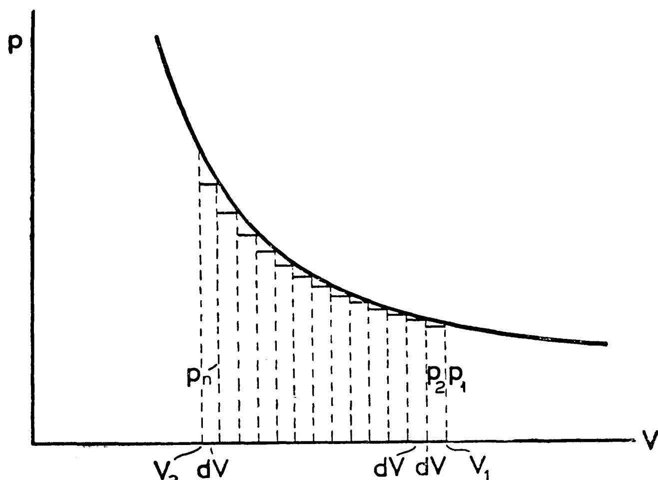
* *Invertere* (łac.) — wywracać, przewracać.

Wzór ten można stosować tylko przy tak małej zmianie objętości ciała, aby podczas tej zmiany ciśnienie można było uważać w przybliżeniu za stałe. Gdy siły zewnętrzne powodują znaczne zgęszczenie gazu, wówczas ciśnienie jego również znacznie się zmienia.

Możemy wówczas zastosować postępowanie podobne do opisanego w ust. 3.14 dla obliczenia pracy. Gdy gaz zgęszczamy stopniowo od objętości V_1 do objętości V_2 ciśnienie jego przechodzi przez wartości $p_1 < < p_2 < p_3 < p_4 < \ldots < < p_n$. Zatem praca wykonana przy zmniejszeniu objętości od V_1 do V_2 wyrazi się w przybliżeniu wzorem

$$L = -(p_1\,dV + + p_2\,dV + p_3\,dV + + \ldots + p_n\,dV).$$

Jak widać na wykresie 10.14, iloczyn $p_1\,dV$ równa się polu prostokąta o podstawie dV i wysokości p_1. Drugi wyraz w nawiasie $p_2\,dV$ równa się polu prostokąta o podstawie dV i wysokości p_2 itd. Całkowita praca zatem równa się sumie pól prostokątów zaznaczonych na wykresie. Dokładniej obliczymy pracę wykonaną przy zgęszczeniu gazu, gdy całą zmianę objętości podzielimy na większą liczbę mniejszych zmian objętości, np. dwa razy większą. Wtedy otrzymamy dwa razy większą liczbę prostokątów dwa razy węższych.



Rys. 10.14. Graficzne obliczenie pracy wykonanej przy skończonej zmianie objętości gazu

Całkowita praca będzie równa sumie pól tych prostokątów, będzie więc równa polu figury ograniczonej z jednej strony osią x, rzędnymi p_1 i p_n oraz linią schodkowaną. Jeżeli całą zmianę objętości będziemy dzielić na coraz większą liczbę coraz mniejszych zmian objętości, linia schodkowana będzie się coraz więcej zbliżać do krzywej, której przebieg daje zależność ciśnienia od objętości gazu (przebieg ten może być rozmaity w zależności od tego, czy i jak będzie się zmieniać temperatura gazu). Matematycznie jako granicę sumy otrzymamy całkę oznaczoną

$$L = -\int_{V_1}^{V_2} p\,dV. \tag{10.41}$$

a. Praca przy izotermicznym zgęszczeniu lub rozprężeniu gazu

Według równania stanu gazów

$$pV = \frac{R}{\mu} mT.$$

Jeżeli wyznaczymy z tego równania p:

$$p = \frac{R}{\mu} m \frac{T}{V} \tag{10.42}$$

i podstawimy do równania (10.41), to otrzymamy na pracę wzór:

$$L = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{R}{\mu} mT \frac{dV}{V} = -\frac{R}{\mu} mT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \tag{10.43}$$

(T i pozostałe czynniki możemy jako stałe wyprowadzić przed znak całki). Po scałkowaniu otrzymamy

$$L = -\frac{R}{\mu} mT (\ln V_2 - \ln V_1) = \frac{R}{\mu} mT (\ln V_1 - \ln V_2) = \frac{R}{\mu} mT \ln \frac{V_1}{V_2}. \tag{10.44}$$

Gdy $V_1 > V_2$ (gaz jest zgęszczany), $L > 0$*, gaz pobiera pracę, gdy $V_1 < V_2$ (gaz się rozpręża), $L < 0$, gaz wydaje pracę (oczywiście kosztem pobranego ciepła).

b. Praca przy adiabatycznym zgęszczeniu lub rozprężeniu gazu

Gdy w tym przypadku do wzoru na pracę podstawimy wyrażenie na ciśnienie (10.42), z równania stanu otrzymamy na pracę taki sam wzór, jak poprzednio:

$$L = -\frac{R}{\mu} \int_{V_1}^{V_2} T \frac{dV}{V}. \tag{10.45}$$

Lecz teraz nie możemy czynnika T wyprowadzić przed znak całki, gdyż temperatura zmienia się podczas zmiany objętości według prawa Poissona

$$V^{\varkappa-1} T = \text{const.} \tag{10.46}$$

Logarytmując to równanie, a następnie różniczkując otrzymamy

$$(\varkappa - 1) \ln V + \ln T = \text{const}, \tag{10.47}$$

$$(\varkappa - 1) \frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0, \tag{10.48}$$

---

* Gdyż $\frac{V_1}{V_2} > 1$, a logarytmy liczb większych od jedności są dodatnie.

skąd otrzymujemy

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\varkappa - 1}\frac{dT}{T} = -\frac{1}{\frac{c_p}{c_v} - 1}\frac{dT}{T} = -\frac{c_v}{c_p - c_v}\frac{dT}{T}. \tag{10.49}$$

Podstawiając to wyrażenie na $\frac{dV}{V}$ do wzoru (10.45) dokonywamy jednocześnie zamiany zmiennej V na zmienną T. Trzeba jednocześnie zmienić granice całkowania podstawiając zamiast V_1 temperaturę T_1 gazu, gdy zajmuje on objętość V_1, a za V_2 — temperaturę T_2, którą można obliczyć z prawa Poissona (10.36). Biorąc jeszcze pod uwagę związek wyprowadzony w ust. 10. 8

$$\frac{R}{\mu} = c_p - c_v$$

otrzymamy

$$L = -(c_p - c_v)\, m \int_{T_1}^{T_2} T\left(-\frac{c_v}{c_p - c_v}\right)\frac{dT}{T} = mc_v \int_{T_1}^{T_2} dT = mc_v(T_2 - T_1). \tag{10. 50}$$

Oczywiście otrzymamy wynik w kaloriach. Aby otrzymać wartość pracy w ergach, trzeba pomnożyć wynik przez $4{,}185 \cdot 10^7$; aby otrzymać wynik w kilogramometrach, trzeba pomnożyć wynik przez 0,4268.

Gdy temperatura końcowa T_2 jest wyższa od początkowej T_1, wtedy $L > 0$, gaz pobiera pracę, jest zgęszczany przez siły zewnętrzne. Gdy $T_2 < T_1$, wówczas $L < 0$, gaz wydaje pracę rozprężając się przeciwko siłom zewnętrznym.

10.13. Obieg kołowy albo cykl. Jeżeli układ po zajściu w nim szeregu zjawisk, podczas których stan jego ulega zmianom, wróci do stanu początkowego to mówimy, że dokonał obiegu kołowego. A więc gdy np. pewna masa gazu m jest zgęszczana, ogrzewana, rozprężana itd. i na końcu tych przemian gaz wróci do tej samej objętości, ciśnienia i temperatury, to powiemy, że dokonał on obiegu kołowego. Obieg kołowy może być odwracalny, jeżeli składa się z samych przebiegów odwracalnych. W przeciwnym razie jest nieodwracalny.

10.14. Silnik termodynamiczny albo cieplny. Silnikiem termodynamicznym albo cieplnym nazywamy układ, który dzięki zjawiskom w nim zachodzącym może zamieniać ciepło na pracę w nieograniczonej ilości. Jest to możliwe dzięki temu, że w układzie ciało nazywane *ciałem czynnym* periodycznie rozpręża się i kurczy, pobierając ciepło, wydając pracę i periodycznie wracając do stanu początkowego, czyli dokonując obiegów kołowych.

10.15. Silnik Carnota. Obieg kołowy (cykl) Carnota. Silnik Carnota (czyt. Karnota) składa się z cylindra o ścianach adiabatycznych zamkniętego ruchomym szczelnym tłokiem poruszającym się bez tarcia, w którym znajduje się jako c i a ł o c z y n n e g a z i d e a l n y. Dno cylindra jest zrobione

z materiału doskonale przepuszczającego ciepło. Dalszymi ważnymi jego częściami są: zbiornik ciepła o niegraniczonym zapasie ciepła, posiadający wysoką temperaturę T_1, zwany *grzejnicą*; drugi zbiornik ciepła o nieograniczonej pojemności cieplnej posiadający temperaturę T_2 niższą od T_1, zwany *chłodnicą*, wreszcie płyta adiabatyczna P. Oba zbiorniki ciepła są tak wielkie, że przy czerpaniu z nich, czy też oddawaniu im ciepła temperatury ich nie zmieniają się.

Obieg kołowy, który wykonywa silnik Carnota, składa się z czterech części:

1. Rozprężenie izotermiczne. Przystawiamy cylinder, w którym znajduje się gaz, do grzejnicy (rys. 10.15, I). Gdy gaz przybierze temperaturę T_1, pozwalamy mu się rozprężyć izotermicznie od pierwotnej objętości V_1 do V_2. Jak wiadomo, podczas rozprężenia izotermicznego gaz wydaje pracę L_1 równoważną pobranemu ciepłu Q_1

$$L_1 = -Q_1 \tag{10.51}$$

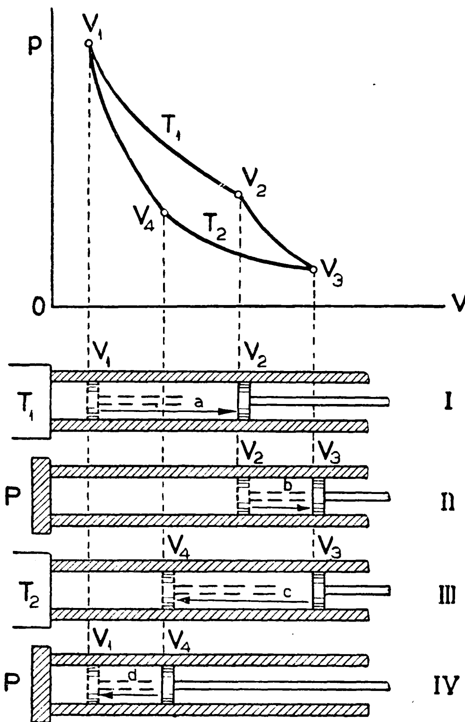
(gdyż $U = \text{const}$).

Obliczyliśmy poprzednio, że praca ta jest dana przez wzór

$$L_1 = \frac{R}{\mu} m T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = -Q_1 \tag{10.52}$$

(tak praca, jak i ciepło wyrażone są tu w kaloriach).

Ponieważ $V_2 > V_1$, więc $\ln \frac{V_1}{V_2}$ ma wartość ujemną. Praca L_1 jest ujemna, czyli wydana, a ciepło Q_1 — dodatnie, czyli pobrane.



Rys. 10.15. Obieg Carnota

2. Rozprężenie adiabatyczne. Przystawiamy dno cylindra do płyty adiabatycznej P (rys. 10. 15, II), po czym gaz dalej się rozpręża tak długo, dopóki jego temperatura nie spadnie do T_2. Będzie on miał wtedy objętość V_3. Praca wykonana

$$L_2 = U_2 - U_1 = mc_v(T_2 - T_1). \tag{10.53}$$

Ponieważ $T_2 < T_1$, praca będzie wydana kosztem energii wewnętrznej gazu.

3. Zgęszczenie izotermiczne. Przystawiamy cylinder do chłodnicy i sprężamy gaz izotermicznie od objętości V_3 do objętości V_4 (rys. 10.15, III; V_4 musi leżeć na adiabacie przechodzącej przez punkt V_1, p_1).

Praca wykonana

$$L_3 = \frac{R}{\mu} m T_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = -Q_2. \tag{10.54}$$

Ponieważ $V_3 > V_4$, praca będzie pobrana i zamieniona w całości na ciepło Q_2 w ilości równoważnej, oddane chłodnicy.

4. Zgęszczenie adiabatyczne. Przystawiamy cylinder dnem do płyty adiabatycznej i zgęszczamy gaz adiabatycznie, dopóki jego temperatura nie podwyższy się do T_1 (rys. 10.15, IV). Jednocześnie gaz wróci do pierwotnej objętości V_1 i będzie miał takie samo ciśnienie p_1 jak na początku. Wykona zatem obieg kołowy. Praca wykonana przy IV części cyklu

$$L_4 = mc_v(T_1 - T_2). \tag{10.55}$$

Stan gazu będzie teraz identyczny ze stanem na początku i obieg może być powtórzony. Ponieważ ilość pracy równa się polu figury ograniczonej przez izotermę lub adiabatę, oś odciętych oraz dwie rzędne odpowiadające początkowej o końcowej objętości gazu, widać z rysunku, że ilość pracy wydana podczas dwóch pierwszych części cyklu jest większa od ilości pracy pobranej podczas dwóch ostatnich części. W bilansie otrzymamy pracę.

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = -Q_1 - Q_2. \tag{10.56}$$

W sumie tej L_1 i L_2 są ujemne, L_3 i L_4 — dodatnie. Ciepło Q_1 jako pobrane jest dodatnie, a ciepło Q_2 ujemne jako oddane. Obliczmy całkowitą wydaną pracę podczas całego cyklu:

$$L = \frac{R}{\mu} m T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} + mc_v(T_2 - T_1) + \frac{R}{\mu} m T_2 \ln \frac{V_3}{V_4} + mc_v(T_1 - T_2). \tag{10.57}$$

Wyraz drugi, jak łatwo stwierdzić, znosi się z czwartym z powodu przeciwnych znaków. Otrzymamy więc

$$L = \frac{R}{\mu} m \left(T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} + T_2 \ln \frac{V_3}{V_4} \right). \tag{10.58}$$

Ponieważ objętości V_1 i V_4 oraz V_2 i V_3 leżą na tych samych adiabatach, to znaczy, że od V_4 do V_1, jak również od V_2 do V_3 można przejść przez zgęszczenie ewentualnie rozprężenie adiabatyczne gazu, zatem według prawa Poissona

$$V_3^{\varkappa-1} T_2 = V_2^{\varkappa-1} T_1,$$

$$V_4^{\varkappa-1} T_2 = V_1^{\varkappa-1} T_1.$$

Dzieląc stronami pierwsze równanie przez drugie otrzymamy

$$\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\varkappa-1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa-1},$$

skąd

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1}. \qquad (10.59)$$

Zatem

$$\ln\frac{V_3}{V_4} = \ln\frac{V_2}{V_1} = \ln V_2 - \ln V_1 = -(\ln V_1 - \ln V_2) = -\ln\frac{V_1}{V_2}. \qquad (10.60)$$

Wprowadzając tę wartość na $\ln\frac{V_3}{V_4}$ do wzoru (10.58) otrzymamy

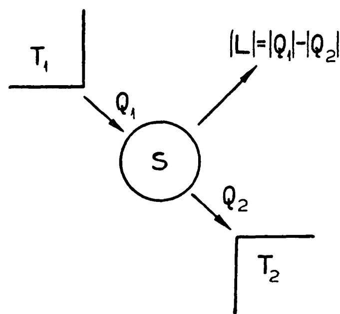
$$L = \frac{R}{\mu} m (T_1 - T_2) \ln\frac{V_1}{V_2}. \qquad (10.61)$$

Jedynym wynikiem cyklu Carnota jest zatem zamiana na pracę ciepła $Q_1 + Q_2$. Lecz ciepło Q_1 jest dodatnie, a ciepło Q_2 — ujemne. A więc na pracę zamienia się ilość ciepła

$$|Q| = |Q_1| - |Q_2| = |L| = |L_1| - |L_3|. \qquad (10.62)$$

Przy tym stosunek ciepła Q_1 do Q_2

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{-\frac{R}{\mu} m T_1 \ln\frac{V_1}{V_2}}{-\frac{R}{\mu} m T_2 \ln\frac{V_3}{V_4}} = \frac{-\frac{R}{\mu} m T_1 \ln\frac{V_1}{V_2}}{+\frac{R}{\mu} m T_2 \ln\frac{V_1}{V_2}} = -\frac{T_1}{T_2}, \qquad (10.63)$$



Rys. 10.16. Schemat zmian energetycznych przy cyklu Carnota

gdyż

$$\ln\frac{V_3}{V_4} = -\ln\frac{V_1}{V_2} \quad \text{(patrz wzór 10.60).}$$

Stosunek bezwzględnych wartości ciepła Q_1 i Q_2:

$$\frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{T_1}{T_2}. \qquad (10.64)$$

Widać stąd, że ciepło pobrane Q_1 jest większe co do bezwzględnej wartości od oddanego Q_2. Silnik Carnota przy każdym obiegu pobiera z grzejnicy ciepło w ilości Q_1, część tego ciepła Q zamienia na pracę, a resztę Q_2 oddaje chłodnicy (rys. 10.16). Ponieważ obieg kołowy Carnota można powtarzać teoretycznie bez końca, mamy tu zatem urządzenie, które może stale wydawać pracę kosztem pobieranego ciepła, z którego jednakże część musi stale oddawać chłodnicy.

10.16. Sprawność silnika termodynamicznego. Sprawnością η silnika cieplnego nazywamy stosunek ilości ciepła zamienionego na pracę

$$|Q_1| - |Q_2| = |L| \qquad (10.65)$$

do całkowitej ilości ciepła Q_1 pobranego z grzejnicy:

$$\boxed{\eta = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{|L|}{|Q_1|}.} \tag{10.66}$$

Sprawność silnika Carnota możemy znaleźć podstawiając do wzoru (10.66) obliczone poprzednio wartości na L (równanie 10.61) i Q_1 (10. 52); otrzymamy wówczas

$$\eta = \frac{\frac{R}{\mu} m(T_1 - T_2) \ln \frac{V_1}{V_2}}{\frac{R}{\mu} m T_1 \ln \frac{V_1}{V_2}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{10.67}$$

Definicja (10.66) na sprawność silnika jest zupełnie ogólna, natomiast wzór (10.67) został obliczony jedynie dla silnika Carnota.

Jak wskazuje wzór (10.66), sprawność silnika termodynamicznego zawarta jest między zerem a jednością:

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1.$$

Jest ona równa zeru, gdy $|Q_2| = |Q_1|$, tzn. gdy ciepło oddane równa się pobranemu. Równałaby się zaś jedności, gdyby $Q_2 = 0$. Jak zobaczymy później, jest to niemożliwe.

Sprawność silnika wyrażamy często w procentach

$$\eta\,\% = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} \cdot 100. \tag{10.68}$$

Dla silnika Carnota

$$\eta\,\% = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100. \tag{10.69}$$

Jak łatwo na przykładzie stwierdzić, ilość ciepła oddawanego chłodnicy jest zwykle bardzo znaczna. Weźmy pod uwagę silnik Carnota pracujący między temperaturami $T_1 = 473°\mathrm{K}$ (200°C) i $T_2 = 273°\mathrm{K}$ (0°C). Otrzymamy na sprawność

$$\eta = \frac{473 - 273}{473} \cdot 100 = \frac{200}{473} 100 = 42{,}6\%.$$

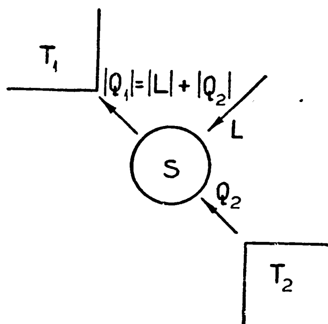
Zatem silnik zamienia 42,6% pobranego ciepła na pracę, natomiast resztę, tj. 57,4% oddaje chłodnicy. Ta część jest dla nas bez pożytku stracona.

10.17. Odwrotny obieg Carnota. Ponieważ wszystkie części obiegu Carnota odbywają się w sposób odwracalny, więc silnik Carnota może wykonywać również obiegi w odwrotnym kierunku. Wszystkie zjawiska będą wtedy odwrócone.

Silnik pobiera wówczas ciepło Q_2 z chłodnicy, pobiera również pracę L, zamienia ją na ciepło i wraz z ciepłem Q_2 oddaje grzejnicy (rys. 10.17):

$$|Q_1| = |Q_2|+|L|.$$

Jeżeli chłodnica nie ma nieograniczonego zapasu ciepła, to odwrotny obieg Carnota będzie obniżał jej temperaturę, będzie ją chłodził. Na tej zasadzie polega działanie maszyn chłodzących. Lecz aby można było ciału o niskiej temperaturze odebrać ciepło, trzeba maszynie dostarczać pracę, której znowu musi dostarczyć jakiś inny silnik. Moglibyśmy zatem powiedzieć, że aby ochłodzić lub zamrozić jakieś ciało, trzeba spalić pewną ilość węgla.



Rys. 10.17. Schemat odwrotnego cyklu Carnota

10.18. Druga zasada termodynamiki. Drugą zasadę termodynamiki można wysłowić w sposób następujący (bywa ona i inaczej formułowana): silnik termodynamiczny nie może stale pracować za pomocą jednego tylko zbiornika ciepła o stałej temperaturze. Należy to przy tym tak rozumieć, że silnik styka się tylko z tym jedynym zbiornikiem ciepła.

Druga zasada jest uogólnieniem wielu doświadczeń. Łatwo stwierdzić, że gdybyśmy jej nie przyjęli, doszlibyśmy do wniosków sprzecznych z doświadczeniem. Gdyby nie była ona prawdziwa, moglibyśmy zbudować silnik zasilany ciepłem znajdującym się w ogromnej ilości w ziemi, morzu i powietrzu. Silnik ten wyziębiałby powoli ziemię pobierając z otoczenia ciepło i zanieniając je na pracę. Istnienie takiego silnika nie przeczyłoby zasadzie zachowania energii, gdyż nie stwarzałby on pracy z niczego, wytwarzałby pracę kosztem ciepła. Silnik taki, który by mógł zamieniać w całości ciepło pobierane z jednego tylko zbiornika ciepła na pracę nazwano *perpetuum mobile* drugiego rodzaju. Moglibvśmy więc sformułować drugą zasadę termodynamiki również w sposób następujący: zbudowanie *perpetuum mobile* drugiego rodzaju jest rzeczą niemożliwą.

10.19. Pierwsze twierdzenie Carnota. Skala termodynamiczna temperatur. I twierdzenie Carnota brzmi następująco: wszystkie silniki odwracalne pracujące międzv tymi samymi temperaturami mają tę samą sprawność. Przeprowadzimy dowód tego twierdzenia przy pewnych uproszczonych założeniach. Wyobraźmy sobie (rys. 10.18) dwa silniki termodynamiczne odwracalne S_1 i S_2, a więc takie, które mogą iść albo w jednym kierunku zamieniając ciepło na pracę, albo w odwrotnym zamieniając pracę na ciepło. Niech oba te silniki przy każdym obiegu czerpią jednakowe ilości ciepła Q_1 z grzejnicy. Zróbmy przypuszczenie, że silniki te pracując między tymi samymi temperaturami mają różne sprawności; niech np. silnik S_1 ma większą sprawność niż silnik S_2:

$$\eta_1 > \eta_2. \tag{10.70}$$

Oznacza to, że silnik S_1 zamienia na pracę większą część pobranego ciepła zaczerpniętego przy jednym obiegu niż silnik S_2. Musi on w takim razie mniej ciepła oddawać chłodnicy. Ponieważ

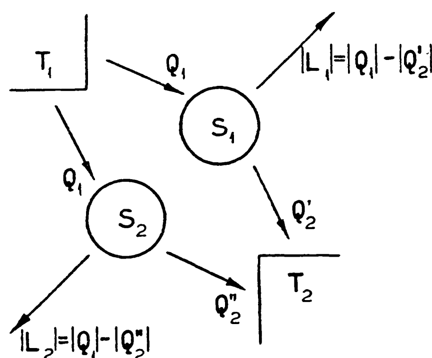
$$\eta_1 = \frac{|Q_1| - |Q_2'|}{|Q_1|}, \qquad \eta_2 = \frac{|Q_1| - |Q_2''|}{|Q_1|}.$$

$$\eta_1 > \eta_2,$$

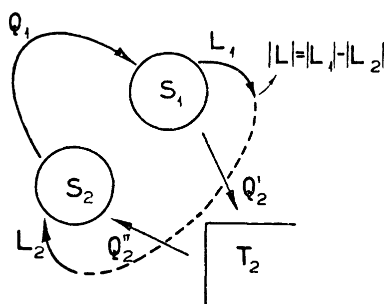
zatem

$$|Q_2'| < |Q_2''|.$$

Oba silniki mogą korzystać z tej samej grzejnicy i chłodnicy. Puśćmy silniki tak, aby silnik S_1 szedł naprzód pobierając ciepło i zamieniając jego część na pracę, a silnik S_2 — wstecz (rys. 10.19). Będzie on pobierał pracę i oddawał grzejnicy ciepło w ilości Q_1 przy każdym cyklu. Ponieważ silnik S_2 oddaje grzejnicy



Rys. 10.18. Dwa silniki odwracalne pracujące między tymi samymi temperaturami



Rys. 10.19. Silnik sprzężony złożony z dwóch silników odwracalnych

ciepło w tej samej ilości, w jakiej silnik S_1 czerpie z niej, zatem grzejnica w rezultacie jest zbyteczna i można ją usunąć. Silnik S_1 może zużywać ciepło dostarczane przez silnik S_2. Ponieważ praca L_1 wydawana przez silnik S_1 jest większa od pracy L_2 pobieranej przez silnik S_2, zatem możemy część pracy wydawanej przez silnik S_1 zużyć na poruszanie silnika S_2, który będzie działał jako maszyna chłodząca. W ten sposób otrzymalibyśmy silnik sprzężony, który by czerpał ciepło z chłodnicy i zamieniał w całości na pracę (rys. 10.19). Mielibyśmy *perpetuum mobile* drugiego rodzaju, co, jak wiemy, jest niemożliwe według drugiej zasady termodynamiki. Zatem jest niemożliwe, aby sprawność silnika S_1 była większa od sprawności silnika S_2.

Gdybyśmy przypuścili, że $\eta_1 < \eta_2$, to moglibyśmy zbudować silnik sprzężony podobny do poprzedniego, różniący się tylko tym, że silnik S_2 szedłby naprzód, a silnik S_1 — wstecz. Przekonalibyśmy się w taki sam sposób jak poprzednio, że ten sprzężony silnik byłby *perpetuum mobile* drugiego rodzaju, co jest niemożliwe. Zatem η_1 nie może być ani większe, ani mniejsze od η_2, pozostaje tylko jedna możliwość:

$$\eta_1 = \eta_2.$$

W taki sposób udowodniliśmy, że wszystkie silniki odwracalne pracujące między tymi samymi temperaturami mają tę samą sprawność. Ponieważ silnik Carnota jest silnikiem odwracalnym, zatem wszystkie inne silniki odwracalne muszą mieć taką samą sprawność jak silnik Carnota. Zatem wzory wyprowadzone poprzednio dla silnika Carnota są słuszne dla wszystkich silników odwracalnych, a więc w szczególności

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Lord Kelvin zwrócił uwagę, że którąkolwiek z tych równości można by uważać za definicję temperatury. Moglibyśmy niejako odwrócić tę ostatnią równość i napisać

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{|Q_1|}{|Q_2|}. \tag{10.71}$$

Stosunek temperatur dwóch ciał byłby równy stosunkowi ilości ciepła pobranego przez *silnik odwracalny* z ciała cieplejszego do ciepła oddanego ciału chłodniejszemu. Oczywiście w ten sposób byłby określony tylko *stosunek temperatur*, a nie ich wartości liczbowe. Przyjmijmy jeszcze dodatkową umowę, że temperatura topniejącego lodu ma być oznaczona liczbą $T_0 = 273{,}15$. W takim razie dla dowolnej temperatury T moglibyśmy napisać

$$\frac{T}{T_0} = \frac{|Q|}{|Q_0|},$$

gdzie ciepło Q pobrane byłoby z ciała o temperaturze T przez silnik odwracalny, zaś Q_0 — ciepło oddane ciału o temperaturze topniejącego lodu. Z tej równości otrzymujemy

$$T = T_0 \frac{|Q|}{|Q_0|} = 273{,}15 \cdot \frac{|Q|}{|Q_0|}. \tag{10.72}$$

Wtedy na temperaturę T otrzymalibyśmy już określoną liczbę.

Można by również skorzystać z wzoru na sprawność silnika odwracalnego. Oznaczając nieznaną temperaturę przez T, a temperaturę topniejącego lodu przez T_0 mielibyśmy

$$\frac{T - T_0}{T} = \eta,$$

skąd otrzymujemy

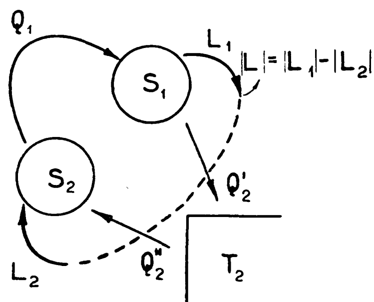
$$T = T_0 (1 - \eta) = 273{,}15 (1 - \eta).$$

W takim razie przez pomiar sprawności η silnika termodynamicznego odwracalnego pracującego między temperaturami T i T_0 moglibyśmy określić temperaturę T. W ten sposób utworzona skala termometryczna, zupełnie niezależna od jakichkolwiek własności fizycznych ciał materialnych, oparta jedynie na ogólnej własności silników odwracalnych nosi nazwę skali termodynamicznej temperatur.

Można udowodnić, że w taki sposób określona temperatura jest identyczna ze skalą gazową, o ile by użyty gaz był gazem doskonałym. Termometr gazowy napełniony wodorem lub helem wskazuje temperatury bardzo nieznacznie różniące się od temperatury według skali termodynamicznej. Odstępstwa wynoszące kilka setnych stopnia przy temperaturach wysokich (kilkaset stopni) są dla temperatur zawartych między 0°C i 100°C znikomo małe i dochodzą do kilku dziesiątych stopnia przy temperaturach bardzo niskich (poniżej — 200°C). Poprawki są znane i można je uwzględnić.

10.20. Drugie twierdzenie Carnota. Silnik nieodwracalny nie może mieć sprawności większej od silnika odwracalnego. Przypuśćmy, że silnik nieodwracalny S_1 ma sprawność η_1 większą od sprawności η_2 silnika odwracalnego S_2. Tworzymy silnik sprzężony (rys. 10.20), tak jak w poprzednim dowodzeniu, tak aby silnik S_1 szedł naprzód, a silnik S_2 wstecz. Otrzymamy zupełnie tak samo jak w poprzednim przypadku silnik sprzężony pobierający ciepło z chłodnicy i zamieniający je na pracę, czyli *perpetuum mobile* drugiego rodzaju. Zatem przypuszczenie, że silnik S_1 może mieć większą sprawność od silnika S_2, musimy odrzucić. A więc pozostaje wniosek:

$$\eta_1 \leqq \eta_2.$$



Rys. 10.20. Silnik sprzężony złożony z silnika odwracalnego i nieodwracalnego

Druga część dowodu zawartego w poprzednim twierdzeniu odpada, ponieważ ról silników nie można zamienić, silnik S_1 nie może iść wstecz.

Teoretycznie możemy tylko udowodnić, że żaden silnik nieodwracalny nie może mieć większej sprawności od sprawności silnika odwracalnego. Doświadczenie jednak wykazuje, że sprawność silników cieplnych, których używamy, a które są oczywiście nieodwracalne, jest znacznie mniejsza od sprawności silnika odwracalnego pracującego przy tych samych temperaturach grzejnicy i chłodnicy. Tak np., jak obliczyliśmy w ustępie 10.16, sprawność silnika Carnota pracującego między temperaturami 200°C i 0°C wynosi 42,6%, natomiast sprawność maszyn parowych wynosi zaledwie kilkanaście procent. Za pomocą rozmaitych ulepszeń można będzie nieco poprawić sprawność silników cieplnych używanych w praktyce. Lecz kresem, poza który nie możemy wykroczyć, jest sprawność silnika odwracalnego.

10.21. Pojęcie entropii. Przy rozpatrywaniu cyklu Carnota otrzymaliśmy wynik, że stosunek ciepła pobranego z grzejnicy do ciepła oddanego chłodnicy równa się stosunkowi temperatur

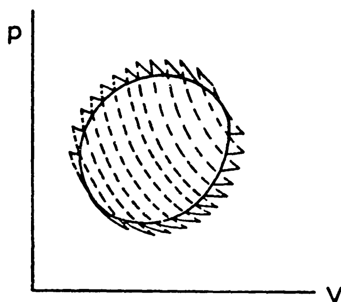
$$\frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{T_1}{T_2}. \tag{10.73}$$

Po prostym przekształceniu tego równania możemy napisać

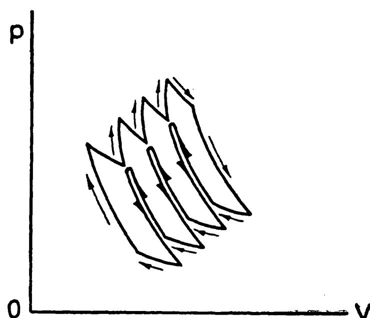
$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0. \tag{10.74}$$

Iloraz $\frac{Q}{T}$ ciepła (pobranego lub oddanego) przez temperaturę, przy której ten proces zachodzi, nazywamy ciepłem zredukowanym. Otrzymaliśmy więc twierdzenie: przy odwracalnym kołowym procesie Carnota suma ciepła zredukowanego równa się zeru.

Obieg odwracalny po dowolnej krzywej w układzie współrzędnych p, V moglibyśmy zastąpić szeregiem bardzo wąskich, elementarnych obiegów Carnota, dzieląc pole objęte daną krzywą na bardzo wąskie paski adiabatami (rys. 10.21). W jaki sposób zastępuje



Rys. 10.21. Zastąpienie dowolnego obiegu przez obieg złożony z odcinków izoterm i adiabat



Rys. 10.22. Zastępowanie obiegu po torze krzywoliniowym obiegami Carnota

się obieg po pewnym torze krzywoliniowym obiegami Carnota, wskazuje rys. 10.22. Widać z tego rysunku, że każda adiabata jest przebiegana dwukrotnie w przeciwnych kierunkach. Zatem te przebiegi nie powodują żadnych zmian energetycznych w układzie. Możemy więc obieg po linii krzywej zastąpić w przybliżeniu przez linię ząbkowaną składającą się z odcinków izoterm i adiabat (rys. 10.21). Dla pierwszego z elementarnych obiegów Carnota możemy napisać

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0, \tag{10.75}$$

gdzie Q_1 i Q_2 oznaczają ciepło pobrane i oddane w temperaturach T_1 i T_2. Podobnie dla drugiego obiegu otrzymamy

$$\frac{Q_3}{T_3}+\frac{Q_4}{T_4}=0, \tag{10.76}$$

gdzie Q_3 i Q_4 oznaczają ciepło pobrane i oddane w temperaturach T_3 i T_4. Podobnie dla dalszych cyklów możemy napisać

$$\begin{aligned}&\frac{Q_5}{T_5}+\frac{Q_6}{T_6}=0,\\&\frac{Q_7}{T_7}+\frac{Q_8}{T_8}=0,\\&\quad\dots\dots\end{aligned} \tag{10.77}$$

Dodając te wszystkie równania otrzymamy dla całego obiegu po linii składającej się z odcinków izoterm i adiabat:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0. \tag{10.78}$$

Gdy szerokość poszczególnych obiegów będziemy zwężać, linia ząbkowana będzie się coraz bardziej zbliżać do linii krzywej. Ilości ciepła pobrane na bardzo krótkich odcinkach izoterm będą bardzo małe. Równanie (10.78) możemy wtedy napisać w postaci

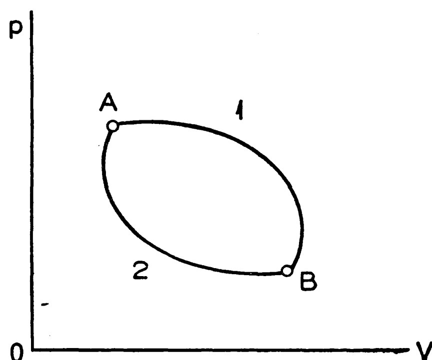
$$\sum_i \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0. \tag{10.79}$$

Gdy przejdziemy do granicy, otrzymamy

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0. \tag{10.80}$$

Kółko przy znaku całkowania oznacza, że całka krzywoliniowa jest wzięta po linii zamkniętej. Rozumowanie powyższe odnosi się tylko do przemiany odwracalnej. Obieg po linii zamkniętej możemy podzielić na dwie części (rys. 10.23): część $A1B$ i część $B2A$. Będziemy więc mogli napisać

$$\int_{A(1)}^{B} \frac{dQ}{T} + \int_{B(2)}^{A} \frac{dQ}{T} = 0. \tag{10.81}$$



Rys. 10.23. Obieg termodynamiczny po torze zamkniętym

Przy zmianie kierunku przebiegu po łuku $A1B$ na kierunek od B do A całka zmieni znak. Możemy więc napisać

$$\int_{A(1)}^{B} \frac{dQ}{T} - \int_{A(2)}^{B} \frac{dQ}{T} = 0,$$

skąd

$$\int_{A(1)}^{B} \frac{dQ}{T} = \int_{A(2)}^{B} \frac{dQ}{T}. \tag{10.82}$$

Widzimy z tego ostatniego równania, że wartość całki $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ nie zależy od drogi przejścia od punktu A do B. Zatem wartość tej całki może zależeć tylko od wartości zmiennych określających stan układu na początku i na końcu przebiegu, a więc od wartości np. V i T w punkcie A i w punkcie B. Musi więc istnieć taka funkcja S zmiennych T i V, iż

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = S(V_B, T_B) - S(V_A, T_A). \tag{10.83}$$

W przypadku punktów A i B bardzo bliskich siebie całka redukuje się do elementu. Wtedy będziemy mieli

$$\frac{dQ}{T} = dS,$$

zatem

$$S = \int \frac{dQ}{T} + \text{const.} \tag{10.84}$$

Funkcja S określona tymi równaniami nazywa się entropią. Przy jej obliczaniu trzeba zważać na to, aby droga przejścia od stanu przyjętego za początkowy do końcowego była odwracalna.

Weźmy teraz przypadek, gdy przejście od stanu początkowego *1* do stanu końcowego *2* jest możliwe po drodze odwracalnej albo nieodwracalnej (rys. 10.24). Wykonajmy obieg kołowy najpierw po drodze *1 2* nieodwracalnej, a potem po drodze *2 1* — odwracalnej. Ponieważ przy zjawiskach nieodwracalnych mniejsza część ciepła pobranego jest zamieniana na pracę niż przy zjawiskach odwracalnych, większa część natomiast ciepła jest oddawana w temperaturze niższej, zatem w sumie

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} + \ldots$$

będą przeważały składniki ujemne (ciepło oddane). Suma ta nie będzie już równa zeru, musi być ujemna. Zatem w granicy

$$\oint \frac{dQ}{T} < 0. \tag{10.85}$$

Rys. 10.24. Przejście od stanu początkowego możliwe po drodze odwracalnej i nieodwracalnej

Rozdzielmy tę całkę na dwie: jedną wziętą po drodze nieodwracalnej *1 2*, drugą — po drodze odwracalnej *2 1*. Otrzymamy

$$\int\limits_{1\ \text{nieodwr}}^{2} \frac{dQ}{T} + \int\limits_{2\ \text{odwr}}^{1} \frac{dQ}{T} < 0. \tag{10.86}$$

Odwracając granice całkowania drugiej całki otrzymamy

$$\int\limits_{1\ \text{nieodwr}}^{2} \frac{dQ}{T} - \int\limits_{1\ \text{odwr}}^{2} \frac{dQ}{T} < 0. \tag{10.87}$$

Lecz

$$\int\limits_{1\ \text{odwr}}^{2} \frac{dQ}{T} = S_2 - S_1. \tag{10.88}$$

Zatem otrzymamy nierówność

$$\int\limits_{1\ \text{nieodwr}}^{2} \frac{dQ}{T} - (S_2 - S_1) < 0, \tag{10.89}$$

skąd otrzymujemy

$$\int\limits_{1\ \text{nieodwr}}^{2} \frac{dQ}{T} < S_2 - S_1. \tag{10.90}$$

Dla układu odosobnionego, który nie ma wymiany ciepła z otoczeniem: $dQ = 0$, jest zatem

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = 0. \tag{10.91}$$

W tym przypadku otrzymamy

$$S_2 - S_1 > 0,$$

skąd

$$S_2 > S_1. \tag{10.92}$$

W układzie odosobnionym przy odbywaniu się jakichkolwiek zjawisk nieodwracalnych entropia w stanie końcowym S_2 jest zawsze większa od entropii w stanie początkowym S_1. Lecz zjawiska rzeczywiste są zawsze nieodwracalne, zatem odbywają się zawsze w takim kierunku, iż entropia układu odosobnionego wzrasta.

Można się łatwym rachunkiem przekonać, że np. przy wymieszaniu dwóch jednakowych mas wody o różnych temperaturach, powiedzmy o temperaturach 0°C i 100°C, kiedy temperatury się wyrównają i woda przybierze w całej masie w przybliżeniu temperaturę 50°C, entropia po wymieszaniu jest większa niż przed zmieszaniem tych dwóch mas wody. Zjawisko odbywa się w kierunku wyrównania się temperatur, podczas czego następuje wzrost entropii.

10.22. Przykład na obliczenie entropii. Entropia gazu idealnego. Ze wzoru

$$dS = \frac{dQ}{T} \tag{10.93}$$

możemy obliczyć entropię gazu doskonałego. Weźmy pod uwagę m gramów gazu. Ciepło odprowadzone w sposób odwracalny obliczymy z równania

$$dQ + dL = dU.$$

Ponieważ $dL = -p\, dV$, a $dU = mc_v\, dT$, zatem otrzymamy

$$dQ = mc_v dT + pdV. \tag{10.94}$$

Podstawiając tę wartość na dQ do równania (10.93) otrzymamy

$$dS = \frac{mc_v dT + pdV}{T} = mc_v \frac{dT}{T} + p\frac{dV}{T}. \tag{10.95}$$

Możemy p obliczyć z równania stanu gazu doskonałego

$$p = \frac{R}{\mu} m \frac{T}{V}.$$

Podstawiając tę wartość na p do równania (10.95) otrzymamy

$$dS = mc_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{\mu} m \frac{T}{V}\frac{dV}{T} = mc_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{\mu} m \frac{dV}{V}. \tag{10.96}$$

Całkując otrzymamy

$$S = mc_v \ln T + \frac{R}{\mu} m \ln V + S_0,$$

gdzie S_0 jest stałą całkowania równą entropii gazu w dowolnym stanie początkowym.

Ze wzoru tego można wnioskować, że gaz zajmujący małą objętość wpuszczony do pustego naczynia musi się rozprężyć, jest to bowiem połączone z powiększeniem objętości V, a więc i ze wzrostem entropii (gdyż temperatura T przy tym się zmienia). Natomiast gaz nie może samodzielnie skupić się w mniejszej objętości, gdyż byłoby to połączone ze zmniejszeniem się entropii S.

10.23. Trzecia zasada termodynamiki. Obserwacja reakcji chemicznych w niskich temperaturach doprowadziła Nernsta do przyjęcia założenia, z którego można wysnuć wniosek, że w temperaturze bezwzględnego zera wszystkie przebiegi w ciałach stałych i ciekłych odbywają się bez zmiany entropii:

$$\lim_{T\to 0}(S_2 - S_1) = 0. \tag{10.97}$$

Planck podał inne, dalej jeszcze idące sformułowanie tej zasady: w temperaturze zera bezwzględnego entropia ciał stałych i ciekłych ma wartość zero

$$\lim_{T\to 0} S = 0. \tag{10.98}$$

To twierdzenie jest wypowiadane często jako tzw. trzecia zasada termodynamiki. Z zasady tej dadzą się wyprowadzić bardzo interesujące wnioski potwierdzone przez doświadczenie, między innymi, iż ciepło właściwe ciał stałych i ciekłych, jak również ich współczynniki rozszerzalności dążą do zera, gdy temperatura dąży do zera bezwzględnego.

Zadania

10.1 Ile kilogramometrów energii potrzeba zużyć do ogrzania kilograma wody o 1°C: 1) w pobliżu temperatury 0°C (ciepło właściwe 1,009); 2) 15°C (ciepło właściwe 1); 3) 35°C (ciepło właściwe 0,997); 4) 99°C (ciepło właściwe 1,006)?

Odpowiedź: 1) 430,6; 2) 426,8; 3) 425,5; 4) 429,3 kGm.

10.2 Ile pracy trzeba zużyć, aby 12 kg wody o temperaturze 20°C ogrzać do temperatury wrzenia (100°C)? Jakiej mocy silnika należałoby użyć, aby to wykonać w ciągu 20 minut?

Odpowiedź: 409 728 kGm; około 4,5 KM.

10.3 Ile pracy trzeba zużyć celem stopienia przez tarcie kilograma lodu o temperaturze 0°C? Jak długo w tym celu musiałby pracować silnik o mocy 1 KM?

Odpowiedź: 34 016 kGm; 7,56 minuty.

10.4 O ile stopni ogrzeje się kamień spadający z wysokości 60 m przy uderzeniu o ziemię przy założeniu, że całe ciepło powstałe przy uderzeniu idzie na ogrzanie kamienia (przyjąć na jego ciepło właściwe 0,2 cal/g stop.

Odpowiedź: $\approx$ 0,7°.

10.5 Jaką prędkość powinna mieć kula ołowiana o temperaturze początkowej 20°, aby się stopiła przy uderzeniu o przeszkodę (przy założeniu, że ciepło wydzielone idzie w całości na ogrzanie kuli). Ciepło właściwe ołowiu c = 0,03 cal/g stop, temperatura topnienia ołowiu 327,3° ciepło topnienia ołowiu r = 5,9 cal/g?

Odpowiedź: $\frac{mv^2}{2} = 4{,}185 \cdot 10^7\,[mc(327{,}3 - 20) + mr]$; co najmniej 355,7 m/sec.

10.6 Pociąg o masie 2000 tonn jadący z prędkością 54 km/godz został zahamowany. Jaka ilość ciepła wywiązała się na hamulcach?
Odpowiedź: 53 740 kcal.

10.7. O ile zmieni się energia wewnętrzna powietrza w objętości 1 litra, znajdującego się pod ciśnieniem 760 Tr, przy ogrzaniu go w stałej objętości od temperatury 0°C do temperatury 100°C (gęstość powietrza 1,293 g/litr, $c_v = 0{,}169$)?
Odpowiedź: $914{,}5 \cdot 10^6$ ergów.

10.8. Litr powietrza znajdujący się pod ciśnieniem atmosferycznym (1 013 250 dyn/cm²) ogrzewamy przy stałym ciśnieniu od temperatury 0°C do 100°C. O ile powiększy się energia wewnętrzna powietrza (ciepło właściwe $c_p = 0{,}2375$).
Odpowiedź: ciepło pochłonięte $= 1{,}293 \cdot 0{,}2375 \cdot 100 \cdot 4{,}185 \cdot 10^7$ ergów, praca wykonana $= 1\,013\,250 \cdot \frac{100\,000}{273{,}15}$; zwiększenie energii $= 914{,}1 \cdot 10^6$ ergów.

10.9. Jak się zmieni energia wewnętrzna azotu, który w normalnych warunkach (0°C, 760 Tr) zajmuje objętość 10 litrów, gdy go tak podgrzejemy, że przy niezmiennym ciśnieniu zajmie objętość 15 litrów (gęstość azotu 1,251 g/litr, $c_v = 0{,}1764$, 760 Tr = 10 132 250 dyn/cm²).
Odpowiedź: wzrośnie o 301 cal $= 1259{,}7 \cdot 10^7$ ergów $= 1259{,}7$ dżulów.

10.10. W krzesiwie pneumatycznym zmniejszono nagle (adiabatycznie) objętość powietrza do jednej trzydziestej jego pierwotnej objętości. Jaką temperaturę uzyskało powietrze wewnątrz, jeżeli jego początkowa temperatura była 10°C?
Odpowiedź: 831°C.

10.11. Do jakiej temperatury oziębiłaby się masa suchego powietrza, która na wysokości 200 m nad poziomem morza, na której ciśnienie barometryczne było 740 Tr, miała temperaturę + 30°C, wznosząc się do wysokości 2000 m, na której panuje ciśnienie 596 Tr?
Odpowiedź: 11,3°C.

10.12. Ile pracy trzeba zużyć, aby 1 m³ powietrza znajdujący się pod normalnym ciśnieniem atmosferycznym 760 Tr (1,0332 kG/cm²) wtłoczyć do butli stalowej o pojemności 10 litrów, w stałej temperaturze 0°C?

Odpowiedź: $L = -\int_{V_1}^{V_2} p dV = -10\,332 \text{kG/m}^2 \cdot 1 \text{ m}^3. \int_{V_1}^{V_2} dV = -10\,332 \ln \frac{V_2}{V_1} =$
$= 10\,332 \ln 100 = 47\,581$ kGm (w razie braku odpowiednich tablic można otrzymać logarytm naturalny mnożąc logarytm dziesiętny przez 2,3026).

10.13. Jaka ilość ciepła wydzieli się przy izotermicznym zgęszczeniu 3 litrów powietrza znajdującego się pod normalnym ciśnieniem atmosferycznym (760 Tr) do 0,5 litra?
Odpowiedź: 130,2 cal.

10.14. Metr sześcienny powietrza pod ciśnieniem atmosferycznym w temperaturze 15°C wskutek zgęszczenia adiabatycznego ogrzewa się do 108,6°C. Ile pracy na to trzeba wykonać?
Odpowiedź: $L = 20\,460$ cal $= 8732$ kGm.

10.15. Ile pracy potrzeba, aby 1 kg powietrza o temperaturze 20°C będącego pod ciśnieniem 1 kG/cm² zgęścić do ciśnienia 10 kG/cm²? Jaka będzie ta praca 1) w przypadku zgęszczenia izotermicznego; 2) w przypadku zgęszczenia adiabatycznego?

Odpowiedź: 1) $1000 \cdot (0,2375 - 0,1690) \cdot 293 \ln 10 = 46\,220$ cal $= 193\,400$ J $=$ $= 19\,720$ kGm.

2) $1000 \cdot 0,1690 \cdot 272,7 = 46\,090$ cal $= 192\,900$ J $= 19\,670$ kGm.

10.16. Obliczyć sprawność silnika odwracalnego zasilanego ciepłem wrzącej wody w przypadku 1) gdy chłodnica ma temperaturę topniejącego lodu; 2) gdy chłodnica jest chłodzona ciekłym powietrzem (temperatura około — 190°C).

Odpowiedź: 1) 26,8%; 2) 77,7%.

Pytania do powtórzenia materiału

1. W jaki sposób określa się mechaniczny równoważnik ciepła?
2. Na czym polega równoważność pracy i ciepła?
3. Za pomocą jakiego doświadczenia myślowego znalazł Mayer mechaniczny równoważnik ciepła?
4. Jakie równanie wyraża treść I zasady termodynamiki?
5. Co wykazało doświadczenie Gay-Lussaca i Joule'a — Thomsona?
6. Funkcją jakich parametrów jest energia wewnętrzna gazu doskonałego?
7. Jakie jest wyrażenie na energię wewnętrzną gazu doskonałego?
8. Jakie będzie równanie wyrażające I zasadę termodynamiki dla zjawiska przy stałej objętości?
9. Jakie będzie równanie wyrażające I zasadę termodynamiki dla izotermicznych zmian objętości gazu doskonałego? Jakie przy tym zachodzą przemiany energetyczne?
10. Jakie jest wyrażenie na pracę elementarną wykonaną przez układ ciśnień przy zmianie objętości ciała?
11. Jaki jest związek między stałą powszechną gazów R a ich ciepłem właściwym? Jak go otrzymać?
12. Jakie będzie równanie wyrażające I zasadę termodynamiki dla adiabatycznych zmian objętości w gazie doskonałym?
13. Jak się wyraża prawo Poissona? Jak się zmienia temperatura gazu przy adiabatycznych zmianach jego objętości?
14. Jakie zjawiska nazywamy odwracalnymi? Jakie są nieodwracalne?
15. Jakie zmiany zachodzą w gazie przy nieodwracalnym rozprężeniu (w próżnię)? Jaką temperaturę nazywamy temperaturą inwersji?
16. Jak obliczyć pracę wykonaną przy skończonym izotermicznym zgęszczeniu gazu?
17. Jak obliczyć pracę wykonaną przy skończonym adiabatycznym zgęszczeniu gazu?
18. Jakie zjawiska nazywamy kołowymi?
19. Z jakich części składa się silnik Carnota? Jakie są części obiegu kołowego Carnota?
20. Jakie przemiany energetyczne zachodzą w poszczególnych częściach cyklu Carnota?
21. Jakie są wyniki cyklu Carnota?
22. Co nazywamy sprawnością silnika termodynamicznego?
23. Jakie przemiany energetyczne zachodzą przy odwróconym cyklu Carnota?
24. Jaka jest treść II zasady termodynamiki?
25. Jaka jest treść I twierdzenia Carnota? II twierdzenia Carnota?
26. Jaki jest wzór na sprawność silnika odwracalnego?
27. Na czym oparta jest skala termodynamiczna temperatur?
28. Jaką funkcję nazywamy entropią? Jak zmienia się entropia w układzie odosobnionym przy zachodzeniu zjawisk?
29. Jaka jest treść III zasady termodynamiki?

11. Zarys kinetyczno-molekularnej teorii materii

11.1. Obliczenie ciśnienia gazu w teorii kinetycznej. Bardzo małe ciałka zawieszone w cieczy lub w gazie, np. kuleczki gumiguty w wodzie albo drobne pyłki w powietrzu wykazują żywe ruchy zygzakowate bezładne, które możemy obserwować za pomocą mikroskopu. Ruchy te nazywają się ruchami Browna. Zjawisko to jest pośrednim dowodem, że drobiny ciał znajdują się w nieustannym ruchu. One to swymi uderzeniami wywołują ruchy drobnych ciałek znajdujących się w cieczy albo w gazie.

Opierając się na tym założeniu Smoluchowski oraz Einstein prawie jednocześnie opracowali teorię ruchów Browna sprawdzoną w zupełności przez doświadczenie.

Kinetyczna teoria ciepła utożsamia energię cieplną z energią kinetyczną oraz potencjalną działań wzajemnych najdrobniejszych cząstek materii, drobin i atomów; za pomocą założenia o nieustającym ruchu drobin tłumaczy najrozmaitsze zjawiska, o których była poprzednio mowa. Najprościej sprawa przedstawia się w gazach, toteż najpierw się nimi zajmiemy.

Możemy przyjąć, że gaz idealny składa się z drobin będących doskonale sprężystymi kuleczkami o znikomych rozmiarach. Każda drobina biegnie w pustej przestrzeni na mocy bezwładności z prędkością stałą, dopóki nie zderzy się z inną drobiną. Wtedy odbija się od niej według praw zderzenia się kul sprężystych i biegnie dalej. Drobiny znajdujące się w pobliżu ściany naczynia uderzają o nią. Grad ich uderzeń spowodowałby ruch ściany, gdyby była ona ruchoma, gdyby to był np. tłok mogący się poruszać w naczyniu cylindrycznym. Ta wielka ilość uderzeń równoważna jest pewnemu ciśnieniu. Obliczmy je przy pewnych upraszczających założeniach. Weźmy więc naczynie kształtu sześcianu, którego ściana ma pole S i w którym znajduje się wielka ilość drobin gazu. Naturalne będzie założenie, że ich prędkości są rozłożone równomiernie we wszystkich możliwych kierunkach i mają rozmaite wartości. Można jednak obliczyć, że skutek będzie taki sam, to znaczy takie samo ciśnienie, jeżeli między każdymi dwiema przeciwległymi ścianami sześcianu będzie biegła trzecia część wszystkich drobin wzdłuż prostych do tych ścian prostopadłych. Połowa z nich, a więc szósta część wszystkich drobin, będzie w każdym momencie biec z lewej strony na prawo, szósta część w lewo, szósta część do góry itd. Każda drobina biegnąc z prędkością v w kierunku ściany uderza o nią i odbija się z taką samą prędkością w przeciwnym kierunku.

W ust. 3.15 mieliśmy równanie (3.76) wyrażające drugą zasadę Newtona w postaci

$$mv_2 - mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt$$

(przyrost pędu równa się popędowi). Weźmy pod uwagę drobinę biegnącą w prawo z prędkością v_1. Odbije się ona od nieruchomej ściany z prędkością $- v_1$. Niech masa jej będzie M. Równanie powyższe przejdzie zatem w równanie

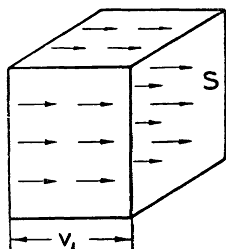
$$-Mv_1 - Mv_1 = \int_{t_1}^{t_2} F\,dt.$$

Niech średnią wartością siły wywieranej przez ścianę na drobinę w czasie Δt będzie F_1. Będzie więc

$$-2Mv_1 = F_1 \Delta t. \tag{11.1}$$

Minus wskazuje, że popęd udzielony drobinie przez ścianę jest skierowany w lewo. Jeżeli ściana wywiera w czasie t średnio siłę F_1 na drobinę, to według zasady akcji i reakcji doznaje działania takiej samej siły w tym samym czasie w kierunku przeciwnym. Zatem ściana doznaje takiego samego popędu skierowanego w prawo, to znaczy

$$2Mv_1.$$



Rys. 11.1. W sekundzie do ściany S dobiegną drobiny znajdujące się w prostopadłościanie o podstawie S i wysokości v_1

Spośród drobin o prędkości v_1 w przeciągu sekundy dobiegną do ściany te drobiny, które znajdują się w odległości od ściany równej v_1 cm albo mniejszej (rys. 11.1, prędkość = drodze przebywanej w sekundzie). Zatem w przeciągu sekundy ze ścianą zderzą się te drobiny o prędkości v_1, które na początku znajdowały się w prostopadłościanie o podstawie S i wysokości v_1. Przypuśćmy, że w każdym cm³ mamy n_1 drobin o prędkości v_1. W takim razie w prostopadłościanie o podstawie S i wysokości v_1 będzie $n_1 S v_1$ takich drobin. Lecz tylko ich szósta część biegnie w kierunku ściany S. Zatem liczba drobin o prędkości v_1, które uderzą o ścianę w przeciągu sekundy, będzie

$$\frac{1}{6} n_1 S v_1 .$$

Pęd oddany ścianie w przeciągu sekundy będzie

$$2Mv_1 \frac{1}{6} n_1 S v_1 = F_1 \cdot 1 \text{ sec}.$$

F_1 jest średnią wartością siły, czyli parcia na ścianę S. Ciśnienie będzie

$$p_1 = \frac{F_1}{S} = \frac{2Mn_1 v_1^2}{6} = \frac{1}{3} M n_1 v_1^2. \tag{11.2}$$

Lecz w gazie mamy drobiny o najrozmaitszych prędkościach. Całkowite ciśnienie gazu będzie równe sumie ciśnień wywieranych przez drobiny o wszelkich możliwych prędkościach. Otrzymamy więc na ciśnienie wzór

$$p = \frac{1}{3} Mn_1v_1^2 + \frac{1}{3} Mn_2v_2^2 + \frac{1}{3} Mn_3v_3^2 + \ldots =$$
$$= \frac{1}{3} M(n_1v_1^2 + n_2v_2^2 + n_3v_3^2 + \ldots). \tag{11.3}$$

Wprowadźmy średnią kwadratów prędkości określoną w sposób następujący

$$\frac{n_1 v_1^2 + n_2 v_2^2 + n_3 v_3^2 + \ldots}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots} = v^2. \tag{11.4}$$

Zważywszy, że $n_1 + n_2 + n_3 \ldots = n$, czyli całkowitej liczbie drobin w 1 cm^3, mnożąc równanie (11.4) przez mianownik otrzymamy z niego równanie

$$n_1v_1^2 + n_2v_2^2 + n_3v_3^2 + \ldots = (n_1 + n_2 + n_3 + \ldots)\, v^2 = nv^2. \tag{11.5}$$

Podstawiając do równania (11.3) otrzymamy na ciśnienie wzór

$$\boxed{p = \frac{1}{3} Mnv^2.} \tag{11.6}$$

Iloczyn masy drobiny M przez liczbę drobin n w 1 cm^3 daje masę gazu zawartą w 1 cm^3, czyli jego gęstość: $Mn = \varrho$. Otrzymamy więc na ciśnienie wzór

$$p = \frac{1}{3} \varrho v^2. \tag{11.7}$$

Ponieważ $\varrho = \frac{m}{V}$, czyli stosunkowi masy do objętości, zatem z równania (11.7) otrzymamy

$$p = \frac{1}{3} \frac{m}{V} v^2,$$

skąd

$$pV = \frac{1}{3} mv^2. \tag{11.8}$$

Lecz masa m gazu równa się masie jednej drobiny M pomnożonej przez liczbę n' drobin zawartych w objętości V, czyli

$$pV = \frac{1}{3} Mn'v^2 = \frac{2}{3} n' \frac{Mv^2}{2}, \tag{11.9}$$

$\frac{Mv^2}{2}$ jest to średnia energia kinetyczna jednej drobiny. Iloczyn

$$n' \frac{Mv^2}{2}$$

będzie się zatem równał energii kinetycznej E_k wszystkich drobin znajdujących się w masie m gazu. Ponieważ drobiny są doskonale sprężyste, ich energia się nie zmienia mimo ciągłych zderzeń. Zatem otrzymujemy

$$pV = \frac{2}{3} E_k = \text{const}, \tag{11.10}$$

czyli prawo Boyle'a.

11.2. Związek między energią kinetyczną drobin i temperaturą. Zastosujmy równanie (11.8) do masy μ jednej gramodrobiny gazu. Będziemy mieli wtedy

$$pV = \frac{1}{3} \mu v^2. \tag{11.11}$$

Lecz mieliśmy równanie stanu dla jednej gramodrobiny:

$$pV = RT. \tag{11.12}$$

Stąd wynika, że

$$\frac{1}{3} \mu v^2 = RT.$$

Pomnóżmy stronami to równanie przez $\frac{3}{2} \frac{M}{\mu}$, otrzymamy wtedy

$$\boxed{\frac{Mv^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu} RT.} \tag{11.13}$$

Po lewej stronie równania mamy wartość średniej energii kinetycznej drobiny. Otrzymaliśmy więc ważny wynik, że średnia energia kinetyczna drobiny jest proporcjonalna do temperatury bezwzględnej.

Iloraz $\frac{\mu}{M}$, to jest iloraz masy jednej gramodrobiny przez masę jednej drobiny, występujący w równaniu (11.13) daje oczywiście liczbę drobin w jednej gramodrobinie. Nazwijmy ją N. Liczbę tę nazywają liczbą Avogadra. Liczbę tę można obliczyć z wyników rozmaitych pomiarów elektrycznych, optycznych, ruchów Browna itd. Według zgodnych wyników tych pomiarów

$$\text{liczba Avogadra } N = 6{,}02 \cdot 10^{23}.$$

Wielkość $\frac{MR}{\mu} = \frac{R}{N} = k$ nosi nazwę stałej Boltzmanna. Wartość jej da się natychmiast wyliczyć, gdy znamy R i N. Otrzymujemy

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{ergów}}{\text{stopień}}.$$

Równanie (11.13) możemy napisać w postaci:

$$\boxed{\frac{Mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT.} \tag{11.14}$$

Jeżeli z równania

$$p = \frac{1}{3} M n v^2 \tag{11.6}$$

i z równania (11.14) wyeliminujemy M, to otrzymamy

$$p = nkT \tag{11.15}$$

związek między ciśnieniem p, liczbą drobin n w 1 cm³ i temperaturą bezwzględną. Z tego związku możemy łatwo obliczyć, że 1 cm³ gazu w normalnych warunkach, tzn. w temperaturze 0°C i pod ciśnieniem 760 mmHg zawiera $27 \cdot 10^{18}$ drobin.

Jak z tego ostatniego wzoru widać, liczba drobin w 1 cm³ w danej temperaturze jest proporcjonalna do ciśnienia, zaś przy stałym ciśnieniu jest odwrotnie proporcjonalna do temperatury bezwzględnej.

Ponieważ masa gramodrobiny wodoru wynosi 2,016 g, zawiera zaś ona $6{,}02 \cdot 10^{23}$ drobin, przeto dzieląc masę gramodrobiny przez liczbę drobin, jaką zawiera, otrzymamy masę jednej drobiny wodoru M_{H_2}

$$M_{H_2} = \frac{2{,}016}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 3{,}347 \cdot 10^{-24}\,\text{g}.$$

Masa zaś atomu wodoru będzie dwa razy mniejsza, czyli $1{,}673 \cdot 10^{-24}$ g.

Równanie (11.7) pozwala wyrachować tzw. prędkość średnią kwadratową v, gdy znamy ciśnienie i gęstość gazu. Prędkość w ten sposób wyznaczona nie równa się średniej prędkości drobiny v' wyznaczonej równaniem

$$v' = \frac{n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3 + \ldots}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots}.$$

Prędkość średnia v' jest nieco mniejsza. Dokładny rachunek daje

$$v' = 0{,}921\, v.$$

11.3. Zasada ekwipartycji energii. Ciepło właściwe gazów. Mieliśmy poprzednio związek (11.14) między energią kinetyczną drobiny i temperaturą

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT. \tag{11.14}$$

Rozkładając prędkość średnią v na trzy składowe w kierunku trzech osi współrzędnych v_x, v_y, v_z możemy napisać

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

(według uogólnionego twierdzenia Pitagorasa kwadrat przekątnej prostopadłościanu równa się sumie krawędzi schodzących się w jednym wierzchołku). Ponieważ wszystkie kierunki prędkości są jednakowo uprawnione, zatem możemy napisać

$$v_x^2 = v_y^2 = v_z^2.$$

W takim razie

$$v_x^2 = \frac{1}{3}v^2, \quad v_y^2 = \frac{1}{3}v^2, \quad v_z^2 = \frac{1}{3}v^2.$$

Zatem zamiast jednego równania (11.14) możemy napisać trzy równania

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{1}{2}kT, \quad \frac{Mv^2}{2} = \frac{1}{2}kT, \quad \frac{Mv^2}{2} = \frac{1}{2}kT. \tag{11.16}$$

Jeżeli punkt materialny jest zupełnie swobodny, tzn. może się poruszać niezależnie w kierunku osi X, Y i Z (czyli jego współrzędne x, y, z mogą się zmieniać w sposób dowolny), to mówimy, że punkt ten ma trzy stopnie swobody. Jeżeli punkt porusza się po pewnej powierzchni, tzn. że jego współrzędne związane są jednym równaniem

$$f(x,y,z) = 0,$$

to punkt ma 2 stopnie swobody. Jeżeli wreszcie punkt ten może się poruszać tylko po pewnej linii, tzn. że jego współrzędne muszą spełniać dwa równania

$$f_1(x,y,z) = 0,$$

$$f_2(x,y,z) = 0,$$

to ma tylko 1 stopień swobody.

Całkowicie swobodna drobina uważana za punkt materialny ma zatem 3 stopnie swobody. Na każdy stopień swobody przypada jednakowa energia kinetyczna $\frac{1}{2}kT$.

Za punkt materialny można uważać tylko drobiny gazów jednoatomowe. Drobinom dwuatomowym, takim jak N_2, O_2, H_2 musimy przypisywać dodatkowe jeszcze dwa stopnie swobody odpowiadające możliwościom wirowania tych drobin naokoło dwóch prostopadłych do siebie osi. Takie drobiny mają więc 5 stopni swobody. Więcej skomplikowanym drobinom, takim, jak np. H_2O musimy przypisywać trzy różne możliwości obrotu, a więc ogółem 6 stopni swobody. Jak udowadnia się w mechanice statystycznej, każdemu stopniowi swobody należy przypisać jednakową energię równą $\frac{1}{2}kT$. Jest to zasada ekwipartycji energii, czyli równego rozdziału energii między poszczególne stopnie swobody. Pomnożywszy $\frac{1}{2}kT$ przez liczbę Avogadra N otrzymamy energię przypadającą na gramodrobinę i na jeden stopień swobody

$$\frac{1}{2}NkT = \frac{1}{2}RT \tag{11.17}$$

(gdyż $Nk = R$). W gazach jednoatomowych zatem (w których drobiny składają się z pojedynczych atomów) całkowita energia drobin w jednej gramodrobinie ze względu na trzy stopnie swobody będzie wynosić

$$\frac{3}{2}RT.$$

Mieliśmy w termodynamice związek

$$R = C_p - C_v = 2\frac{\text{cal}}{\text{gramodrobina stop.}}, \tag{11.18}$$

zaś na energię wewnętrzną gazu doskonałego wzór

$$U = mc_vT.$$

Stosując ten wzór do jednej gramodrobiny możemy napisać

$$U_{1\ \text{gramodrobina}} = \mu c_v T = C_v T = \frac{3}{2}2RT.$$

Stąd wynika, że

$$C_v = \frac{3}{2}R = 3\frac{\text{cal}}{\text{gramodrobina stop.}}.$$

Ze związku zaś (11.18) otrzymamy

$$C_p = 5\frac{\text{cal}}{\text{gramodrobina stop.}}.$$

Zatem na stosunek

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p}{C_v}$$

otrzymamy

$$\varkappa = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} = 1{,}66$$

zgodnie z pomiarami dla gazów jednoatomowych (patrz 9.17).

Dla gazów dwuatomowych o 5 stopniach swobody będziemy mieli

$$U = C_vT = \frac{5}{2}RT.$$

Zatem

$$C_v = \frac{5}{2}R = 5\frac{\text{cal}}{\text{gramodrobina stop.}}, \qquad C_p = 7\frac{\text{cal}}{\text{gramodrobina stop.}},$$

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} = 1{,}4.$$

Dla gazów trójatomowych

$$U = C_v T = \frac{6}{2} RT,$$

$$C_v = 6 \frac{\text{cal}}{\text{gramodrobina stop.}}, \qquad C_p = 8 \frac{\text{cal}}{\text{gramodrobina stop.}},$$

$$\varkappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3} = 1{,}33.$$

Wszystkie otrzymane w ten sposób liczby są zgodne z danymi doświadczalnymi.

11.4. Liczba zderzeń i średnia droga swobodna. Drobiny gazu mają bardzo dużą prędkość wynoszącą kilkaset metrów na sekundę. Mimo to przemieszczają się one stosunkowo powoli z powodu bardzo wiekiej liczby zderzeń z innymi drobinami, jakich doznają na swojej drodze. Maxwell wyrachował liczbę zderzeń, jakiej doznaje drobina w sekundzie. Liczba ta jest bardzo duża, przy ciśnieniu atmosferycznym wynosi miliardy na sekundę. Ta liczba zderzeń Z jest proporcjonalna do liczby drobin w 1 cm^3, czyli do gęstości gazu.

Bardzo ważnym pojęciem teorii kinetycznej jest tzw. średnia droga swobodna. Jeżeli prędkość średnia drobiny jest v' to znaczy, że drobina w 1 sec przebywa drogę v' cm. Droga ta składa się z wielu prostoliniowych dłuższych i krótszych odcinków. Odcinków tych jest tyle, ilu zderzeń doznaje drobina w sekundzie. Oznaczając liczbę zderzeń przez Z, prędkość średnią przez v', znajdziemy, że średnio przebywa drobina między dwoma zderzeniami odcinek

$$\frac{v'}{Z} = \lambda.$$

Nazywamy go średnią drogą swobodną. Ponieważ Z jest proporcjonalne do gęstości gazu, zatem średnia droga swobodna jest odwrotnie proporcjonalna do gęstości gazu, a więc do ciśnienia, pod jakim się znajduje. Przy ciśnieniu atmosferycznym jest rzędu jednej dziesiątej mikrona, w naczyniach wypompowanych przez dobre nowoczesne pompy może dochodzić do setek metrów.

Tabela 11.1 podaje dla kilku gazów wielkości, o których była mowa wyżej.

Tabela 11.1

Wielkości dla gazów znajdujących się pod ciśnieniem 760 mmHg przy temp. 0°C

Gaz	v w m/sec	v' w m/sec	Liczba zderzeń Z jednej drobiny na sekundę	Średnia droga swobodna λ w cm
Wodór, H_2	1909	1755	$14{,}56 \cdot 10^9$	$1{,}18 \cdot 10^{-5}$
Azot, N_2	511	471	$5{,}07 \cdot 10^9$	$0{,}91 \cdot 10^{-5}$
Tlen, O_2	478	440	$4{,}06 \cdot 10^9$	$1{,}06 \cdot 10^{-5}$
Co_2	408	376	$8{,}62 \cdot 10^9$	$0{,}46 \cdot 10^{-5}$

Teoria kinetyczna pozwala również obliczyć rozmiary drobin. Średnice drobin wszystkich powyżej wymienionych gazów wynoszą od $2 \cdot 10^{-8}$ do $4 \cdot 10^{-8}$ cm.

11.5. Rozprężanie się i zgęszczanie gazów. Teoria kinetyczna łatwo tłumaczy, dlaczego gaz zawsze zajmuje całą objętość naczynia. Drobiny gazu, gdy wpadną do pustego naczynia, biegną swobodnie po liniach prostych aż do zderzenia ze ścianą naczynia. Wypełnienie naczynia gazem następuje w przeciągu bardzo krótkiego czasu. Przy rozprężeniu adiabatycznym z wykonaniem zewnętrznej pracy gazy oziębiają się. Objaśnia się to oddawaniem pędu przez drobiny poruszającemu się tłokowi. Gdy drobina zderza się z tłokiem poruszającym się w tę samą stronę, to po odbiciu ma mniejszą prędkość niż przed odbiciem. Wskutek tego prędkość drobin maleje, a więc temperatura spada. Po odbiciu się od tłoka idącego na spotkanie drobiny odbijając się zyskują na prędkości, a więc temperatura gazu musi się podwyższać. Gdy gaz rozpręża się w puste naczynie, drobiny jego uderzają o nieruchomą ścianę odbijając się z prędkością, jaką miały przed uderzeniem. Prędkość się nie zmienia, zatem nie zmienia się temperatura.

Przy gazach rzeczywistych występują pomiędzy drobinami pewne siły. Jeżeli te siły są przyciągające, to przy rozprężeniu nieodwracalnym drobiny gazu muszą je pokonywać. Kosztem energii kinetycznej gazu wykonywana jest wówczas praca potrzebna do oddalenia od siebie drobin, zatem temperatura gazu obniża się.

Jeżeli między drobinami działają siły odpychające, to wówczas przy rozprężeniu nieodwracalnym siły te wykonają pracę. Energia kinetyczna drobin rośnie, zatem temperatura gazu podwyższa się.

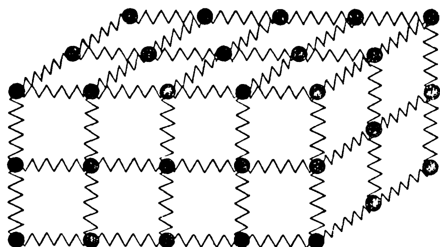
11.6. Parowanie. Drobiny cieczy znajdują się również w ciągłym ruchu. Jednakże siły występujące między drobinami cieczy przy ich małych wzajemnych odległościach są tak znaczne, że drobiny nie mogą się oddalić jedne od drugich, rozlecieć jak w gazach. Ciecz ma określoną objętość i zajmuje tylko określoną część naczynia. Drobiny, aby opuścić ciecz, muszą pokonać przyciąganie otaczających je sąsiednich drobin. O tym przyciąganiu będzie szerzej mowa w ust. 11.10.

Pewna liczba drobin cieczy znajdujących się blisko powierzchni swobodnej i posiadająca dostateczną energię kinetyczną, aby pokonać przyciąganie sąsiadujących drobin, opuszcza jednak ciecz, dostając się do otaczającego powietrza. Jest to zjawisko parowania. Ponieważ ciecz opuszczają przede wszystkim drobiny mające największą prędkość, ciecz staje się uboższa w energię kinetyczną, temperatura jej obniża się wskutek parowania.

11.7. Para nasycona. Jeżeli parowanie odbywa się w naczyniu zamkniętym, liczba drobin pary wzrasta stopniowo. Ze względu na to, że drobiny pary poruszają się w ciągle zmieniających się kierunkach, niektóre wracają z powrotem do cieczy. Im większa będzie gęstość pary, tym więcej będzie w każdej sekundzie wracało drobin z powrotem. Przy dostatecznej gęstości pary, to znaczy przy dostatecznej liczbie jej drobin, liczba drobin wracających do cieczy zrówna się

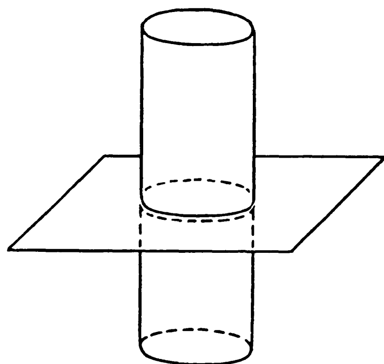
z liczbą drobin opuszczających ciecz. Ustali się stan, który nazywamy stanem równowagi statystycznej. Będzie to ciągła wymiana drobin między cieczą i parą, lecz liczba drobin cieczy oraz liczba drobin pary pozostanie niezmienna.

11.8. Przewodzenie ciepła. Według kinetycznej teorii energia cieplna ciała jest energią kinetyczną tworzących je drobin. Jeżeli np. temperatura jakiejś warstwy gazu rośnie, to znaczy to, że rośnie energia kinetyczna drobin tej warstwy. Drobiny o większej energii kinetycznej oddają przez zderzenia część swej energii drobinom sąsiednim o mniejszej energii. W ten sposób energia kinetyczna drobin, czyli ciepło, przechodzi do coraz dalszych warstw gazu. Na tym polega proces przewodzenia ciepła przez gazy. Zupełnie w taki sam sposób odbywa się przewodzenie ciepła przez ciecze.



Rys. 11.2. Model ciała stałego

Nieco inaczej sprawa się przedstawia w ciałach stałych. W tych ostatnich ciałach drobiny nie są ruchome. Są one związane bardzo dużymi siłami przyciągania, które przy zmniejszaniu objętości przechodzą w siły odpychające. Każda drobina jest unieruchomiona i może tylko wykonywać drgania około określonego położenia równowagi. Można by otrzymać pewien przybliżony poglądowy obraz ciała stałego wyobrażając sobie drobiny jego lub atomy połączone jak gdyby malutkimi sprężynkami, które pozwalają im drgać, ale nie pozwalają przemieszczać się między drobinami sąsiednimi (rys. 11.2). Gdy ogrzewamy jeden koniec ciała stałego np. za pomocą palnika bunzenowskiego, energia kinetyczna drobin ogrzewanego miejsca ciała rośnie wskutek uderzeń drobin o wielkiej energii w płomieniu palnika. Gwałtowne ruchy drobin ogrzewanej części pobudzają też sąsiednie drobiny sprzężone z nimi do szybszego ruchu i w ten sposób ciepło wędruje wzdłuż ciała stałego aż do drugiego jego końca.



Rys. 11.3. Mieszanie się gazów przez dyfuzję

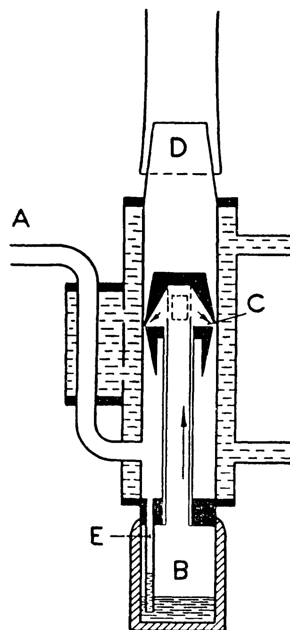
11.9. Dyfuzja. Gdy dwa gazy są ze sobą w zetknięciu, drobiny jednego gazu wskutek ciągłego ruchu przenikają między drobiny drugiego i w ten sposób dość szybko następuje ich samodzielne zmieszanie się. Weźmy dwa naczynia cylindryczne; jedno, odwrócone dnem do góry, napełnijmy szybko wodorem, przykryjmy szybą i postawmy na drugim (rys. 11.3) takim samym naczyniu z powietrzem. Gdy usuniemy szybę, stwierdzimy wkrótce, że w dolnym naczyniu

znajduje się mieszanina wodoru z powietrzem eksplodująca po zapaleniu. Podobne zjawiska samodzielnego mieszania się obserwujemy również w cieczach. Jeżeli na dno naczynia nalejemy nieco stężonego roztworu siarczanu miedzi w wodzie, który posiada kolor błękitny, a następnie wlejemy ostrożnie wodę, z początku będzie widać między nimi wyraźną granicę, lecz po pewnym czasie granica ta staje się nieostra, a woda ponad siarczanem miedzi zaczyna się zabarwiać na niebiesko. Barwa od najintensywniejszej na dole blednie stopniowo ku górze. Podobnie zachowują się woda i alkohol, gdy na warstwę wody nalejemy ostrożnie alkoholu: drobiny wody przenikają do góry, alkoholu w dół, aż w końcu ciecze wymieszają się. Zjawisko to, łatwe do zrozumienia z punktu widzenia teorii kinetycznej, nazywamy dyfuzją.

Dyfuzja w gazach odbywa się nieporównanie szybciej niż w cieczach. Dyfuzja w cieczach jest zjawiskiem niezmiernie powolnym. Na całkowite wymieszanie się i wyrównanie stężeń w cieczach trzeba często miesięcy lub nawet lat.

Na zjawisku dyfuzji polega wyrównanie się stężeń przy rozpuszczaniu się ciała stałego, np. cukru w wodzie, co przyśpieszamy w wysokim stopniu przez mieszanie.

Zjawisko dyfuzji wykorzystano przy budowie nowoczesnych pomp dyfuzyjnych pozwalających na osiągnięcie daleko posuniętej próżni.

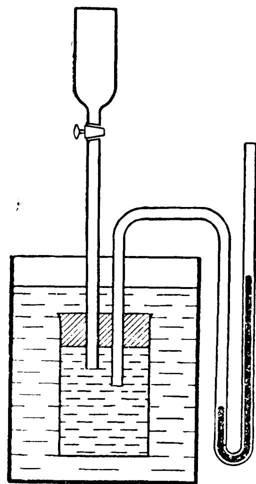


Rys. 11.4. Pompa dyfuzyjna rtęciowa

Na rysunku 11.4 przedstawiona jest pompa dyfuzyjna rtęciowa. Dla jej działania niezbędna jest pompa wstępna przyłączona do rurki *A*, wytwarzająca tak w pompie dyfuzyjnej, jak i w zbiorniku z nią połączonym niskie ciśnienie, dająca tzw. wstępną próżnię. Podgrzewana w zbiorniczku *B* u dołu pompy rtęć wrze gwałtownie, a pary jej wylatują przez otwór *C*. Do pary rtęci dyfunduje gaz ze zbiornika przyłączonego do rury *D*. Strumień pary porywa jego drobiny w dół, gdzie pompa wstępna go odpompowuje. Para rtęci skrapla się na sciankach pompy chłodzonych wodą i ścieka z powrotem do zbiornika przez rurkę *E*. Zamiast rtęci zaczęto w ostatnich latach używać do pomp dyfuzyjnych również specjalnych olejów, apiezonowego lub silikonowego, które mają niezmiernie niskie ciśnienie pary nasyconej. Jest to szczególnie pożądane wtedy, gdy chodzi o to, aby pary rtęci nie dostawały się do aparatury.

Za pomocą pomp dyfuzyjnych można osiągać ciśnienia gazu nadzwyczaj niskie, czyli, jak mówimy często, „dobrą próżnię". Ciśnienia te mogą być mniejsze od 10^{-6} mmHg.

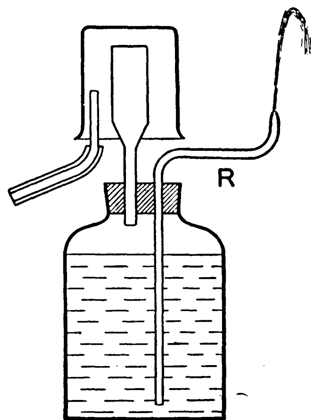
11.10. Osmoza. Dyfuzja i mieszanie się gazów i cieczy odbywa się również przez ścianki porowate lub błony, przez które ciecze czy gazy mogą przenikać. Zjawisko to nazywamy osmozą. Zazwyczaj ciała znajdujące się po obu stronach ścianki lub błony przenikają przez nią z różnymi szybkościami.



Rys. 11.5. Zjawisko osmozy. Woda przenika przez ściankę półprzenikliwą cylindra do roztworu wewnątrz

Umiemy obecnie wytwarzać błony, względnie preparować ścianki tak, że przepuszczają one tylko drobiny rozpuszczalnika, a nie przepuszczają drobin ciała rozpuszczonego. Gdy cylinder z takiego materiału półprzenikliwego napełnimy np. stężonym roztworem siarczanu miedzi i połączymy z manometrem rtęciowym jak na rys. 11.5, to po zanurzeniu cylindra w wodzie ciśnienie, które wskazuje manometr, będzie szybko rosnąć. Oczywiście wskutek większego ciśnienia wewnątrz cylindra niż na zewnątrz woda będzie z coraz większą trudnością przenikać przez ściankę, aż wreszcie przy dostatecznie dużym ciśnieniu woda przestanie przenikać do wnętrza, ustali się stan równowagi. Ciśnienie, które wskazuje wtedy manometr, nazywamy ciśnieniem osmotycznym. Ciśnienie osmotyczne może dosięgać wartości rzędu dziesięciu atmosfer. Zjawisko osmozy odgrywa wielką rolę w świecie organicznym. Dzięki istnieniu błon przenikliwych w organizmach zwierząt i ludzi pokarmy przenikają do tkanek dostarczając materiałów potrzebnych do ich odbudowy.

Zjawisko dyfuzji gazów przez ściankę z porowatej glinki łatwo obserwować. Zatkajmy cylinder taki, jakich się używa do ogniw galwanicznych, szczelnie korkiem z przetkniętą przezeń rurką szklaną. Drugi koniec rurki przepuśćmy przez korek z dwoma otworami zamykający słoik napełniony wodą. W drugim otworze umieśćmy rurkę szklaną *R* sięgającą prawie dna słoika (rys. 11.6). Rurka odpowiednio wygięta winna być zakończona małym otworkiem. Gdy cylinder przykryjemy zlewką odwróconą dnem do góry i wpuścimy pod zlewkę wodór, z rurki *R* zaczyna wytryskiwać woda. Wodór przenika przez ścianki cylindra prędzej niż powietrze wewnętrzne na zewnątrz. Ciśnienie w cylindrze wzrasta, a więc również i w słoju nad wodą.

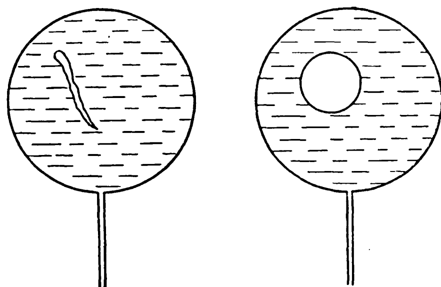


Rys. 11.6. Dyfuzja gazu przez ściankę porowatą

Szybkości dyfundowania różnych gazów przez ścianki porowate są różne, zależne od ciężaru drobinowego gazu. Im mniejszy jest ciężar drobinowy, tym większa szybkość dyfundowania.

11.11. Ciśnienie molekularne wewnątrz cieczy. Drobiny znajdujące się wewnątrz cieczy doznają od sąsiednich drobin sił przyciągających. Lecz siły te występują tylko przy niezmiernie małych odległościach drobin. Ze wzrostem odległości maleją bardzo szybko. Wokół każdej drobiny można zakreślić powierzchnię kulistą promieniem ϱ takiej wielkości, że siły wywierane na nią przez drobiny znajdujące się wewnątrz tej powierzchni kulistej są znaczne, zaś przez drobiny znajdujące się poza nią — tak małe, że można je zaniedbać. Kulę tak pomyślaną nazywamy molekularną sferą działania, a promień jej ϱ — promieniem molekularnego działania. Wskutek wzajemnych sił przyciągających wytwarza się wewnątrz cieczy ogromne ciśnienie rzędu dziesięciu tysięcy atmosfer. Jest to tzw. ciśnienie molekularne. Nic zatem dziwnego, że ciecze są mało ściśliwe, gdyż poddane są tak wielkiemu ciśnieniu wewnętrznemu, że zewnętrzne ciśnienie rzędu kilku czy kilkunastu atmosfer nie wywiera już wielkiego skutku, nie zmniejsza prawie objętości cieczy. Mimo istnienia tych sił przyciągających drobina wewnątrz cieczy zachowuje się jak drobina swobodna i do jej przemieszczenia wystarcza znikoma siła, ponieważ siły przyciągające skierowane są we wszystkie strony i dają wypadkową w przybliżeniu równą zeru. Działanie tych sił daje się spostrzec dopiero wtedy, gdy drobina znajduje się bardzo blisko powierzchni, w odległości od niej mniejszej niż promień molekularnego działania. Wówczas wypadkowa sił przyciągających drobinę skierowana jest do wnętrza cieczy. Wypadkowa ta jest tym większa, im bliżej powierzchni cieczy znajduje się drobina. Zatem przeprowadzenie jakiejkolwiek drobiny z wnętrza cieczy na jej powierzchnię wymaga zużycia pracy. Praca ta gromadzi się jako energia potencjalna i jest tym większa, im większa jest powierzchnia cieczy.

Jeżeli ciśnienie na powierzchnię swobodną jest p_0, to tuż pod powierzchnią swobodną panuje już ogromne ciśnienie molekularne $p_0 + p_m$.



Rys. 11.7. Napięcie powierzchniowe. Pętelka z nici po przebiciu błonki wewnątrz przybiera kształt koła

11. 12. Napięcie powierzchniowe. Że istotnie drobiny cieczy przyciągają się, przekonywają nas o tym zjawiska występujące wtedy, gdy z cieczy wytworzymy bardzo cienką warstewkę. Zanurzmy np. ramkę z cienkiego drutu w mydlinach (rys. 11.7). Okaże się, że po wyjęciu ramki z mydlin będzie na niej napięta cieniutka błonka. Umieśćmy na niej ostrożnie pętelkę z cienkiej nitki. Gdy dotkniemy błonki wewnątrz tej pętelki rozgrzanym ostrzem igły, błonka wewnątrz pętelki pęka, a pozostała błonka rozciąga natychmiast pętelkę w kształt koła.

Zanurzmy w mydlinach ramkę prostokątną z cienkiego drutu, której jeden bok jest ruchomy. Po wyjęciu utworzy się na ramce błonka, która kurcząc się

pociągnie natychmiast ruchomy drucik do góry. Aby utrzymać błonkę rozciągniętą, trzeba do drucika przyłożyć siłę równą sile wywieranej przez błonkę (rys. 11.8). Siła ta jest proporcjonalna do długości drucika l, czyli do długości brzegu błonki. Oznaczmy tę siłę przez F. Możemy zatem napisać

$$F \sim l.$$

Rys. 11.8. Błonka ciągnąca drucik do góry

Na jednostkę długości będzie przypadać siła

$$\frac{F}{l}.$$

Ponieważ błonka napięta na ramce ma dwie powierzchnie, z jednej i drugiej strony, zatem na pojedynczą powierzchnię i na jednostkę długości przypada siła

$$\frac{F}{2l} = T,$$

skąd

$$F = 2Tl. \tag{11.19}$$

T jest to tak zwane napięcie powierzchniowe, wyrażane, jak łatwo wywnioskować z powyższych wzorów, w dynach na centymetr albo w milipondach na milimetr długości brzegu.

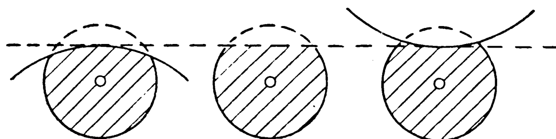
Tabela 11.2

Wartości napięcia powierzchniowego T przy temperaturze 18°C

Ciecz	T w dyn/cm	Ciecz	T w dyn/cm
Eter etylowy	17	Gliceryna	65
Alkohol etylowy	22	Woda	73
Nafta	27	Rtęć	490

Napięcie powierzchniowe zależy od temperatury. Zmniejsza się mianowicie ze wzrostem temperatury.

11.13. Ciśnienie molekularne pod powierzchnią zakrzywioną. Pod powierzchnią płaską ciśnienie molekularne w cieczy jest wszędzie jednakowe. Lecz tam, gdzie powierzchnia jest zakrzywiona, pojawiają się natychmiast różnice ciśnienia. Porównując wielkości odciętych części molekularnej sfery działania (rys. 11.9) łatwo stwierdzimy, że siły wywierane na drobiny znajdujące się pod powierzchnią swobodną cieczy w równych od niej odległościach są w przypadku wypukłej powierzchni większe, zaś w przypadku powierzchni



Rys. 11.9. Części molekularnej sfery działania odcięte przez powierzchnie cieczy różnej postaci są różne

wklęsłej — mniejsze. Te różnice ciśnień można obliczyć w sposób następujący: weźmy pod uwagę powierzchnię wypukłą kulistą o promieniu R. Powierzchnia jest pokryta warstewką o napięciu powierzchniowym T stycznym do powierzchni. Rozłóżmy siłę T przypadającą na jednostkę długości obwodu na składową poziomą T_h i pionową T_1 (rys. 11.10).

Składowa pionowa będzie

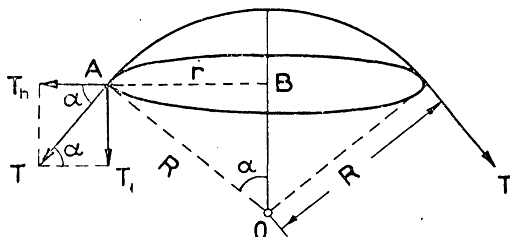
$$T_1 = T \sin \alpha. \qquad (11.20)$$

Lecz jak widać z trójkąta ABO,

$$\sin \alpha = \frac{r}{R}. \qquad (11.21)$$

Zatem

$$T_1 = T\frac{r}{R}. \qquad (11.22)$$



Rys. 11.10. Ciśnienie pod powierzchnią wypukłą powstające wskutek napięcia powierzchniowego

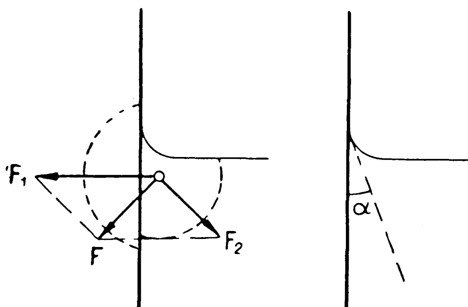
Siła działająca na cały obwód koła o promieniu r będzie

$$2\pi r T_1 = T\frac{2\pi r^2}{R}. \qquad (11.23)$$

Przypada ona na całe pole powierzchni koła o promieniu r, czyli na pole πr^2. Zatem ciśnienie dodatkowe wskutek krzywizny powierzchni swobodnej będzie wynosić

$$T\frac{2\pi r^2}{R\pi r^2} = \frac{2T}{R}. \qquad (11.24)$$

To ciśnienie, jak widać ze wzoru, będzie tym większe, im mniejszy jest promień krzywizny R. Łatwo zdać sobie sprawę, że pod powierzchnią wklęsłą będziemy mieli o tyleż mniejsze ciśnienie niż pod płaską.

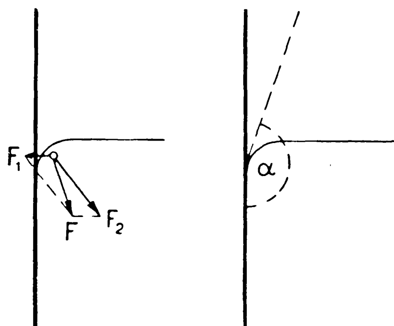


Rys. 11.11. Powierzchnia cieczy zwilżającej ściankę naczynia

11. 14. Zjawiska na granicy ciała stałego i cieczy. Drobiny ciała stałego graniczącego z cieczą również wywierają siły przyciągające na bardzo bliskie drobiny cieczy. Zależnie od rodzaju cieczy i od rodzaju ciała stałego siły te są różne. Gdy siły wywierane przez drobiny ściany na bliskie drobiny cieczy są bardzo duże, również duża będzie ich wypadkowa F_1 (rys. 11.11). Siły wywierane na rozpatrywaną drobinę przez otaczające ją drobiny cieczy dają wypadkową F_2 znacznie mniejszą. W rezultacie wypadkowa sił F_1 i F_2 jest skierowana ku ścianie i tym więcej nachylona do poziomu, im bliżej ściany drobina się znajduje. Ponieważ powierzchnia cieczy w przypadku

równowagi musi być normalna do sił działających na cząstki cieczy na jej powierzchni, ciecz przy samej ścianie wznosi się do góry i staje się wklęsła. Kąt α między powierzchnią cieczy przy samej ścianie i powierzchnią ściany nazywamy kątem zetknięcia. Kąt ten w przypadku powierzchni wklęsłej jest ostry.

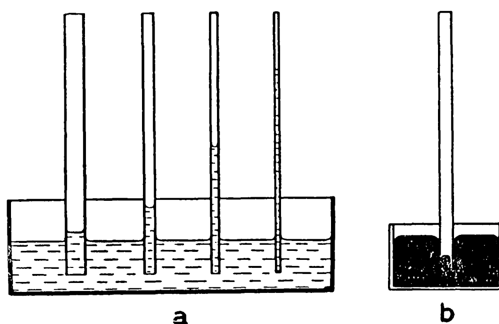
Gdy siły działające między drobinami cieczy są większe od sił działających między drobinami ciała stałego i cieczy, mamy przypadek przedstawionv na rys. 11.12. Wypadkowa F_1 jest mała, F_2 — znaczna. Wypadkowa F tych sił jest odchylona od ściany, powierzchnia cieczy przy ścianie staje się wypukła, kąt zetknięcia α — rozwarty. Gdy kąt zetknięcia jest ostry, mówimy, że ciecz zwilża ściany naczynia; gdy kąt ten równa się 0, mówimy, że ciecz całkowicie zwilża ściankę. Tak np. woda lub nafta zwilża całkowicie szkło o bardzo czystej, odtłuszczonej powierzchni. Gdy kąt ten jest rozwarty, mówimy, że ciecz nie zwilża danego ciała stałego. Rtęć np. nie zwilża szkła, zwilża jednak powierzchnię złota lub czystą powierzchnię cynku.



Rys. 11.12. Powierzchnia cieczy nie zwilżającej ścianki naczynia

Wartość kąta zetknięcia zależy w bardzo wysokim stopniu od czystości powierzchni ciała stałego. Wystarcza niesłychanie cienka warstewka tłuszczu, aby woda np. nie zwilżała szkła. Pochodzi to stąd, że siły międzydrobinowe działają tylko przy niezmiernie małych odległościach. Na drobiny cieczy zatem działają tylko drobiny ciała stałego leżące na powierzchni, drobiny leżące w głębi ciała nie mają żadnego wpływu na te zjawiska.

11.15. Włoskowatość. Działanie drobin ciał stałych na drobiny cieczy oraz napięcie powierzchniowe są przyczyną zjawisk z pozoru sprzecznych z prawami hydrostatyki, które zachodzą w naczyniach połączonych wtedy, gdy niektóre z nich są rurkami o bardzo małym otworze wewnętrznym, np. o średnicy wynoszącej parę dziesiątych milimetra. Weźmy kilka takich rurek dobrze odtłuszczonych o różnych średnicach i zanurzmy je w większym naczyniu z wodą (rys. 11.13). Woda wzniesie się w rurkach natychmiast, jak wskazuje rysunek 11.13a, i słupek wznoszący się ponad



Rys. 11.13.a. Wznoszenie się wody w rurkach włoskowatych b. Obniżenie powierzchni rtęci w rurce szklanej

powierzchnię swobodną cieczy w szerokim naczyniu jest tym wyższy, im węższa jest rurka.

To wzniesienie obserwujemy zawsze, gdy ciecz zwilża ścianki rurki. Gdy ciecz ich nie zwilża, np rtęć szkła, wówczas poziom cieczy w rurce jest niższy niż w szerokim naczyniu (rys. 11.13b). Zjawisko to łatwo wytłumaczyć biorąc pod uwagę, że powierzchnia cieczy zwilżającej jest wklęsła, a pod powierzchnią wklęsłą panuje ciśnienie o $\frac{2T}{R}$ mniejsze niż pod powierzchnią płaską. Jeżeli weźmiemy jako przykład ciecz całkowicie zwilżającą ścianki rurki, a więc o kącie zetknięcia 0, to powierzchnia swobodna cieczy w rurce będzie powierzchnią zbliżoną do kulistej. Uważajmy ją za kulistą zatoczoną promieniem R równym promieniowi otworu rurki. Ciecz musi się zatem wznieść w rurce na taką wysokość h nad powierzchnię cieczy w naczyniu szerokim, aby jej ciśnienie hydrostatyczne zrównoważyło tę różnicę ciśnień, czyli aby było spełnione równanie

$$p = \gamma h = \frac{2T}{R}, \tag{11.25}$$

skąd otrzymujemy

$$h = \frac{2T}{R\gamma}. \tag{11.26}$$

Wzniesienie h jest odwrotnie proporcjonalne do promienia otworu rurki R.

W przyrodzie zjawiska włoskowatości odgrywają wielką rolę. One to powodują wznoszenie się soków w roślinach, wsiąkanie wody w ziemię itp.

Zadania

11.1. Ile drobin gazu znajduje się w 1 cm^3 pod ciśnieniem 0,01 Tr przy temperaturze + 7°C?

Odpowiedź: Z wzoru (11.15) $n = \frac{p}{kT} = 3{,}45 \cdot 10^{14}$.

11.2. Ile drobin gazu znajduje się w 1 cm^3 pod ciśnieniem 1) 10^{-6} Tr; 2) 10^{-7} Tr przy temperaturze 17°C?

Odpowiedź: 1) $3{,}33 \cdot 10^{10}$; 2) $3{,}33 \cdot 10^{9} = 3\,330\,000\,000$.

11.3. Jaka jest średnia kwadratowa prędkość drobin tlenu i drobin helu przy temperaturze 132°C oraz drobin helu przy temperaturze 0,1°K?

Odpowiedź: 562 m/sec; 1589 m/sec; 25 m/sec.

11.4. Przy jakiej temperaturze średnia kwadratowa prędkość drobin azotu będzie $v = 266{,}7$ m/sec?

Odpowiedź: − 193°C.

11.5. Jaka będzie średnia droga swobodna drobin tlenu pod ciśnieniem 1 Tr, jeżeli pod ciśnieniem 760 Tr wynosi $1{,}06 \cdot 10^{-5}$ cm?

Odpowiedź: $8{,}056 \cdot 10^{-3}$ cm $\approx 80\mu$.

11.6. Pod jakim ciśnieniem średnia droga swobodna drobin azotu będzie 1) $\lambda = 1$ cm; 2) $\lambda = 1$ m, jeżeli pod ciśnieniem 760 Tr jest $0{,}9 \cdot 10^{-5}$ cm?

Odpowiedź: 1) $6{,}8 \cdot 10^{-3}$ Tr; 2) $6{,}8 \cdot 10^{-5}$ Tr.

11.7. Na jaką wysokość h wzniesie się woda w szklanej włoskowatej rurce o średnicy 1) 1 mm; 2) 0,1 mm?

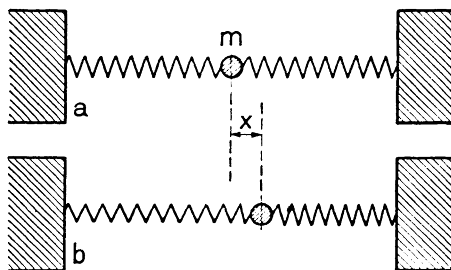
Odpowiedź: $h = 1{,}5$ cm; $h = 14{,}9$ cm.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Jak się tłumaczy ciśnienie wywierane przez gaz z punktu widzenia teorii kinetycznej? Jaki jest wzór na ciśnienie?
2. Jaki jest związek między średnią energią kinetyczną drobin i temperaturą?
3. Czemu się równa średnia energia kinetyczna drobiny?
4. Jaki jest związek między ciśnieniem i liczbą drobin w 1 cm^3
5. Jaka energia kinetyczna przypada na jeden stopień swobody?
6. Co nazywamy średnią drogą swobodną? Od czego zależy wielkość średniej drogi swobodnej?
7. Jak się tłumaczy rozprężliwość gazów? Zmiany temperatury przy zgęszczaniu lub rozprężaniu odwracalnym?
8. Jak się tłumaczy z punktu widzenia teorii kinetycznej zjawisko parowania? własności pary nasyconej?
9. Jak się tłumaczy zjawisko przewodzenia ciepła?
10. Na czym polega zjawisko dyfuzji? zjawisko osmozy?
11. Jaka jest zasada pompy dyfuzyjnej?
12. Jak się tłumaczy ruchy Browna?
13. Jaka jest przyczyna powstawania ciśnienia molekularnego wewnątrz cieczy?
14. Jak się określa napięcie powierzchniowe?
15. Jakie ciśnienie molekularne panuje pod powierzchniami krzywymi?
16. Kiedy ciecz zwilża, a kiedy nie zwilża ścian naczynia?
17. Na czym polegają zjawiska włoskowatości? Od czego zależy wzniesienie cieczy w rurce włoskowatej?

12. Drgania i fale

12.1. Ruch harmoniczny albo drganie harmoniczne. Ruch drgający, którym będziemy się tu zajmowali, jest obserwowany nadzwyczaj często w przyrodzie i dokładne poznanie szczegółów tego ruchu jest bardzo ważne dla zrozumienia wielu zjawisk. Przykładem takiego ruchu jest np. ruch przedstawiony na rys. 12.1. W środku spiralnie zwiniętej, napiętej sprężyny, której dwa końce są umocowane nieruchomo, umieszczona jest kulka o masie m. Położenie, w którym kulka znajduje się w spoczynku będziemy nazywać położeniem równowagi. Umieśćmy początek układu współrzędnych w punkcie, gdzie się znajduje wówczas środek kulki. Oś x poprowadźmy poziomo na prawo. Jeżeli przesuniemy kulkę np. w prawo, lewa sprężyna zostanie rozciągnięta, prawa — ściśnięta (rys. 12.1b). Powstanie siła usiłująca cofnąć z powrotem kulkę do pierwotnego położenia. Jeżeli kulkę puścimy, przesunie się ona szybko w lewo, lecz z powodu rozpędu przejdzie poza położenie równowagi. Lewa sprężyna zostanie ściśnięta, prawa — rozciągnięta. Powstanie siła działająca w prawo. Kulka wkrótce się zatrzyma, potem przesunie się w prawo, znowu z rozpędu przejdzie poza położenie równowagi itd. Zacznie drgać. Siła tu działająca jest proporcjonalna do w y c h y l e n i a x kulki z położenia równowagi i jest przeciwnie skierowana niż to wychylenie. Możemy zatem napisać



Rys. 12.1. Kulka umieszczona na przymocowanej na końcach sprężynie spiralnej, odchylona z położenia równowagi i puszczona porusza się ruchem harmonicznym

$$F = -kx.$$

Minus oznacza, że siła F i wychylenie x mają zwroty przeciwne. Ponieważ według II zasady Newtona

$$F = ma,$$

zatem możemy napisać

$$ma = -kx.$$

Dzieląc obie strony równania przez m i oznaczając iloraz $\frac{k}{m}$ przez ω^2 (wprowadzamy tu kwadrat ω tylko dla wygody przy dalszych rachunkach); możemy napisać

$$a = -\omega^2 x. \tag{12.1}$$

Równanie to wyraża zależność między przyśpieszeniem a i wychyleniem x. Przyśpieszenie w rozważanym ruchu jest proporcjonalne do wychylenia i ma znak przeciwny. Każdy ruch mający taką własność nazywamy ruchem harmonicznym. Ponieważ przyśpieszenie w ruchu prostoliniowym, jak wiemy (ust. 2.4), jest drugą pochodną drogi względem czasu $a = \frac{d^2s}{dt^2}$, zatem skoro drogę przebytą liczoną od punktu O oznaczyliśmy przez x, to możemy napisać $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Podstawiając to wyrażenie na a do równania (12.1) otrzymamy

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{albo} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \tag{12.2}$$

Jest to równanie różniczkowe ruchu harmonicznego. Nie trudno stwierdzić, że rozwiązaniem tego równania jest

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \tag{12.3}$$

gdzie A i φ są to pewne wielkości stałe, t — czas. Jeżeli bowiem obliczymy pierwszą i drugą pochodną x względem czasu, które dają jednocześnie wartość prędkości i przyśpieszenia w rozpatrywanym ruchu:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi), \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x,$$

to widzimy, że rzeczywiście a jest proporcjonalne do x i ma znak przeciwny.

Jak widać z wzoru (12.3), gdy $\sin(\omega t + \varphi)$ uzyskuje największą wartość równą 1, to x również uzyskuje największą wartość równą A. Tę wielkość A nazywamy obszernością albo *amplitudą* ruchu harmonicznego.

Argument funkcji sin, tzn. $(\omega t + \varphi)$, nazywamy *fazą* ruchu harmonicznego. Jak widać, faza jest funkcją liniową czasu. Ponieważ faza jest kątem, zatem musi być liczbą bezwymiarową (patrz 2.6). Stąd wynika, że wielkość ω musi mieć wymiar odwrotności czasu:

$$[\omega] = [t^{-1}].$$

Gdy $t = 0$, to $x = A \sin\varphi$. Jak widać więc, φ jest fazą ruchu w chwili $t = 0$. φ nazywamy *fazą początkową* ruchu. Wartość fazy początkowej zależy od tego, od jakiej chwili zaczęliśmy liczyć czas. Można tak oczywiście zawsze przesunąć chwilę początkową, aby φ równało się zeru. Wówczas otrzymujemy na ruch harmoniczny nieco prostszy wzór:

$$x = A \sin\omega t. \tag{12.4}$$

Wtedy, gdy $t = 0$, $x = 0$, to znaczy zaczynamy liczyć czas, gdy punkt drgający przechodzi przez położenie równowagi.

Przy obserwacji jednego ruchu zawsze możemy tak dobrać chwilę będącą początkiem liczenia czasu, aby $\varphi = 0$. Gdy jednak obserwujemy kilka jednoczesnych ruchów drgających, tylko dla jednego z nich możemy spowodować, aby $\varphi=0$.

Jeżeli mamy kilka ruchów harmonicznych, np. wyrażonych wzorami

$$x = A \sin \omega t, \qquad x_1 = A \sin (\omega t + \varphi), \qquad x_2 = A \sin (\omega t - \varphi),$$

to mówimy, że drugi ruch wyprzedza w fazie pierwszy o φ, trzeci zaś spóźnia się względem pierwszego w fazie o φ. Często również wyrażamy się, że między tymi ruchami istnieje różnica faz.

Mówimy, że dwa ruchy harmoniczne mają zgodne fazy, jeżeli są one stale równe, albo jeżeli różnią się o wielokrotność 2π, to znaczy o wielokrotność kąta 360°. Jeżeli natomiast ich fazy różnią się o nieparzystą wielokrotność liczby π, wtedy ich fazy nazywamy przeciwnymi. W ruchach o fazach przeciwnych wychylenia są stale równe, ale skierowane w przeciwne strony.

Gdy kąt $(\omega t + \varphi)$ wzrasta o 2π, tak sinus jak i cosinus wracają do początkowej wartości, a więc wychylenie, prędkość i przyśpieszenie uzyskują te same wartości co na początku. Po jakim czasie to nastąpi? Oznaczmy go przez T. W takim razie

$$\omega (t + T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi,$$

skąd otrzymujemy $\omega (t + T) = \omega t + 2\pi$ i dzieląc przez ω:

$$t + T = t + \frac{2\pi}{\omega},$$

skąd

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{12.5}$$

Zatem $T = \frac{2\pi}{\omega}$ jest przedziałem czasu, po którym ruch się powtarza. Nazywamy go okresem ruchu harmonicznego. Często wprowadza się do wzorów wielkość $f = \frac{1}{T}$ będącą odwrotnością okresu. Nazywamy ją częstotliwością albo częstością drgania. Wskazuje ona, ile okresów mieści się w jednostce czasu, a więc ile razy w jednostce czasu powtarza się ruch. Ponieważ $f = \frac{1}{T}$, zatem wymiar częstotliwości

$$[f] = [t^{-1}]$$

równa się wymiarowi odwrotności czasu.

Jeżeli okres $T = 1$ sec, to $f = 1$. Jednostkę częstotliwości nazwano *hercem*

(skrót Hz*). Przy okresie $T = \frac{1}{1000}$ sec częstotliwość $f = 1000$ herców albo 1 kiloherc (kHz), przy okresie $T = \frac{1}{1\,000\,000}$ sec częstotliwość $f = 1\,000\,000$ herców albo 1 megaherc (MHz). W niektórych krajach zamiast nazwy herc używają nazwy cykl albo cykl na sekundę, zamiast kiloherc mówią kilocykl albo kilocykl/sec, zamiast megaherc — megacykl lub megacykl/sec.

Z wzoru (12.5) otrzymujemy

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \tag{12.6}$$

Liczba ω wskazuje, ile razy drganie się odbywa w 2π sekundach. Wielkość, której miarą jest ω, nazywamy częstotliwością albo *częstością kołową* lub *kątową*.

Przyjęliśmy poprzednio oznaczenie

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \quad \text{skąd} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Możemy zatem stwierdzić, od jakich czynników będzie zależał okres drgania

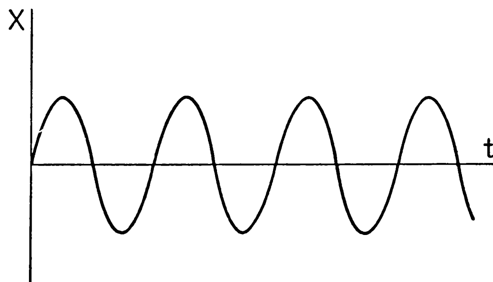
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Okres drgania jest proporcjonalny do pierwiastka z masy punktu drgającego, a odwrotnie proporcjonalny do $\sqrt{k}$. Ponieważ na siłę F mieliśmy poprzednio wzór

$$F = -kx,$$

stąd widać, że gdy $x = 1$, to $F = -k$. k zatem jest miarą siły wywieranej przez sprężyny przy jednostkowym wychyleniu punktu z położenia równowagi. Współczynnik ten zależy od sprężystości użytych sprężyn.

Jeżeli na osi odciętych odkładać będziemy czas, a na osi rzędnych wychylenie x, otrzymamy sinusoidę (rys. 12.2).



Rys. 12.2. Sinusoida przedstawia przebieg drgania harmonicznego w czasie

Można się przekonać, że również ruch wyrażony wzorem

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{12.7}$$

spełnia równanie (12.1), a więc jest ruchem harmonicznym. Obliczając pierwszą i drugą pochodną otrzymamy bowiem

* Od nazwiska Henryka Hertza odkrywcy fal elektromagnetycznych.

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi), \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x.$$

Jak łatwo wykazać, ruch (12.3) i (12.7) różnią się jedynie w fazie. Jak wiadomo z trygonometrii

$$\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

A więc

$$A\cos(\omega t + \varphi) = A\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ruch przedstawiony wzorem $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ wyprzedza w fazie ruch $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ o kąt $\frac{\pi}{2}$, czyli o kąt prosty.

Na zakończenie tego ustępu zestawiamy nazwy, które trzeba pamiętać, gdyż używane są często przy omawianiu rozmaitych drgań.

x — wychylenie,
A — amplituda,
ω — częstotliwość lub częstość kątowa,
$\omega t + \varphi$ — faza,
$T = \frac{2\pi}{\omega}$ — okres,
φ — faza początkowa,
$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ — częstotliwość lub częstość.

Ze względu na to, że jak widać z powyższych związków

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,$$

możemy wzory na wychylenie, prędkość i przyśpieszenie w ruchu harmonicznym napisać w następujący sposób:

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t \pm \varphi\right) = A\sin(2\pi f t \pm \varphi), \tag{12.8}$$

$$v = \frac{2\pi}{T}A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t \pm \varphi\right) = 2\pi f A\cos(2\pi f t \pm \varphi), \tag{12.9}$$

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2}A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t \pm \varphi\right) = -4\pi^2 f^2 A\sin(2\pi f t \pm \varphi). \tag{12.10}$$

12.2. Przykład ruchu harmonicznego. Weźmy kulkę metalową osadzoną na stalowym pręcie. Umocujemy pręt w imadle i odchylmy nieco kulkę od położenia równowagi (rys. 12.3). Gdy puścimy ją, kulka zacznie drgać około położenia

równowagi. Jeżeli wychylenie jest niewielkie, możemy uważać, że kulka porusza się wzdłuż odcinka linii prostej. Siła, jaka powstaje przy zgięciu pręta, jest proporcjonalna do wychylenia:

$$F \sim -x.$$



Rys. 12.3. Przykład ruchu harmonicznego: ruch kulki umocowanej na sprężystym pręcie

Możemy zatem napisać, że $F = -kx$ (minus, gdyż jest skierowana przeciwnie do x).

Napiszmy dla kulki równanie wyrażające II zasadę Newtona: $ma = F$. W tym przypadku będzie

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \tag{12.11}$$

(m — masa kulki).

Dzieląc obie strony równania przez m otrzymamy

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \tag{12.12}$$

Oznaczając $\frac{k}{m} = \omega^2$ otrzymamy

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \tag{12.13}$$

czyli równanie drgania harmonicznego. Ponieważ $\omega = 2\pi f$, zatem na częstość drgającej kulki otrzymamy wzór

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{12.14}$$

Częstość będzie wprost proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z wielkości siły rozwijającej się przy wychyleniu jednostkowym kulki ($x = 1$), a odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z masy kulki.

12. 3. Wahadło matematyczne. Wyobraźmy sobie punkt o masie m zawieszony na nierozciągliwej, pozbawionej masy nici o długości l. Wyprowadźmy punkt m z położenia równowagi odchylając nić o bardzo mały kąt α (rys. 12.4).

Ciężar $P = mg$ punktu m możemy rozłożyć na dwie składowe — w kierunku nici i w kierunku do niej prostopadłym. Pierwsza składowa zniesie się z oporem nici, druga zaś składowa wyniesie

$$F = mg \sin\alpha, \tag{12.15}$$

zatem dla bardzo małych kątów $\sin\alpha \approx \alpha$, zatem możemy napisać

$$F = mg\alpha = mg\frac{l}{l}, \tag{12.16}$$

jeżeli l oznacza długość łuku odpowiadającego kątowi α. Jeżeli kąt α jest bardzo mały, to łuk l możemy w przybliżeniu uważać za odcinek linii prostej. Będzie to wychylenie punktu m z położenia równowagi: oznaczymy to wychylenie literą x. Napiszmy dla tego przypadku równanie wyrażające II zasadę Newtona ($ma = F$)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\frac{x}{l}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x. \tag{12.17}$$

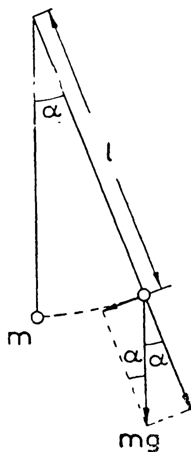
Piszemy z prawej strony tego równania znak minus, ponieważ siła ma tu kierunek przeciwny do wychylenia. Pisząc $\frac{g}{l} = \omega^2$ otrzymamy równanie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

a więc równanie ruchu harmonicznego.

Ponieważ $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$, możemy stąd obliczyć okres wahania się wahadła:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{12.18}$$



Rys. 12.4. Wahadło matematyczne

Jak ten wzór wykazuje, okres wahań wahadła matematycznego zależy

1) od długości wahadła, jest mianowicie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z l,

2) od wartości przyśpieszenia siły ciężkości g, które ma różną wartość w różnych punktach kuli ziemskiej.

Wyznaczając dokładnie okres wahań, można wyznaczyć przyśpieszenie w danym punkcie Ziemi. Stanowi to najdokładniejszą metodę mierzenia przyśpieszenia siły ciężkości. Jak widzimy ze wzoru (12.18), okres wahań wahadła nie zależy

1) od masy wahadła,

2) od wielkości amplitudy wahań (przy małych amplitudach).

Ta ostatnia własność nazywa się izochronizmem wahań. Własność tę mają wszystkie układy, których punkty drgają harmonicznie.

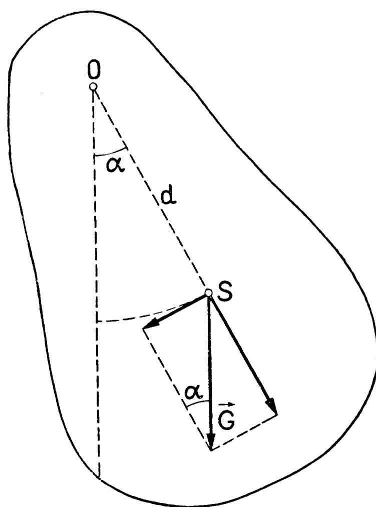
Rozwiązując równanie (12.17) otrzymamy na wychylenie wahadła wzór

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right). \tag{12.19}$$

Zgodnie z tym wzorem punkt m będzie się stale wahać, jego wychylenie będzie się zmieniać od $-A$ do $+A$ bez końca. Takie drgania nazywamy niezanikającymi. W rzeczywistości wychylenia wahadła czy też kulki umieszczonej na sprężynie, jak w poprzednim przykładzie, zmniejszają się stopniowo wskutek istnienia

nieuniknionych oporów ruchu. Ruch wahadła jest tłumiony np. przez opór powietrza i przez tarcie w punkcie zawieszenia. Aby istotnie drgania były niezanikające, trzeba takiemu układowi stale dostarczać energii w nieznacznych zresztą ilościach, która kompensuje straty. Tak jest np. w zegarach wahadłowych, w których straty te są pokrywane przez dopływ energii od nakręconej sprężyny lub czerpane z energii potencjalnej podniesionej wagi. Dzięki temu wahadło zegara wykonywa drgania niezanikające.

12.4. Wahadło fizyczne. W rzeczywistości wahadła matematycznego zrobić nie możemy. Nie możemy punktu o masie m zawiesić na nici pozbawionej masy. Wszystkie wahadła, które możemy zrobić są wahadłami fizycznymi, tj. złożonymi. Wahadłem fizycznym nazywamy bryłę dowolnego kształtu zawieszoną na osi O (rys. 12.5). Niech I będzie momentem bezwładności tej bryły względem osi O, a środek ciężkości niech się znajduje w punkcie S. Ciężar G bryły przyłożony do środka ciężkości rozkładamy na składową styczną i normalną do kierunku możliwego ruchu punktu S (okręgu o promieniu d, gdzie d jest odległością środka ciężkości S od osi O). Siła styczna wywołuje ruch obrotowy bryły. Wartość tej składowej jest $G \sin \alpha$. Momentem tej siły względem osi O jest $Gd \sin \alpha$. Przy ruchu obrotowym ciała (4.11) mieliśmy związek, że iloczyn momentu bezwładności przez przyśpieszenie kątowe równa się momentowi siły



Rys. 12.5. Wahadło fizyczne

$$I\varepsilon = M = Gd \sin \alpha. \tag{12.20}$$

Kładąc tak samo jak poprzednio dla małych kątów α: $\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{x}{d}$ * oraz przyśpieszenie kątowe $\varepsilon = \frac{a}{d}$ (przyśpieszeniu liniowemu podzielonemu przez promień okręgu) otrzymamy

$$I \frac{a}{d} = -Gd \frac{x}{d} = -Gx = -mgx,$$

skąd

$$a = -\frac{Gd}{I} x \quad \text{albo} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mgd}{I} x. \tag{12.21}$$

* Zamiast łuku bierzemy odciętą x, co jest dopuszczalne przy małych kątach α.

Jeżeli porównamy to ostatnie równanie z równaniem (12.17), to widzimy, że współczynnik $\frac{g}{l}$ w nim jest zastąpiony przez $\frac{mg}{I}\cdot$ Wahadło fizyczne zatem może być zastąpione przez wahadło matematyczne o długości l określonej wzorem

$$\frac{g}{l} = \frac{mgd}{I},$$

skąd otrzymamy

$$l = \frac{I}{md};$$

l nazywamy długością zredukowaną wahadła fizycznego względem osi obrotu. Okres wahania się tego wahadła będzie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}. \tag{12.22}$$

Iloczyn $mgd \sin\alpha = Gd\sin\alpha \approx Gd\alpha$ jest momentem ciężaru wahadła względem osi obrotu. Moment ten jest proporcjonalny do $\sin\alpha$, przy małych kątach w przybliżeniu do kąta α. Współczynnikiem proporcjonalności jest $Gd = mgd$. Nazywamy go momentem kierującym wahadła fizycznego. Oznaczając

$$Gd = mgd = D \tag{12.23}$$

możemy napisać

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \tag{12.24}$$

Okres wahadła fizycznego jest proporcjonalny do pierwiastka z momentu bezwładności, odwrotnie proporcjonalny zaś do pierwiastka z momentu kierującego.

12.5. Drgania tłumione (zanikające). W rzeczywistości, jak powiedzieliśmy, jeżeli nie doprowadzamy do układu drgającego energii, drgania stopniowo zanikają, ich amplituda maleje i wreszcie układ przechodzi w stan spoczynku. Spróbujmy zdać sobie sprawę, jaki będzie przebieg drgań zanikających. W tym celu ułóżmy odpowiednie równanie opierając się na równaniu wyrażającym II zasadę Newtona:

$$ma = \sum F. \tag{12.25}$$

W przypadku drgań, które często obserwujemy w przyrodzie, choćby w przytoczonych poprzednio przykładach (drgania kulki umocowanej na pręcie sprężystym lub wahadła), prócz siły proporcjonalnej do wychylenia działającej ku środkowi ruchu działa jeszcze siła hamująca ruch (opór środowiska, tarcie wewnętrzne itp.). Możemy założyć bez popełniania dużego błędu, że siła hamująca jest proporcjonalna do prędkości ruchu drgającego i jest skierowana zawsze przeciwnie do chwilowej prędkości punktu. Zatem na punkt wychylony o x

z położenia równowagi będą działały dwie siły, jedna proporcjonalna do wychylenia, druga — do prędkości. Oznaczając współczynniki proporcjonalności literami k_1 i k_2 możemy napisać

$$F_1 = -k_1 x, \qquad F_2 = -k_2 \frac{dx}{dt}.$$

Równanie (12.25) możemy zatem napisać w postaci

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1 x - k_2 \frac{dx}{dt}. \tag{12.26}$$

Dzieląc wszystkie wyrazy równania przez m i przenosząc na lewą stronę otrzymamy

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_2}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k_1}{m} x = 0. \tag{12.27}$$

Wprowadzając oznaczenia $\frac{k_2}{m} = a$ oraz $\frac{k_1}{m} = \omega_0^2$ otrzymamy

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.} \tag{12.28}$$

Jest to równanie różniczkowe drgań tłumionych albo zanikających. Różni się ono od równania drgań niezanikających (12.15) tylko wyrazem $a \frac{dx}{dt}$. Teoria równań różniczkowych uczy, jak znaleźć rozwiązanie tego równania. Jest ono następujące:

$$x = A e^{-\frac{at}{2}} \sin(\omega t + \varphi), \tag{12.29}$$

gdzie A jest stałą, od której zależy pierwsze, największe wychylenie, a e = 2,718... jest zasadą logarytmów naturalnych. Aby się przekonać, że istotnie wyrażenie (12.29) jest rozwiązaniem równania (12.28), obliczmy pierwszą i drugą pochodn fukcji x względem czasu i podstawmy do powyższego równania

$$\frac{dx}{dt} = -A \frac{a}{2} e^{-\frac{a}{2}t} \sin(\omega t + \varphi) + A \omega e^{-\frac{a}{2}t} \cos(\omega t + \varphi), \tag{12.30}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A \left(\frac{a^2}{4} - \omega^2\right) e^{-\frac{a}{2}t} \sin(\omega t + \varphi) - A \omega a e^{-\frac{a}{2}t} \cos(\omega t + \varphi). \tag{12.31}$$

Podstawiając do równania (12.28) otrzymamy:

$$A \left(\frac{a^2}{4} - \omega^2 - \frac{a^2}{2} + \omega_0^2\right) e^{-\frac{a}{2}t} \sin(\omega t + \varphi) +$$

$$+ A(-\omega a + \omega a) e^{-\frac{a}{2}} \cos(\omega t + \varphi) = 0. \tag{12.32}$$

Drugi wyraz, jak od razu widać, równa się zeru, zaś pierwszy będzie się równać 0, jeżeli wyrażenie w nawiasie będzie równe zeru, czyli

$$-\omega^2 - \frac{a^2}{4} + \omega_0^2 = 0, \quad \text{skąd} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{a^2}{4}}. \tag{12.33}$$

Oznaczając $Ae^{-\frac{a}{2}t} = B$ możemy napisać

$$x = B \sin(\omega t + \varphi). \tag{12.34}$$

Otrzymujemy więc wzór identyczny do wzoru na wychylenie w drganiu niezanikającym. Różnica polega tylko na tym, że amplituda B nie jest wielkością stałą, tylko maleje eksponencjalnie.

Rysunek 12.6 wykazuje różnicę między drganiem niezanikającym a drganiem tłumionym. Częstość drgań, tzw. drgań własnych, jak wykazuje wzór

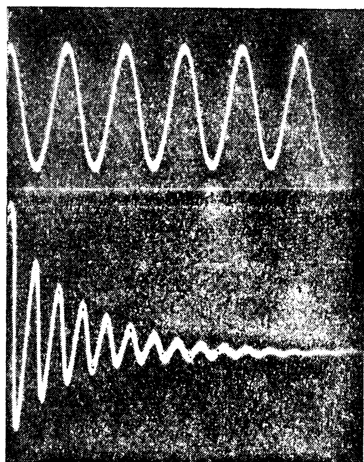
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2 - \frac{a^2}{4}}, \tag{12.35}$$

jest zależna od współczynnika a określającego wielkość tłumienia. Gdy ten współczynnik jest bardzo mały, wówczas $\frac{a^2}{4}$ możemy zaniedbać wobec ω_0^2, wtedy f =

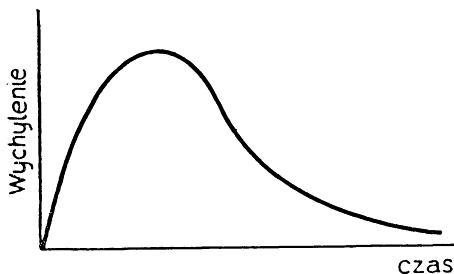
$$= \frac{\omega_0}{2\pi} = f_0.$$

Szybkość zanikania drgań zależy od wielkości tego współczynnika. Gdy opór tłumiący jest tak duży, że

$$\frac{a^2}{4} \geqslant \omega_0^2,$$



Rys. 12.6. Porównanie przebiegu drgań niezanikających i drgań tłumionych



Rys. 12.7. Ruch aperiodyczny

wówczas mamy przypadek tak zwanego ruchu aperiodycznego. Wtedy rozwiązanie równania (12.28) ma inną postać, której nie będziemy tu rozpatrywać. Przebieg ruchu w tym przypadku daje wykres na rys. 12.7.

12. 6. Drgania wymuszone, rezonans. Bardzo ważnym przypadkiem jest przypadek ruchu punktu, który może drgać ruchem harmonicznym, gdy nań działa periodyczna siła zewnętrzna:

$$F = F_0 \sin \omega_1 t. \tag{12.36}$$

Dodając działanie tej siły do sił działających w przypadku poprzednim i pisząc II zasadę Newtona dla tego przypadku otrzymamy

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k_2 \frac{dx}{dt} - k_1 x + F_0 \sin \omega_1 t. \tag{12.37}$$

Dzieląc całe równanie przez m i oznaczając $\frac{k_2}{m} = a$, $\frac{k_1}{m} = \omega_0^2$ oraz $\frac{F_0}{m} = A$ otrzymamy równanie drgania wymuszonego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A \sin \omega_1 t. \tag{12.38}$$

Nie trudno się przekonać, że rozwiązaniem tego równania (niezupełnie ogólnym, ale ważnym dla tzw. stanu ustalonego) będzie

$$x = C \sin (\omega_1 t - \varphi). \tag{12.39}$$

Obliczmy pierwszą i drugą pochodną tego wyrażenia:

$$\frac{dx}{dt} = \omega_1 C \cos (\omega_1 t - \varphi), \tag{12.40}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_1^2 C \sin (\omega_1 t - \varphi). \tag{12.41}$$

Podstawiając te wartości do równania (12.38) i dzieląc całe otrzymane równanie przez C otrzymamy

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin (\omega_1 t - \varphi) + a\omega_1 \cos (\omega_1 t - \varphi) = \frac{A}{C} \sin \omega_1 t. \tag{12.42}$$

Stosując znane wzory trygonometryczne na sin i cos różnicy dwóch kątów możemy napisać

$$\sin (\omega_1 t - \varphi) = \sin \omega_1 t \cos \varphi - \cos \omega_1 t \sin \varphi, \tag{12.43}$$

$$\cos (\omega_1 t - \varphi) = \cos \omega_1 t \cos \varphi + \sin \omega_1 t \sin \varphi. \tag{12.44}$$

Wstawiając te wartości do równania (12.42) po łatwych przeróbkach otrzymamy

$$[(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cos \varphi + a\omega_1 \sin \varphi] \sin \omega_1 t +$$

$$-[(\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin \varphi - a\omega_1 \cos \varphi] \cos \omega_1 t = \frac{A}{C} \sin \omega_1 t. \tag{12.45}$$

Równanie to będzie spełnione tożsamościowo, gdy współczynniki przy $\sin \omega_1 t$ oraz $\cos \omega_1 t$ będą równe zeru. Przyrównując je do zera otrzymamy równania:

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cos \varphi + a\omega_1 \sin \varphi = \frac{A}{C}, \qquad (12.46)$$

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2) \sin \varphi - a\omega_1 \cos \varphi = 0.$$

Podnosząc oba równania (12.46) do kwadratu i dodając otrzymamy

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + a^2\omega_1^2 = \frac{A^2}{C^2}. \qquad (12.47)$$

Stąd możemy obliczyć stałą C:

$$C = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + a^2\omega_1^2}}. \qquad (12.48)$$

Dzieląc zaś drugie równanie układu (12.46) przez $\cos \varphi$ otrzymamy

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2) \operatorname{tg} \varphi - a\omega_1 = 0, \qquad (12.49)$$

skąd

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2},$$

czyli

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{a\omega_1}{\omega_0^2 - \omega_1^2}. \qquad (12.50)$$

W ten sposób obliczyliśmy wartości obu stałych we wzorze

$$x = C \sin (\omega_1 t - \varphi). \qquad (12.51)$$

Ta wartość na x spełnia równanie (12.38) pod warunkiem, że C i φ mają wartości (12.48) i (12.50).

Wzór (12.51) wykazuje, że punkt, który może drgać ruchem harmonicznym pod wpływem siły zewnętrznej $F = F_0 \sin \omega_1 t$, która zmienia się z częstością $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$, drga z częstością równą częstości tej siły (albo: jego okres drgania równa się okresowi drgania siły wymuszającej drganie). Są to tak zwane drgania wymuszone. Są to drgania niezanikające trwające tak długo, jak długo działa siła periodycznie zmienna. Punkt przytrzymywany w pewnym położeniu równowagi siłami np. sprężystymi, pod wpływem siły periodycznie zmiennej będzie drgał ruchem harmonicznym niezanikającym. Częstość tego drgania, jak pokazuje wzór (12.51), będzie się równać częstości siły wymuszającej. Lecz amplituda C tego drgania, jak widać ze wzoru (12.48), zależy głównie od wartości wyrazu $(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2$ pod pierwiastkiem, a więc od różnicy między częstością kątową ω_0 i ω_1; ω_0 jest częstością kątową własną punktu drgającego, częstością, jaką by on posiadał, gdyby wykonywał drgania swobodne i gdyby nie było tłumienia. W przypadku gdy $\omega_0 = \omega_1$, amplituda drgania wymuszonego będzie miała największą wartość. Mówimy wtedy, że układ drgający jest w re-

zonansie z siłą. Amplituda drgania wymuszonego przewyższa w tym przypadku wielokrotnie (często setki i tysiące razy) amplitudę drgania, gdy rezonansu nie ma.

Jak pokazuje wzór (12.51), między siłą a wychyleniem punktu drgającego istnieje różnica faz. Wychylenie jest mianowicie spóźnione w fazie względem siły o φ. To spóźnienie również zależy od różnicy $\omega_0^2 - \omega_1^2$. W przypadku rezonansu $\omega_0^2 - \omega_1^2 = 0$, kąt $\varphi = 90°$. Wychylenie jest spóźnione względem siły o 90°, to znaczy siła działająca osiąga maksymalną wielkość wtedy, gdy punkt ma wychylenie 0, to jest przechodzi przez położenie równowagi. Łatwo stwierdzić natomiast, że siła jest zgodna w fazie z prędkością punktu. Ze zjawiska rezonansu często robimy użytek. Chcąc rozkołysać np. ciężką huśtawkę, popychamy ją periodycznie z częstością równą częstości jej drgań własnych. Ze zjawiskami rezonansu spotykamy się później w akustyce i w elektryczności.

12.7. Energia drgania. Gdy punkt przytrzymywany w położeniu równowagi siłami sprężystymi zaczyna drgać, jego energia składa się z energii potencjalnej i kinetycznej. Energia potencjalna występuje dzięki istnieniu sił wewnętrznych, energia kinetyczna — ponieważ punkt porusza się z pewną prędkością. Aby obliczyć całkowitą energię układu, należałoby obliczyć energię potencjalną, jaką punkt ma w danej chwili, następnie energię kinetyczną i dodać je. Ponieważ siła działająca na punkt zmienia się podczas wychylania, trzeba by w tym przypadku użyć rachunku całkowego. Uprościmy sobie to zagadnienie korzystając z faktu, że są takie chwile, gdy układ ma tylko energię kinetyczną, to znaczy jego całkowita energia równa się energii kinetycznej. Zachodzi to w chwilach, gdy punkt drgający przechodzi przez położenie równowagi, a więc jego wychylenie równa się zeru. Ze wzoru na wychylenie

$$y = A \sin \omega t \tag{12.52}$$

widać, że to następuje w chwilach, gdy $\sin \omega t = 0$, a więc gdy

$$\omega t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

Prędkość ruchu drgającego

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos \omega t. \tag{12.53}$$

W wyżej wymienionych chwilach $v = \pm A\omega$, ponieważ $\cos n\pi = \pm 1$.

Energia kinetyczna

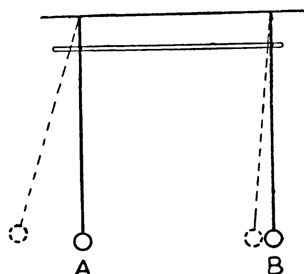
$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}. \tag{12.54}$$

Ponieważ całkowita energia w wymienionych chwilach równa się energii kinetycznej, możemy więc napisać

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{4\pi^2 mA^2 f^2}{2}. \tag{12.55}$$

Z tego wzoru widać, że energia punktu drgającego jest proporcjonalna do masy tego punktu, do kwadratu amplitudy i kwadratu częstości.

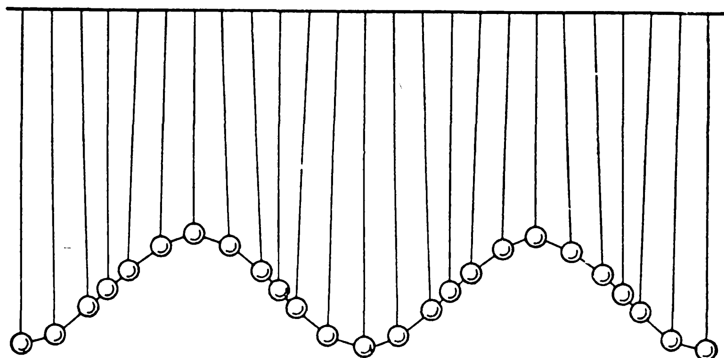
12.8. Wahadła sprzężone. Jeżeli dwa wahadła *A* i *B* połączymy w pobliżu ich punktów zawieszenia prętem sztywnym, np. drewnianym (rys. 12.8), i wprawimy jedno z nich, np. *A*, w ruch, to zobaczymy, że po pewnym czasie zaczyna się wahać drugie wahadło *B* coraz silniej, wahadło zaś *A* stopniowo będzie się wahać coraz słabiej. Po pewnym czasie wahadło *B* osiągnie największą amplitudę, wahadło *A* zaś przestanie się wahać zupełnie. Energia ruchu drgającego przejdzie całkowicie do wahadła *B*. Następnie całe zjawisko się odwróci: wahadło *B* będzie się wahać coraz słabiej, *A* coraz silniej. To przenoszenie się energii od jednego wahadła do drugiego może się powtórzyć wielokrotnie, dopóki wahania nie zanikną wskutek nieuniknionych oporów ruchu. Wahadła tak połączone nazywamy wahadłami sprzężonymi.



Rys. 12.8. Wahadła sprzężone

12.9. Fala harmoniczna postępowa, poprzeczna. Doświadczenie z wahadłami sprzężonymi wskazuje, że energia przenosi się od jednego wahadła do drugiego. Gdy mamy szereg jednakowych cząstek sprzężonych, umieszczonych np. wzdłuż prostej, to gdy pierwszą będziemy pobudzać do drgań harmonicznych, następne jedna po drugiej zaczną również drgać. Mówimy, że po prostej biegnie fala.

Wyobraźmy sobie układ kulek np. żelaznych zawieszonych na nitkach i połączonych tasiemką gumową (rys. 12.9). Gdy pierwszą kulkę wprawimy w ruch



Rys. 12.9. Fala poprzeczna biegnąca wzdłuż wahadeł połączonych

wahadłowy np. w prawo, druga kulka pociągnięta przez taśmę zacznie się też poruszać na prawo (z pewnym opóźnieniem), druga kulka pociągnie trzecią, trzecia — czwartą itd. Wychylenie przenosi się coraz dalej. Mówimy, że wzdłuż układu kulek biegnie fala. Jeżeli pierwszą kulkę wprawimy w ruch harmoniczny

kolejno następne kulki zostaną również wprawione w ruch harmoniczny. Gdy więc pierwsza kulka będzie drgać ruchem, którego równanie jest

$$y_0 = A \sin \omega t, \tag{12.56}$$

to równanie ruchu następnej kulki będzie

$$y_1 = A \sin (\omega t - \varphi), \tag{12.57}$$

gdyż ruch jej będzie opóźniony nieco w fazie względem ruchu pierwszej kulki.

Równanie ruchu trzeciej kulki będzie $y_2 = A \sin (\omega t - 2\varphi)$, czwartej $y_3 = A \sin (\omega t - 3\varphi)$. W ogóle równanie ruchu dla $(n + 1)$-ej kulki będzie

$$y = A \sin (\omega t - n\varphi). \tag{12.58}$$

Gdybyśmy wzięli pod uwagę ruch ciągłego układu punktów materialnych np. wzdłuż sznurka napiętego albo linki gumowej, której początkowy punkt wprawimy w drganie harmoniczne, to równanie ruchu dla punktu o odciętej x będzie

$$y = A \sin (\omega t - kx), \tag{12.59}$$

gdyż spóźnienie w fazie będzie proporcjonalne do odciętej x tego punktu.

Odległość między punktami, których różnica faz stale równa się 2π, nazywamy długością fali. Wielkość tę oznaczamy zawsze literą λ. Jeżeli więc weźmiemy pod uwagę dwa pukty o odciętych x_1 i x_2 i równania ich drgań

$$y_1 = A \sin (\omega t - kx_1), \qquad y_2 = A \sin (\omega t - kx_2),$$

to gdy ich fazy dla tej samej chwili t będą się różnić o kąt 2π, odległość między nimi będzie długością fali. Różnica ich faz jest

$$(\omega t - kx_1) - (\omega t - kx_2) = 2\pi$$

(dalszy punkt będzie spóźniony w fazie względem pierwszego). Stąd

$$k (x_2 - x_1) = 2\pi.$$

Odległość między punktami $x_2 - x_1 = \lambda$, zatem

$$k\lambda = 2\pi,$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{12.60}$$

Równanie ruchu fali możemy więc napisać $\left(\text{zważając, że } \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$ w postaci następującej:

$$\boxed{y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).} \tag{12.61}$$

Argument funkcji sin jest tu fazą drgania i jest, jak widać, zależny od dwóch zmiennych: x i t. W miarę, jak czas t rośnie, rośnie faza drgania danego punktu.

Lecz im dalsze punkty, tym później uzyskają daną fazę. Moglibyśmy postawić pytanie, z jaką prędkością musiałby się posuwać wzdłuż układu obserwator, aby widzieć stale fazę tej samej wartości, to znaczy aby dla niego

$$\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} = \text{const.} \tag{12.62}$$

Wyznaczając z tego równania

$$x = \frac{\lambda}{T} t - \text{const} \tag{12.63}$$

widzimy, że jego odległość od początku układu musi być liniową funkcją czasu.

Jego prędkość, równą prędkości przesuwania się fazy v, możemy łatwo obliczyć z tego równania:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{T}. \tag{12.64}$$

Tę prędkość przemieszczania się fazy nazywają często prędkością fali. Z tego wzoru otrzymujemy często używany wzór na długość fali

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}. \tag{12.65}$$

W przypadku, gdy fala porusza się w kierunku ujemnym osi x, im mniejsze będzie x, tym większe spóźnienie w fazie. W tym przypadku równanie fali będzie następujące:

$$y = A \sin(\omega t + kx) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right). \tag{12.66}$$

Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku obserwator, aby obserwować stale tę samą fazę, tj. aby dla niego

$$\omega t + kx = \text{const}, \tag{12.67}$$

musiałby się poruszać tak, aby

$$x = -\frac{\omega}{k} t + \text{const} = \text{const} - \frac{\omega}{k} t, \tag{12.68}$$

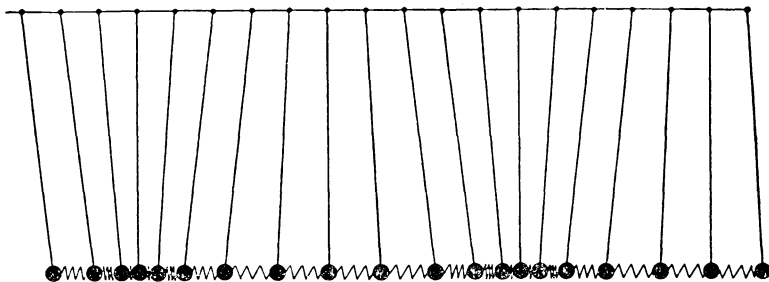
to znaczy w miarę wzrastania czasu x musi maleć.

Równania (12.61) i (12.66) często piszą jeszcze w innej postaci. Korzystając ze związku $\lambda = vT$, skąd $T = \frac{\lambda}{v}$, możemy napisać

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin 2\pi \left(\frac{vt}{\lambda} \mp \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (vt \mp x) =$$
$$= A \sin k (vt \mp x), \tag{12.69}$$

gdzie minus odnosi się do fali poruszającej się w kierunku dodatnim, a plus — do fali poruszającej się w kierunku ujemnym osi x.

12.10. Fale podłużne. Gdy cząstki drgają tak, jak w poprzednio opisanym przypadku, w kierunku prostopadłym do kierunku przemieszczania się fali, falę nazywamy poprzeczną, gdy zaś cząstki drgają wzdłuż odcinków leżących na linii, wzdłuż której biegnie fala, to taką falę nazywamy podłużną. Wyobraźmy sobie szereg zawieszonych na nitkach kulek, połączonych ze sobą sprężynami (rys. 12.10). Gdy pierwszą kulkę poruszymy w kierunku ku drugiej, druga kulka też się poruszy, spowoduje ruch trzeciej kulki, ta — czwartej itd. Gdy pierwszą kulkę będziemy poruszać ruchem harmonicznym, następne kulki również zaczną



Rys. 12.10. Fala podłużna

drgać ruchem harmonicznym. Ponieważ ruch każdej kulki następnej jest spóźniony względem poprzedniej, wytworzą się zagęszczenia kulek i rozrzedzenia przemieszczające się wzdłuż układu kulek. Oznaczając przez ξ wychylenie punktu z położenia równowagi, otrzymamy równanie fali takiego samego kształtu jak poprzednio:

$$\xi = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin k\,(vt \mp x). \qquad (12.70)$$

12.11. Równanie różniczkowe fali. Zróżniczkujemy którekolwiek z poprzednio napisanych równań fali, np.

$$y = A \sin k\,(vt - x), \qquad (12.71)$$

dwa razy względem t i dwa razy względem x. Otrzymamy wtedy

$$\frac{\partial y}{\partial t} = kvA \cos k\,(vt - x), \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = -kA \cos k\,(vt - x), \qquad (12.72)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2v^2 A \sin k\,(vt - x), \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A \sin k\,(vt - x). \qquad (12.73)$$

Porównując równanie (12.73) możemy napisać

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.} \qquad (12.74)$$

Jest to równanie różniczkowe fali płaskiej. Jak można wykazać, jest ono o wiele ogólniejsze od równania (12.59). Równanie to spełniają nie tylko fale biegnące w dodatnim i w ujemnym kierunku osi x, fale poprzeczne i podłużne. Można wykazać, że każdy ruch podlegający temu równaniu jest ruchem falowym. Ruch falowy dany przez równanie

$$y = A \sin k(vt \mp x) \quad \text{lub} \quad \xi = A \sin k(vt \mp x) \tag{12.75}$$

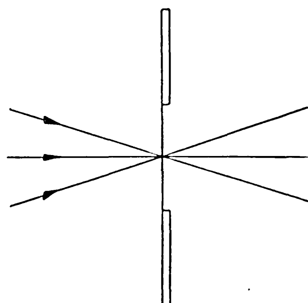
jest pewnym szczególnym ruchem falowym. Jest to fala harmoniczna płaska. Wszystkie cząstki środowiska drgają w niej ruchem harmonicznym. Można wykazać, że równanie (12.74) przedstawia nie tylko falę harmoniczną, lecz rozchodzenie się jakiegokolwiek zaburzenia w środowisku sprężystym.

12.12. Fale kołowe, kuliste i płaskie. Jak zobaczymy później, dźwięk, promieniowanie, światło — polegają na rozchodzeniu się ruchu falowego.

Gdy zmusimy cząstkę A znajdującą się na powierzchni jednorodnej cieczy do drgania harmonicznego, to i sąsiednie cząstki zaczynają drgać i po powierzchni cieczy od cząstki A biegnie fala w postaci kół, których środkiem jest cząstka A. Punkty, które posiadają jednakowe fazy drgania, leżą na obwodzie koła zatoczonego dookoła cząstki A. Okręg tego koła nazywamy linią jednakowej fazy drgania albo wprost linią fazową. Linie fazowe będą w tym przypadku okręgami kół. Jeżeli wewnątrz gazu lub cieczy w pewnym punkcie będziemy wywoływać periodyczne zgęszczenie i rozrzedzenie, to te zmiany gęstości będą się w postaci fal kulistych rozchodzić na wszystkie strony. Jeżeli w pewnej chwili poprowadzimy powierzchnię przez wszystkie punkty o takiej samej fazie, to będzie ona powierzchnią kulistą. Falę taką nazywamy kulistą, a powierzchnię kuli przechodzącą przez punkty o jednakowej fazie drgania — powierzchnią fazową. W bardzo dużej odległości od środka kuli powierzchnię kulistą można z dużym przybliżeniem uważać za płaszczyznę. Jeżeli powierzchnie fazowe są płaszczyznami, to falę nazywamy falą płaską. Możemy wywołać falę płaską np. pobudzając powierzchnię wody do drgania za pomocą długiej deski lub belki. Jak zobaczymy później, w optyce istnieją przyrządy, które pozwalają fale świetlne kuliste zamieniać na fale płaskie lub też fale mające innego kształtu powierzchnie fazowe.

12.13. Superpozycja i interferencja fal. Dwie różne fale rozchodzące się w pewnym środowisku spotykając się nie przeszkadzają sobie wzajemnie. Każda fala rozchodzi się tak, jakby drugiej nie było. Sprawdzamy właściwie ten fakt codziennie nie zdając sobie nawet z tego sprawy. Dźwięki, które są falami zgęszczeń i rozrzedzeń w powietrzu, idące od różnych instrumentów w sali koncertowej, słyszą rozmaici ludzie w różnych miejscach sali. Fale te krzyżują się wielokrotnie, a mimo to w różnych punktach sali słyszy się niezmienione dźwięki różnych instrumentów. Światło również polega na rozchodzeniu się fal, na które nasze oczy są wrażliwe. Wiadomą jest rzeczą, że przez to samo okno kilka osób może jednocześnie oglądać rozmaite zewnętrzne przedmioty. Promie-

nie światła idące od różnych przedmiotów krzyżują się, ale wzajemnie na siebie nie wpływają (rys. 12.11). Jeżeli w jakimś środowisku, np. na wodzie, rozchodzą się fale wychodzące z dwóch lub więcej punktów, to po dojściu do tego samego punktu powierzchni wody wywołują jego wychylenie, które będzie sumą algebraiczną wychyleń wywoływanych przez poszczególne fale. Fale będą niejako przechodzić jedna przez drugą, po czym po dojściu do gładkiej powierzchni będą dalej biec niezmienione. To zjawisko nakładania się fal nazywamy superpozycją fal. Jeżeli wychylenie punktu wywoływane przez jedną falę jest



Rys. 12.11. Promienie światła krzyżują się nie wpływając zupełnie jedne na drugie

$$y_1 = A_1 \sin \omega_1 t, \tag{12.76}$$

a przez drugą

$$y_2 = A_2 \sin (\omega_2 t - \varphi), \tag{12.77}$$

to wychylenie wypadkowe będzie

$$y = y_1 + y_2 = \\ = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin (\omega_2 t - \varphi). \tag{12.78}$$

Punkt będzie wykonywał drgania złożone. Obraz takiego drgania otrzymamy rysując dwie odpowiednie sinusoidy i dodając rzędne w poszczególnych miejscach (rys. 12.12). Ruch wypadkowy, jakim punkt się porusza, możemy w tym przypadku obserwować przesuwając wzdłuż otrzymanej krzywej kartkę papieru z wyciętą w niej poprzeczną wąską szczeliną. Podobnie możemy dodawać trzy i więcej wychyleń.

Specjalnie ważnym wypadkiem jest ten, gdy drgania wywoływane przez obie fale mają takie same amplitudy i częstości, a różnią się tylko fazami. Przypuśćmy, że jedna fala dochodząc do pewnej cząstki pobudza ją do drgania harmonicznego

$$y_1 = A \sin (\omega t - \varphi_1), \tag{12.79}$$

druga zaś

$$y_2 = A \sin (\omega t - \varphi_2). \tag{12.80}$$

Wychylenie wypadkowe cząstki będzie sumą ich obu:

$$y = y_1 + y_2 = A [\sin (\omega t - \varphi_1) + \sin (\omega t - \varphi_2)] =$$

$$= 2A \sin \frac{\omega t - \varphi_1 + \omega t - \varphi_2}{2} \cos \frac{\omega t - \varphi_1 - \omega t + \varphi_2}{2} =$$

$$= 2A \sin \left(\omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} =$$

$$= 2A \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \sin \left(\omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \tag{12.81}$$

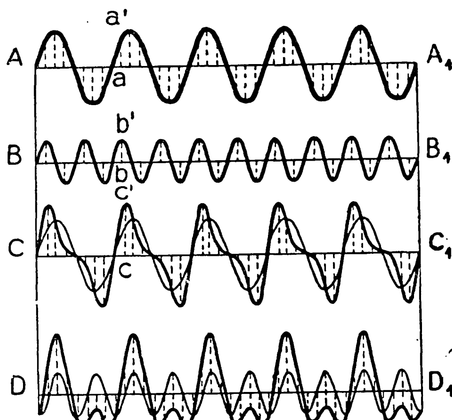
Oznaczając

$$2A\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=B \quad \text{oraz} \quad \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=\varphi \tag{12.82}$$

otrzymamy

$$y=B\sin(\omega t-\varphi), \tag{12.83}$$

a więc drganie harmoniczne o tej samej częstości. Lecz amplituda tego drgania B, jak pokazuje pierwszy z wzorów (12.82), zależy od różnicy faz $(\varphi_2-\varphi_1)$. W szczególnych wypadkach, gdy $\varphi_2=\varphi_1$ to znaczy, gdy fale spotykają się w zgodnych fazach, $B=2A$, amplituda drgania wypadkowego równa się podwójnej amplitudzie każdego z drgań składowych. Gdy $\varphi_2-\varphi_1=\pi$, czyli $\varphi_2=\varphi_1+\pi$, to znaczy, gdy fale spotykają się w fazach przeciwnych, $\cos\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}=0$, $B=0$, amplituda drgania wypadkowego równa się zeru, cząstka nie drga zupełnie, drgania się znoszą. Zjawisko powyżej opisane nazywamy interferencją fal. Zjawisko to obserwujemy zazwyczaj wtedy, gdy dwa ciągi fal pochodzące z tego samego źródła dochodzą do tego samego punktu po różnych drogach. Jeżeli drogi te są równej długości lub też różnią się o wielokrotność długości fali, to fale spotykają się w danym punkcie w zgodnych fazach. Jeżeli natomiast jeden ciąg fal przebywa drogę o nieparzystą wielokrotność połówek fali dłuższą lub krótszą niż drugi, wówczas spotykają się w danym punkcie w fazach przeciwnych i znoszą się.



Rys. 12.12. Superpozycja drgań

12.14. Dudnienia. Następnym ważnym przypadkiem jest ten, gdy dwie fale dochodzące do tego samego punktu różnią się nieco, ale niewiele, częstością. Weźmy pod uwagę następujące dwa drgania:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=A\sin\omega_1 t,\\ y_2&=A\sin\omega_2 t,\end{aligned}\right\} \tag{12.84}$$

gdzie ω_2 bardzo niewiele różni się od ω_1.

Drganie wypadkowe będzie

$$y=y_1+y_2=A(\sin\omega_1 t+\sin\omega_2 t)=2A\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t.$$

Oznaczając

$$2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t=B, \tag{12.85}$$

zaś

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega, \tag{12.86}$$

możemy napisać

$$y = B \sin \omega t. \tag{12.87}$$

Otrzymamy drganie wypadkowe o częstości kątowej równej średniej arytmetycznej częstości kątowych drgań składowych i o amplitudzie B, która, jak wskazuje wzór (12.85), zmienia się powoli z czasem od wartości $2A$ do wartości $-2A$.

Aby uniknąć ujemnej wartości amplitudy, napiszmy dla przedziału wartości argumentu $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$ określonego nierównościami:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \leqslant +\frac{\pi}{2},$$

tj. dla dodatnich wartości $\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$, poprzedni wzór, tj.

$$y = B \sin \omega t,$$

gdzie B jest dodatnie, zaś dla przedziału

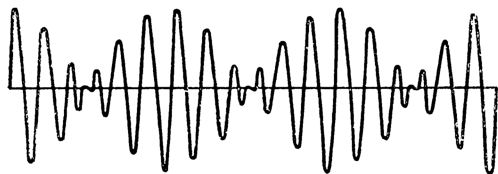
$$\frac{\pi}{2} < \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t < \frac{3}{2} \pi$$

napiszmy

$$y = -B \sin(-\omega t) = -B \sin(\omega t + \pi), \tag{12.88}$$

gdzie B jest określone wzorem $B = 2A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$ i jest ujemne, zatem B będzie dodatnią liczbą.

Gdy czas rośnie, to w każdym z tych przedziałów argument $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$ również rośnie. Amplituda równa z początku zeru dla $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t = -\frac{\pi}{2}$ rośnie stopniowo, dla wartości $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t = 0$ osiąga maksimum, potem znowu maleje do zera. Następnie faza drgania zmienia się na przeciwną, a amplituda znowu rośnie do maksimum i następnie maleje do zera. W dalszym ciągu ten proces się powtarza (rys. 12.13). Gdy argument $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$ rośnie o 2π, amplituda drgania dwukrotnie osiąga maksimum.



Rys. 12.13. Dudnienia

Dla zilustrowania weźmy przykład dwóch drgań mało się różniących częstością. Niech jedno drganie ma częstość $f_2 = 1001$, drugie zaś $f_1 = 999$. W przedziale

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{2\pi\,(1001-999)}{2}\,t \leqslant +\frac{\pi}{2},$$

czyli dla

$$-\frac{1}{4}\,\text{sec} \leqslant t \leqslant +\frac{1}{4}\,\text{sec}$$

amplituda raz osiągnie maksimum dla $t = 0$. Wtedy $B = 2A$.

W przedziale

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi(1001-999)}{2}\,t \leqslant \frac{3}{2}\pi, \qquad \text{czyli gdy} \quad \frac{1}{4}\,\text{sec} < t \leqslant \frac{3}{4}\,\text{sec},$$

amplituda również raz osiągnie maksimum dla $t = \frac{1}{2}$ sec. To samo będzie się następnie wciąż powtarzać w każdej $\frac{1}{2}$ sekundzie. Zatem amplituda osiągnie dwa razy w sekundzie maksimum i również dwa razy w sekundzie będzie się równała zeru. Zjawisko to nazywamy dudnieniami. Liczba dudnień w sekundzie równa jest $f_1 - f_2$, różnicy częstości tych drgań.

12. 15. Fale stojące. Jeżeli jeden koniec linki wprawimy w ruch harmoniczny, to wzdłuż linki będą biec fale ku drugiemu końcowi. Jeżeli oba końce linki wprawimy w ruch harmoniczny tej samej częstości, to powstaną dwa ciągi fal: jeden biegnący w lewo, drugi — w prawo. Zauważymy jednak, że obraz ten bardzo szybko się zmieni. Nie będzie już widać posuwających się fal, linka podzieli się na odcinki drgające, oddzielone jedne od drugich punktami nieruchomymi. Zjawisko to nazvwamy falami stojącymi. Powstaje ono wskutek nakładania się obu ciągów fal. Weźmy równania fali biegnącej w kierunku ujemnym i w kierunku dodatnim osi x:

$$y_1 = A\sin(\omega t + kx), \tag{12.89}$$

$$y_2 = A\sin(\omega t - kx). \tag{12.90}$$

Wychylenie dowolnego punktu linki będzie sumą algebraiczną obu wychyleń:

$$y = y_1 + y_2 = A\,[\sin(\omega t + kx) + \sin(\omega t - kx)] =$$
$$= 2A\cos kx \sin\omega t = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\sin\omega t. \tag{12.91}$$

Oznaczając

$$2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x = B \tag{12.92}$$

możemy napisać

$$y = B \sin \omega t. \tag{12.93}$$

Jak widać z tego wzoru, wszystkie punkty linki będą wykonywały drgania harmoniczne. Amplituda tego drgania będzie zależała od x. Dla wartości x, dla których $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$, amplituda będzie równa zeru, punkty te będą nieruchome. Nazywają się one węzłami. $\cos \frac{2\pi}{\lambda}$ będzie się równał zeru wtedy, gdy

$$\frac{2\pi}{\lambda} x = \frac{\pi}{2}, \quad 3\frac{\pi}{2}, \quad 5\frac{\pi}{2}, \quad 7\frac{\pi}{2}, \ldots,$$

czyli będą nieruchome te punkty, których odcięte będą równe

$$x = \frac{\lambda}{4}, \quad 3\frac{\lambda}{4}, \quad 5\frac{\lambda}{4}, \quad 7\frac{\lambda}{4}, \ldots$$

Widać stąd, że węzły znajdują się w odległościach jeden od drugiego równych połowie fali.

Amplituda osiągnie maksimum dla tych punktów, dla których $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm 1$. Dla tych punktów, dla których $\cos \frac{2\pi}{\lambda} x = -1$, możemy napisać

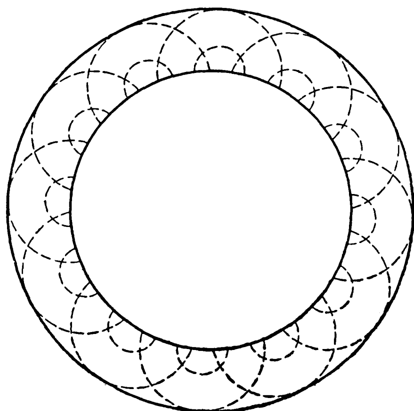
$$y = 2A \sin(\omega t + \pi). \tag{12.94}$$

Punkty, które mają największe amplitudy, nazywamy strzałkami. Cała linka podzieli się na przedziały długości $\frac{\lambda}{2}$. Wszystkie punkty każdej takiej części będą drgać w zgodnych fazach, natomiast fazy sąsiednich przedziałów będą się różnić o 180°. Zjawisko fal stojących obserwujemy zawsze, gdy ciąg fal odbija się i interferuje z ciągiem fal idących w pierwotnym kierunku.

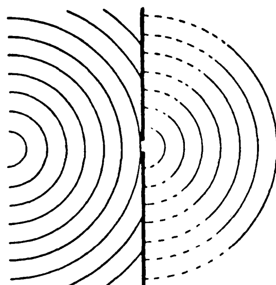
12.16. Zasada Huygensa. Wiele zjawisk obserwowanych przy rozchodzeniu się fal tłumaczy zasada Huygensa (czyt. Hojgensa), według której każdy punkt $A_1, A_2, A_3, \ldots$, do którego dochodzi powierzchnia fazowa (nazywana często czołem fali), można uważać za źródło rozchodzącej się na wszystkie strony kulistej fali cząstkowej. Powierzchnię fazową w nowym położeniu tworzy obwiednia (powierzchnia styczna) wszystkich tych fal cząstkowych (rys. 12.14). Potwierdzeniem tej zasady są rozmaite zjawiska. Do najprostszych należy zjawisko, które łatwo obserwować na wodzie.

Jeżeli w zbiorniku spokojnej wody ustawimy przegrodę z małym otworkiem, a następnie wywołamy na powierzchni falę kołową, to gdy dojdzie ona

do przegrody, otworek w niej staje się źródłem nowej fali kołowej rozchodzącej się z otworka we wszystkich kierunkach poza przegrodą (rys. 12.15). Takie zjawisko nosi nazwę uginania się fal.

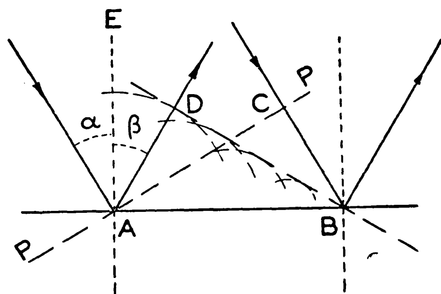


Rys. 12.14. Rozchodzenie się fal kołowych według zasady Huygensa



Rys. 12.15. Uginanie się fali przechodzącej przez mały otwór

12. 17. Odbicie i załamanie fal. 1. O d b i c i e f a l. Gdy fala pada na przegrodę dla niej nieprzenikliwą i gdy jej energia nie zostanie przez tę przegrodę pochłonięta, fala zostaje odbita. Prawo odbicia się fali płaskiej od płaszczyzny można wyprowadzić z zasady Huygensa.



Rys. 12.16. Odbicie się fali

Niech *PP* (rys. 12.16) przedstawia płaszczyznę fazową fali płaskiej padającej na płaszczyznę *AB*. Faza z punktu *C* wędruje jeszcze przez czas Δt, zanim dosięgnie płaszczyzny *AB*. Bieg jej odbywa się wzdłuż linii normalnej do płaszczyzny fazowej, zwanej promieniem fali (na rys. 12.16—*CB*). Tymczasem z punktów już do drgania pobudzonych rozchodzą się fale cząstkowe. Najpierw z punktu *A*, potem z następnych. W czasie Δt fala cząstkowa rozchodząca się z punktu *A* przebiegnie drogę $AD = CB$. Fale cząstkowe z innych punktów rozejdą się na tym mniejszą odległość, im bliżej te punkty znajdują się punktu *B*. Powierzchnia fazowa fali odbitej będzie obwiednią wytworzonych półkulistych fal cząstkowych. Powierzchnią fazową fali odbitej będzie płaszczyzna *DB*. Jeżeli weźmiemy pod uwagę trójkąty *ACB* i *ADB*, to możemy stwierdzić, że są one przystające, gdyż są oba prostokątne, mają bok *AB* wspólny, zaś bok $CB = AD = v \cdot \Delta t$, gdzie jest prędkością fazy. Wynika stąd, że

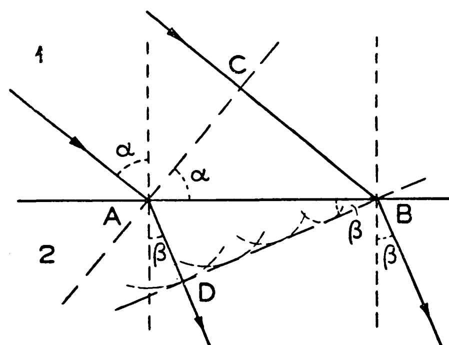
$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABD.$$

Lecz kąt $CAB = \alpha$, ponieważ są to kąty o ramionach odpowiednio prostopadłych, a kąt $ABD = \beta$ z tej samej przyczyny, zatem

$$\beta = \alpha.$$

Kąt α między promieniem fali padającej a prostą EA zwaną prostopadłą padania nazywamy kątem padania, kąt zaś β zawarty między promieniem fali odbitej a prostopadłą padania nazywamy kątem odbicia. Zatem wynik możemy streścić w zdaniu: kąt odbicia równa się kątowi padania.

2. Załamanie się fal. Jeżeli mamy dwa środowiska, w których prędkość fazowa fal jest różna, to powierzchnia fazowa na granicy doznaje załamania (fala ulegnie również częściowo odbiciu na granicy). Z zasady Huygensa można wyprowadzić prawo załamania. Przypuśćmy, że mamy dwa środowiska; w pierwszym prędkość fazy niech będzie v_1, w drugim $-v_2$ i niech $v_1 > v_2$. Przypuśćmy, że na płaszczyznę graniczną pada fala płaska wzdłuż promieni tworzących kąt α z prostopadłą padania (rys. 12.17). W czasie Δt, gdy od punktu C do B przemieści się faza, z punktu A rozejdzie się w środowisku drugim fala cząstkowa na odległość $v_2 \Delta t$. Z punktów położonych między A i B wytworzone fale cząstkowe rozejdą się na odległość odpowiednio mniejszą. Wytworzona w środowisku drugim płaszczyzna fazowa będzie obwiednią półkulistych fal cząstkowych. Płaszczyzna ta będzie nachylona pod innym kątem do płaszczyzny granicznej niż płaszczyzna AC z powodu innej prędkości fazy w środowisku drugim. Normalna do tej płaszczyzny fazowej tworzy z prostopadłą padania kąt β zwany kątem załamania. Wziąwszy pod uwagę trójkąty ABC i ADB możemy napisać



Rys. 12.17. Załamanie się fali na granicy dwóch środowisk

$$AB \sin\alpha = CB = v_1 \Delta t, \qquad (12.95)$$

$$AB \sin\beta = AD = v_2 \Delta t. \qquad (12.96)$$

Dzieląc pierwsze równanie przez drugie otrzymamy

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}.} \qquad (12.97)$$

Stosunek ten nazywamy współczynnikiem załamania środowiska 2 względem środowiska 1 dla fal danej długości.

Zadania

12.1. Napisać równanie ruchu harmonicznego o amplitudzie 0,2 cm i okresie $T = 1/50$ sec. Jakie będzie wychylenie w tym ruchu w chwilach $t_1 = 0{,}002$ sec, $t_2 = 0{,}005$ sec, $t_3 = 0{,}01$ sec, $t_4 = 0{,}015$ sec?

Odpowiedź: $x = 0{,}2 \sin 100\,\pi t$; $x_1 = 0{,}1176$; $x_2 = 0{,}2$; $x_3 = 0$; $x_4 = -0{,}2$.

12.2. Napisać wyrażenie na prędkość i przyśpieszenie w powyższym ruchu i obliczyć je dla tych samych chwil, jak w powyższym zadaniu.

Odpowiedź: $v = 62{,}83 \cos 100\,\pi t$; $a = -19\,740 \sin 100\,\pi t$; $v_1 = 50{,}84$ cm/sec; $v_2 = 0$; $v_3 = -62{,}83$ cm/sec; $v_4 = 0$; $a_1 = -11\,600$ cm/sec^2; $a_2 = -19\,740$ cm/sec^2; $a_3 = 0$; $a_4 = 19\,740$ cm/sec^2;

12.3. Napisać wzór na ruch harmoniczny o amplitudzie 0,5 mm, częstotliwości $= 200$ Hz i fazie początkowej 30°.

Odpowiedź: $x = 0{,}05 \sin \left(400\,\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

12.4. Obliczyć wychylenie, prędkość i przyśpieszenie w powyższym ruchu dla chwil: $t_1 = 0{,}001$ sec, $t_2 = 0{,}002$ sec, $t_3 = 0{,}003$ sec, $t_4 = 0{,}005$ sec.

Odpowiedź: $v_1 = -13{,}06$; $v_2 = -62{,}48$; $v_3 = -25{,}56$; $v_4 = 54{,}42$ cm/sec; $a_1 = -16\,420$; $a_2 = -8252$; $a_3 = 72\,130$; $a_4 = -39\,480$ cm/sec^2.

12.5. Jaki jest okres T oraz częstotliwość f w ruchu harmonicznym $x = A \sin 785{,}4\,t$?

Odpowiedź: $T = 0{,}008$ sec; $f = 125$ Hz.

12.6. Punkt o masie $m = 0{,}01$ g utrzymywany w danym położeniu siłami sprężystymi, przy wychyleniu o x mm z położenia równowagi doznaje siły $F = -kx$, gdzie $k = 10\,000$. Napisać równanie ruchu tego punktu, znaleźć okres jego drgania i częstotliwość.

Odpowiedź: $x = A \sin 1000\,t$; $T = 0{,}00628$ sec; $f = 159{,}2$ Hz.

12.7. Znaleźć okres wahań wahadła prostego (matematycznego) o długości 1 metra dla $g = 981$ cm/sec^2.

Odpowiedź: $T = 2{,}005$ sec.

12.8. Wahadło długości 24,9 cm wykonało 120 całkowitych wahnień (120 okresów) w ciągu 2 minut. Jakie było w tym miejscu przyśpieszenie siły ciężkości?

Odpowiedź: 983 cm/sec^2.

12.9. Zegar wahadłowy naregulowany w Polsce według czasu średniego przy wartości $g_1 = 981$ cm/sec^2 zostaje przewieziony pod równik, gdzie $g_2 = 978$ cm/sec^2. O ile będzie się tam spóźniał na dobę?

Odpowiedź: $86\,400 \left(\sqrt{\frac{g_1}{g_2}} - 1\right) = 2$ min 12 sec.

12.10. Wahadło składa się z sztywnego pręta tak lekkiego, że jego ciężar można zaniedbać i dwóch jednakowych ciężarków o masie m każdy, bardzo małych rozmiarów umocowanych na pręcie w odległości jeden 15 cm, drugi 30 cm od osi. Jaka jest długość zredukowana takiego wahadła?

Odpowiedź: $l = \frac{I}{2md} = 25$ cm.

12.11. Znaleźć okres wahania koła rowerowego, którego obręcz o promieniu $r = 35$ cm ma masę $m_1 = 3$ kg, a w jednym miejscu obręczy umocowany jest wentyl o masie $m_2 = 50$ g. Moment bezwładności szprych i reszty można zaniedbać.

Odpowiedź: $T = 2\pi \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)\,r}{m_2 g}} = 9{,}3$ sec.

12.12. Początkowa amplituda wahania się wahadła $B_0 = 3$ cm. Po $t_1 = 10$ sekundach staje się równa $B_1 = 1$ cm. Po jakim czasie t liczonym od chwili początkowej amplituda będzie $B = 0{,}3$ cm?

Odpowiedź: $t = t_1 \dfrac{\lg B_0 - \lg B_2}{\lg B_0 - \lg B_1} \approx 21$ sec.

12.13. Amplituda drgań tłumionych zmniejsza się w przeciągu jednego okresu trzykrotnie. O ile procentów okres takiego drgania tłumionego jest większy od okresu takiego samego drgania nietłumionego?

Odpowiedź: 1,53%.

12.14. Widełki strojowe o częstotliwości własnej 50 Hz pobudzone jednorazowo wykonują drgania zanikające o amplitudzie zmniejszającej się dwukrotnie w czasie 2 sec. Pobudzane do drgania siłą zmienną o częstotliwości 50 Hz drgają z amplitudą 2 mm. Jaka będzie amplituda ich drgania przy zmianie częstotliwości siły wymuszającej na 55 Hz?

Odpowiedź: $\approx 0{,}02$ mm.

12.15. W jakich chwilach energia kinetyczna drgania $y = A \sin \omega t$ będzie równa energii potencjalnej?

Odpowiedź: Gdy $E_k = \dfrac{1}{2} E$, $t = \dfrac{T}{8}(2k+1)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$

12.16. Fala jest określona wzorem

$$y = A \sin (3927\, t - 11{,}9\, x).$$

Jaki jest okres drgania T punktu w fali, częstotliwość f, długość fali λ i jej prędkość v?

Odpowiedź: $T = 0{,}0016$ sec, $f = 625$ Hz, $\lambda = 0{,}528$ m, $v = 330$ m/sec.

12.17. Dwa punkty drgają, jeden z częstotliwością $f_1 = 28$ Hz, drugi — $f_2 = 35$ Hz. W chwili początkowej fazy ich były zgodne. Wyznaczyć chwile, po upływie których fazy będą znowuż zgodne, oraz chwile, w których będą przeciwne.

Odpowiedź: będą zgodne, gdy $70\pi t - 56\pi t = 2k\pi$, gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots$, a więc dla chwil $0^1/_7$ sec, $^2/_7$ sec...

Będą przeciwne, gdy $70\pi t - 56\pi t = (2k+1)\pi$, a więc dla chwil $^1/_{14}$ sec, $^3/_{14}$ sec, $^5/_{14}$ sec...

Pytania do powtórzenia

1. Jaki ruch nazywamy harmonicznym? Co to jest okres, częstotliwość, faza, częstość kątowa, wychylenie, amplituda?
2. Co nazywamy fazą początkową ruchu harmonicznego?
3. Jakie są wzory na wychylenie, prędkość, przyśpieszenie w ruchu harmonicznym?
4. Jakie jest równanie różniczkowe ruchu harmonicznego?
5. Jakie są własności wahadła matematycznego? Jakim ruchem jest ruch wahadła? Jaki jest wzór na okres wahadła?
6. Co nazywamy wahadłem fizycznym (złożonym)?
7. Co nazywamy długością zredukowaną wahadła fizycznego?
8. Jakim wzorem wyraża się okres wahania wahadła fizycznego?
9. Co nazywamy momentem kierującym wahadła fizycznego?
10. Jakie jest równanie drgań zanikających? Kiedy drgania są zanikające?
11. Jakie drgania nazywamy wymuszonymi? Jakie jest równanie drgań wymuszonych?
12. Kiedy następuje rezonans przy drganiach wymuszonych? Jakie są cechy tego zjawiska?

13. Jak się wyraża energia drgania? Z jakich rodzajów energii się składa?
14. Jaki jest wzór na wychylenie w fali sinusoidalnej?
15. Jak definiujemy długość fali? Jakie będzie równanie na wychylenie po wprowadzeniu do niego długości fali?
16. Jak możemy określić prędkość fazy? Jaki jest związek między prędkością fazy, długością fali i okresem lub częstotliwością?
17. Jaka jest różnica między falami poprzecznymi i podłużnymi?
18. Jakie jest równanie różniczkowe fali płaskiej?
19. Jakie powierzchnie nazywamy powierzchniami fazowymi?
20. Jakie zjawiska nazywamy superpozycją, interferencją fal?
21. Jakie zjawisko nosi nazwę dudnień?
22. Kiedy powstają fale stojące?
23. Jaka jest treść zasady Huygensa?
24. Jak z punktu widzenia zasady Huygensa tłumaczy się zjawisko odbicia, załamania fal?

13. Akustyka

13.1. Wytwarzanie dźwięków. Akustyka zajmuje się wszelkiego rodzaju dźwiękami i głosami. Dźwięki odczuwamy bezpośrednio za pomocą naszego organu słuchu. Za pomocą słuchu rozróżniamy różne wrażenia dźwiękowe i odróżniamy je różnymi nazwami. Mówimy, że słyszymy t o n y skrzypiec, s z u m morza, s z e l e s t liści lub papieru, h u k grzmotu, h a ł a s maszyn. Zagadnienia, jakie tu natychmiast się nasuwają, są następujące: jak powstają wszelkiego rodzaju dźwięki, jak i dzięki czemu się rozchodzą, jakimi cechami wreszcie rozmaite dźwięki się różnią.

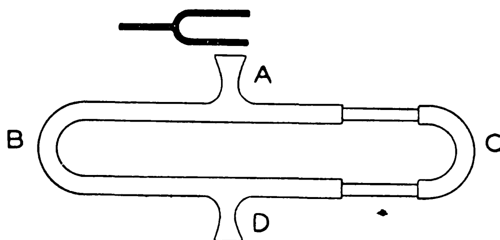
Przede wszystkim łatwo stwierdzić, że powstawanie dźwięków związane jest z ruchem. Układy, których wszystkie części pozostają w spoczynku, nie wydają dźwięku. Lecz i ciała poruszające się nie zawsze wydają dźwięk. Powolny ruch naszej ręki np. nie wydaje dźwięku, lecz silne położenie książki na stole, uderzenie kijem w podłogę, uderzenie młotkiem w strunę fortepianu powoduje powstanie dźwięku. Można powiedzieć, że zawsze, gdy jakieś ciało lub jego część doznaje gwałtownego przyśpieszenia lub opóźnienia, słyszymy dźwięk. Wśród wszelkiego rodzaju dźwięków wyróżniamy tony, które, jak łatwo doświadczeniem się przekonać, powstają wtedy, gdy ciało wykonywa ruch periodyczny. Gdy wprawimy np. w szybki obrót koło zębate i przytkniemy doń kartkę papieru lub blaszkę metalową sprężystą, zacznie ona drgać szybko i jednocześnie usłyszymy ton — przy powolnym obrocie kółka gruby albo, jak mówimy poprawnie, niski, przy coraz szybszym obrocie coraz cieńszy albo, jak mówimy zwykle, coraz wyższy. Zróbmy na okręgu koła narysowanego na tarczy metalowej otwory w równych odstępach. Wprawmy tarczę w szybki obrót i skierujmy prostopadle do tarczy silny prąd powietrza wydmuchiwany z rurki tak, aby podczas obrotu przechodził przez kolejno nasuwające się otworki. Usłyszymy również ton podwyższający się w miarę powiększania szybkości obrotu. Przyrząd taki nazywa się syreną Seebecka. Jak zobaczymy później, przyrządy te wydają tony złożone. Ton prosty otrzymujemy wtedy, gdy ciało dźwięczące wykonywa ruch harmoniczny. Przyrządem takim (z dużym przybliżeniem) są widełki strojowe. Jest to pręt stalowy zgięty w kształcie litery *U*, umocowany na nóżce. Gdy uderzymy młoteczkiem jeden koniec widełek strojowych, zaczynają one drgać wydając ton. Nie trudno zmierzyć częstość drgania widełek strojowych. Przyklejmy do

końca jednego ramienia kawałek szczecinki i umocujmy widełki tak, aby koniec jej dotykał do okopconego wałka. Obracajmy wałek z pewną prędkością, np. raz na sekundę, i pobudźmy widełki do drgania. Koniec szczecinki nakreśli na wałku sinusoidę. Zliczywszy grzbiety i doliny tej sinusoidy na obwodzie walca możemy wyznaczyć częstość drgania widełek.

Z doświadczeń z kołem zębatym, syreną, widełkami strojowymi różnej wielkości możemy stwierdzić, że im większa częstość drgania, tym wyższy ton. Wysokość tonu związana jest z częstością drgania. Ucho nasze bezpośrednio rozpoznaje wysokość słyszanego dźwięku. Lecz w jaki sposób tony lub dźwięki mogą dochodzić do naszego ucha? Doświadczeniem łatwo stwierdzić, że przenoszą się one przez powietrze. Gdy umieścimy ciało dźwięczące, np. dzwonek elektryczny, pod kloszem pompy i wypompujemy spod niego powietrze, nie będziemy słyszeli dźwięku, mimo iż widać, jak młoteczek uderza w dzwonek. Przez próżnię zatem dźwięk nie przechodzi. Na czym zatem polega rozchodzenie się dźwięku? Jeżeli dźwięk powstaje, gdy ramiona widełek strojowych drgają, nasuwa się przypuszczenie, że pobudzają one również do drgania cząsteczki powietrza, wskutek czego powstają w powietrzu fale. Aby się przekonać, czy istotnie dźwięk polega na rozchodzeniu się fal, trzeba by stwierdzić, czy można wywołać wszystkie te zjawiska, które dają fale, a więc, czy możemy zaobserwować interferencję, fale stojące, dudnienia, ruchy drgające cząsteczek powietrza.

13.2. Zjawiska obserwowane przy falach dźwiękowych.

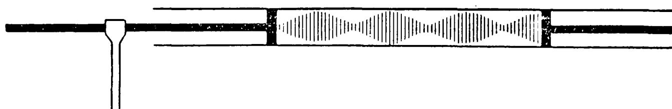
1. I n t e r f e r e n c j a. Interferencję fal dźwiękowych najłatwiej można obserwować za pomocą przyrządu Quinckego. Składa się on z rur wygiętych, jak na rys. 13.1. Fale dźwiękowe wywołuje się za pomocą widełek strojowych zbliżonych do otwartego końca *A*. Do końca *D* zbliża się ucho. Fala dźwiękowa przebiega dwiema drogami, przez rurę *B* i przez rurę *C*. Przez wysuwanie rury *C* można przedłużać drogę, którą fale przebywają przez tę część przyrządu. Gdy droga ta jest o pół długości fali dłuższa od drogi *B*, fale spotykają się w fazach przeciwnych osłabiając się silnie. Słyszymy wtedy wyraźne minimum.



Rys. 13.1. Interferencja fal dźwiękowych

2. F a l e s t o j ą c e. Fale stojące można otrzymać w rurze zamkniętej, tzw. rurze Kundta (rys. 13.2). Jest to szeroka rura szklana zamknięta ruchomym tłokiem. Do drugiego jej końca wchodzi pręt szklany lub metalowy zaopatrzony na końcu w płytkę szerokości rury. Pręt umocowany jest w uchwycie w środku jego długości. Do rury wsypuje się jakiś delikatny proszek, np. lycopodium lub starty na drobny proszek korek. Gdy pręt pociągnie się wilgotną

szmatką, wydaje on wysoki silny dźwięk wzbudzający fale dźwiękowe w rurze. Fale odbijając się od tłoka umieszczonego na końcu rury wytwarzają fale stojące. Tłok ten przez przesuwanie nastawia się tak, aby przy nim wytworzył się węzeł



Rys. 13. 2. Unaocznienie fal stojących w rurze Kundta

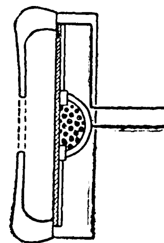
prędkości cząsteczek powietrza w fali dźwiękowej (a strzałka zgęszczeń i rozrzedzeń). Przez ruchy powietrza proszek zostaje porwany i zbiera się w węzłach fal stojących. Mierząc odległość węzłów można znaleźć długość wytwarzanej fali wiedząc, że odległość między węzłami fali stojącej równa się $\frac{\lambda}{2}$.

3. D u d n i e n i a. Gdy mamy dwa źródła tonów różniących się bardzo niewiele częstością, wówczas, jak znaleźliśmy poprzednio, po nałożeniu się drgań otrzymujemy drganie wypadkowe o częstości równej średniej arytmetycznej obu częstości, a więc mało różne od częstości każdego z drgań składowych, lecz o amplitudzie periodycznie powiększającej się i zmniejszającej. Możemy to z łatwością obserwować słuchem. Jak wiadomo, dla uzyskania tonów wysokich w fortepianie umieszcza się zwykle trzy struny obok siebie, uderzane przez ten sam młoteczek, przy niższych tonach mamy po dwie struny, przy najniższych — po jednej. Uderzmy klawisz, którego młoteczek uderza w dwie struny. Jeżeli te struny są cokolwiek rozstrojone, to znaczy trochę różnią się częstością drgania, usłyszymy wibrację dźwięku. Dźwięk będzie się periodycznie wzmacniał i osłabiał. Będą to dudnienia. Podobnie możemy otrzymać wyraźne dudnienia wydobywając za pomocą dmuchania dźwięk z dwóch piszczałek nastrojowych na tony cokolwiek różnej wysokości.

4. D r g a n i a c z ą s t e k p o w i e t r z a. Wszystkie wyżej opisane zjawiska wykazują, że dźwięk polega na rozchodzeniu się fal w powietrzu. Oczywiście drgające np. ramiona widełek strojowych powodują drgania uderzanych cząstek powietrza i drganie to przenosi się coraz dalej w postaci fal. Ponieważ powietrze ma tylko sprężystość objętości, a nie ma sprężystości postaci, mogą jedynie powstawać w powietrzu zgęszczenia i rozrzedzenia, zatem fale podłużne. Gdy na drodze fali dźwiękowej ustawimy jakąś błonkę sprężystą, membranę np. z miki lub cienkiej blaszki stalowej, membrana ta, uderzana przez drgające cząstki powietrza, zaczyna wykonywać drgania wymuszone. Na tych drganiach wymuszonych polega zapisywanie dźwięków na płycie za pomocą fonografu, jak również działanie mikrofonu. Membrana fonografu drgając porusza dźwignię, której jeden koniec jest przytwierdzony do środka membrany, a drugi jest zakończony ostrą igłą ryjącą na płycie pokrytej woskiem rowek mający postać krzywej odpowiadającą drganiu. Z płyty tej za pomocą procesu, którego nie możemy tu opisywać, sporzą-

dza się dokładną kopię (płytę) z twardego ebonitu. Płytę następnie puszcza się w ruch obrotowy, a w rowku jej stawia się ostrze igły przymocowanej do dźwigni połączonej z membraną. Igła przesuwając się po rowku powoduje drgania membrany identyczne z drganiem wywołanym poprzednio przez fale dźwiękowe. Membrana staje się teraz źródłem fal dźwiękowych, takich samych, jakie poprzednio pobudzały ją do drgania.

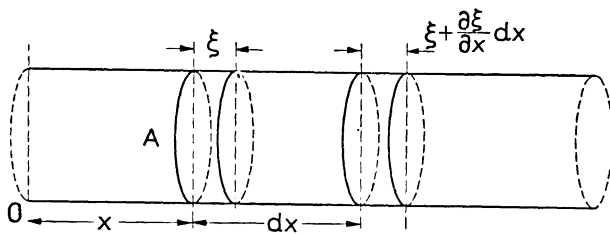
W mikrofonie mamy również membranę, zwykle przewodzącą, przyciśniętą do komory napełnionej ziarnkami węglowymi (rys. 13.3). Membrana i ziarnka węglowe włączane są w obwód prądu elektrycznego. Gdy na membranę padną fale dźwiękowe, membrana drga, przyciskając i rozluźniając na przemian ziarnka węglowe. Ich opór zmienia się w takt drgań membrany i wskutek tego zmienia się odpowiednio natężenie prądu. Te wahania prądu możemy z powrotem przetworzyć na ruchy membrany w słuchawce telefonu odtwarzając ten sam dźwięk, jaki spowodował drganie membrany mikrofonu.



Rys. 13. 3. Mikrofon węglowy

W naszym organie słuchu również znajduje się membrana zwana błoną bębenkową, która wykonywa drgania wymuszone pod wpływem fal dźwiękowych. Drgania te przenoszą się na dalsze części ucha wywołując wrażenie dźwięku.

Do szczególnie silnych drgań mogą pobudzić fale dźwiękowe wtedy, gdy częstość drgań powietrza równa się częstości drgań własnych układu, a więc gdy zachodzi rezonans. Wtedy nawet układy, do pobudzenia których potrzeba znacznych sił, można słabymi impulsami powietrza wprawić w dość silne drganie. Tak np., gdy ustawimy obok siebie dwie pary widełek strojowych i pobudzimy jeden z nich do drgania, a za chwilę drgania ich przerwiemy ścisnąwszy ramiona widełek ręką, drugie widełki będą dźwięczeć wyraźnie. Podobnie jeżeli wydamy silny ton za pomocą jakiegokolwiek instrumentu w bliskości fortepianu przy naciśniętym pedale, to po przerwaniu tonu tego instrumentu struna wydająca ten sam ton będzie dźwięczeć wyraźnie dalej, inne natomiast się nie odezwą.



Rys. 13.4. Fale dźwiękowe w powietrzu

13. 3. Równanie fal dźwiękowych i ich prędkość w powietrzu. Rozważymy najprostszy przypadek rozchodzenia się fal dźwiękowych w powietrzu lub innym jakimkolwiek gazie, mianowicie przypadek fali płaskiej. Weźmy pod uwagę cylindryczną warstwę gazu (możemy ją sobie wyobrażać np. w rurze) ograniczoną dwoma przekrojami o polu A (rys. 13.4). Poprowadźmy oś X w kierunku biegu fali. Niech odcięta pierwszego przekroju będzie x, drugiego $x + dx$. Odległość między przekrojami będzie zatem dx. Ponieważ w gazie biegnie fala po-

dłużna, przekrój A w czasie dt przemieści się o bardzo mały odcinek ξ. To wychylenie cząstek gazu z położenia równowagi będzie zależało oczywiście od x i od czasu t:

$$\xi = f(x, t).$$

Wychylenie cząstek w drugim przekroju będzie $\xi + d\xi = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right.$ jest szybkością zmiany tego wychylenia w kierunku osi $\left.x\right)$. Z lewej strony na gaz zawarty między tymi dwoma przekrojami działa ciśnienie p, z prawej — $(p + dp)$. Zatem siła działająca z lewej strony na cały przekrój będzie pA, z prawej —$(p + dp)A$. Według II zasady Newtona iloczyn masy przez przyśpieszenie równa się sumie sił działających na tę masę:

$$ma = \sum F.$$

Oznaczając gęstość gazu przez ϱ będziemy mieli $m = \varrho V = \varrho A\, dx$. Ponieważ przemieszczenie rozważanej porcji gazu jest ξ, zatem przyśpieszenie $a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$. Możemy więc napisać równanie

$$\varrho A\, dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = pA - (p + dp)A = -dp\, A.$$

Po skróceniu przez A otrzymujemy

$$\varrho\, dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -dp,$$

skąd

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{13.1}$$

(piszemy tu pochodną cząstkową, gdyż p jest funkcją x i t)

Dalszy wynik będzie różny w zależności od tego, czy założymy, że zmiany ciśnienia zachodzą izotermicznie czy też adiabatycznie. W pierwszym przypadku stosuje się do gazu prawo Boyle'a

$$pV = \text{const.}$$

Różniczkując to równanie względem x otrzymamy

$$\frac{\partial p}{\partial x} V + p \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

skąd

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p}{V} \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{13.2}$$

Zmiana objętości dV następuje wskutek tego, że po przemieszczeniu się wysokość rozważanego walca zmieniła się o $\frac{\partial \xi}{\partial x} dx$. Zatem

$$dV = A \frac{\partial \xi}{\partial x} dx, \quad \text{a} \quad V = A\, dx.$$

Po podstawieniu do równania (13.2) otrzymujemy

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p}{A\, dx} A \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx = -p \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Podstawiając tę wartość na $\frac{\partial p}{\partial x}$ do równania (13.1) otrzymamy

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = p \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

skąd

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{p}{\varrho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Wprowadzając oznaczenie $\frac{p}{\varrho} = v^2$ otrzymamy równanie

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Jest to znane nam już równanie różniczkowe fali płaskiej, przy czym v oznacza tu prędkość fali, na którą otrzymujemy wzór

$$v = \sqrt{\frac{p}{\varrho}}. \tag{13.3}$$

W przypadku, gdyby zmiany gęstości gazu następowały adiabatycznie, należałoby zastosować prawo Poissona

$$pV^{\varkappa} = \text{const.}$$

Różniczkując to równanie względem x otrzymamy

$$\frac{\partial p}{\partial x} V^{\varkappa} + p\varkappa V^{\varkappa-1} \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Skracając przez $V^{\varkappa-1}$ otrzymamy

$$\frac{\partial p}{\partial x} V + p\varkappa \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \tag{13.4}$$

Lecz

$$V = A\,dx, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A \frac{\partial \xi}{\partial x}\,dx\right) = A\,dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Podstawiając do równania (13.4) będziemy mieli

$$\frac{\partial p}{\partial x} A\,dx = -p\varkappa A\,dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

skąd

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -p\varkappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Podstawiając tę wartość na $\frac{\partial p}{\partial x}$ do równania (13.1) otrzymamy

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{p\varkappa}{\varrho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{13.5}$$

Wprowadzając tu oznaczenie $\frac{p\varkappa}{\varrho} = v^2$ otrzymamy równanie identyczne z poprzednim

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

lecz w tym przypadku

$$v = \sqrt{\frac{p\varkappa}{\varrho}}. \tag{13.6}$$

Jeżeli podstawimy znane wartości na p i ϱ, mianowicie

$$p = 76 \cdot 13{,}6 \cdot 981 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}, \qquad \varrho = 0{,}001293 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},$$

to w pierwszym przypadku otrzymamy

$$v = \sqrt{\frac{76 \cdot 13{,}6 \cdot 981 \text{ cm}^2}{0{,}001293 \text{ sec}^2}} = \sqrt{\frac{1\,013\,962 \text{ cm}^2}{0{,}001293 \text{ sec}^2}} = 28\,000 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 280 \frac{\text{m}}{\text{sec}},$$

w drugim zaś

$$v = \sqrt{\frac{1\,013\,962 \cdot 1{,}4 \text{ cm}^2}{0{,}001293 \text{ sec}^2}} = 33\,100 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 331 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Pomiary prędkości dźwięku robiono już w końcu szesnastego wieku. Z początku wykonywano je w ten sposób, że obserwowano błysk wystrzału działowego i mierzono czas, po którym dźwięk dochodził do obserwatora. Oczywiście były to pomiary bardzo niedokładne. Metody pomiaru ulepszano stopniowo. Obecnie istnieje wiele metod pomiaru prędkości dźwięku. Dają one zgodne wyniki na prędkość v w suchym powietrzu przy temperaturze 0°C:

$$331 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Możemy stąd wyciągnąć wniosek, że zgęszczenia i rozrzedzenia w fali dźwiękowej są adiabatyczne. Łatwo to wytłumaczyć: zmiany gęstości są tak nagłe, że różnice temperatur powstające wskutek zmiany gęstości powietrza nie zdążą się wyrównać.

13.4. Prędkość fali w prętach. Rozumując w sposób identyczny jak w poprzednim ustępie, możemy napisać dla fali biegnącej wzdłuż pręta zrobionego z jakiegokolwiek materiału takie samo równanie jak poprzednio:

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{13.7}$$

Dla ciał stałych mieliśmy związek między wydłużeniem właściwym i ciśnieniem (naprężeniem):

$$p = -E \frac{\Delta L}{L} \tag{13.8}$$

(musimy napisać tu minus, gdyż mamy tu skrócenie, ΔL jest ujemne).

W naszym przypadku

$$\Delta L = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx, \qquad L = dx,$$

zatem

$$p = -E \frac{\partial \xi}{\partial x}, \tag{13.9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{13.10}$$

Podstawiając do równania (13.7) otrzymamy

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \tag{13.11}$$

skąd

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{13.12}$$

Oznaczając $\frac{E}{\varrho} = v^2$ otrzymamy znowu równanie fali:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Prędkość fali dźwiękowej wzdłuż pręta wyraża się zatem wzorem

$$v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}. \tag{13.13}$$

Długość fali odpowiadającej danej częstotliwości f będzie

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{E}{\varrho}}. \tag{13.14}$$

13. 5. Wysokość tonu. Wiemy już zatem, że ciała drgające wzbudzają w otaczającym środowisku fale podłużne, które dochodząc do naszego ucha powodują wrażenie dźwięku. Jak sprawdzono doświadczeniem, nasze ucho reaguje na dźwięki o częstościach zawartych mniej więcej w granicach od 20 Hz do 20 000 Hz. Mniejszych częstości ucho nie odczuwa, górna granica zaś zależy od wieku i właściwości danego ucha. W młodości ucho ma zwykle większy zakres słyszalności.

W muzyce używa się zwykle tonów w zakresie mniej więcej od 20 Hz do 4000 Hz. Częstość drgania określa nam wysokość tonu. Im częstość większa, tym wyższy jest ton. Ponieważ długość fali jest związana z częstością równaniem

$$\lambda = \frac{v}{f}, \tag{13.15}$$

zatem im wyższy ton, tym krótsza jest odpowiadająca mu fala.

Zasadniczą właściwością wrażenia słuchowego jest to, że przy zmianie częstości tonu w tym samym stosunku odczuwamy uchem jednakową zmianę wysokości tonu. Na przykład przy podwojeniu częstości wydaje nam się, że wysokość tonu powiększyła się jednakowo niezależnie od tego, czy częstość zmieniła się od 100 Hz do 200 Hz, czy też od 1000 Hz do 2000 Hz. Dlatego też w muzyce ważną rolę odgrywa stosunek częstości zwany *interwalem.* Proste interwały wyrażające się stosunkiem częstości 5 : 4, 4 : 3, 3 : 2 lub 2 : 1 muzykalny słuch odróżnia od razu, muzykalne, wyszkolone ucho ze słuchu może określić dany interwał. Interwały odpowiadające prostym stosunkom częstości mają swoje nazwy.

W muzyce nie używamy tonów wszystkich możliwych wysokości. Używa się pewnego ciągu częstości, takich mianowicie, których stosunki względem pewnej zasadniczej częstości standardowej równają się pewnym prostym liczbom wymiernym.

13.6. Natężenie dźwięku. Drugim elementem dźwięku, który może przybierać rozmaite wartości, jest jego natężenie. Dźwięki mogą się bardzo znacznie różnić pod tym względem: jedne są ciche, ledwie słyszalne, inne głośne lub bardzo głośne. Natężenie dźwięku zależy od energii fal dźwiękowych. Energia zaś drgania, jak to znaleźliśmy już poprzednio, jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy. Natężenie dźwięku uważamy za proporcjonalne do energii przenoszonej przez fale dźwiękowe w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fal. Natężenie dźwięku danej częstości ledwie słyszalnego nazywamy progiem słyszalności. Ucho jest instrumentem nadzwyczaj czułym, toteż np. dla częstości 3000 Hz natężenie ledwie słyszalnego dźwięku wynosi 10^{-9} ergów/cm^2 · sec, przy czym amplituda drgania wynosi mniej niż 10^{-9} cm, a więc jest mniejsza od średnicy drobiny. Próg słyszalności zależy od wysokości dźwięku. Ucho jest najwięcej czułe przy częstości dźwięku zawartej między 2000 a 3000 Hz. Natomiast ucho jest mało czułe na zmiany natężenia dźwięku. Spostrzegamy dopiero wtedy zmiany natężenia, gdy są one dość znaczne. Ponieważ spotykamy się w praktyce z dźwiękami miliardy razy silniejszymi od progu słyszalności, więc dla wygody wyrażania stosunków natężeń dwóch dźwięków wprowadzono skalę logarytmiczną. Za podstawę bierzemy ton o danej częstości, o natężeniu odpowiadającym progowi słyszalności. Oznaczmy to natężenie przez I_0. Jeżeli natężenie innego tonu tej samej częstości jest I, to

$$\beta = \lg_{10} \frac{I}{I_0}$$

wyraża tak zwany poziom wrażenia albo poziom siły dźwięku. Jednostką jego jest bel, gdy $\lg_{10} \frac{I}{I_0} = 1$. Gdy więc $I = 10\, I_0$, to $\beta = 1$ bel, gdy $I = 100\, I_0$, to $\beta = 2$ bele, gdy $I = 1000\, I_0$, to $\beta = 3$ bele itd. Najczęściej używaną tu jednostką jest nie bel, lecz jednostka 10 razy mniejsza: 1 decybel $= \frac{1}{10}$ bela. Żeby otrzymać poziom siły dźwięku w decybelach, trzeba poprzednią liczbę w belach pomnożyć przez 10, zatem

$$\beta \text{ (decybeli)} = 10 \lg_{10} \frac{I}{I_0}.$$

Poziom siły dźwięków, z którymi spotykamy się w akustyce, leży w granicach od 0 do 140 decybeli.

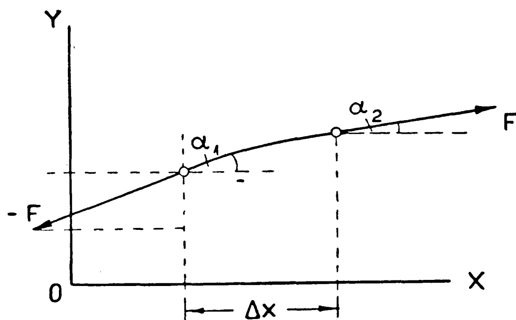
13.7. Barwa dźwięku. Jeżeli narysujemy krzywą drgań cząstek powietrza odpowiadającą dźwiękowi jakiegoś instrumentu, np. za pomocą oscylografu

katodowego, to stwierdzimy natychmiast, że jest to wprawdzie funkcja periodyczna czasu, ale z reguły nie jest sinusoidą. Zatem nigdy niemal nie mamy w fali dźwiękowej drgania harmonicznego, tylko z reguły drgania złożone. Według znanego w matematyce twierdzenia Fouriera każdą funkcję periodyczną możemy przedstawić za pomocą szeregu trygonometrycznego albo szeregu Fouriera

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + a_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \ldots,$$

w którym współczynniki a_0, a_1, a_2... można obliczyć, gdy znany jest kształt funkcji $f(t)$.

Zatem każde drganie złożone możemy uważać za wynik dodania się drgań harmonicznych prostych o częstościach kątowych ω, 2ω, 3ω, 4ω itd. Ton odpowiadający drganiu o najmniejszej częstości kątowej ω $\left(\text{a więc oczywiście i najmniejszej częstości } f = \frac{\omega}{2\pi}\right)$ nazywamy tonem zasadniczym lub pierwszym harmonicznym, ton o częstości kątowej 2ω $\left(f = \frac{\omega}{\pi}\right)$ — drugim harmonicznym (w muzyce nazywają go zwykle pierwszym harmonicznym), ton o częstości 3ω — trzecim harmonicznym itd. Przy rozmaitych drganiach złożonych współczynniki a_1, a_2 itd. mają różne wartości. W niektórych przypadkach niektóre z nich równają się zeru, to znaczy brak niektórych harmonicznych.



Rys. 13.5. Element struny

Powstaje pytanie, skąd pochodzą tony harmoniczne, w jaki sposób się wytwarzają? Aby to wyjaśnić, rozpatrzmy szczegółowiej drganie struny. Wyobraźmy sobie strunę napiętą stałą siłą F. Odchylmy strunę z położenia równowagi np. przez uderzenie młoteczkiem. Zacznie ona drgać wydając ton. Weźmy pod uwagę element struny o długości Δx odchylony z położenia równowagi (rys. 13.5). Jest on nieco zakrzywiony, tak że siły $-F$ i F działające na jego końce tworzą z osią X kąty α_1 i α_2. Składowe tych sił w kierunku osi Y będą

$$-F \sin \alpha_1 \quad \text{i} \quad F \sin \alpha_2.$$

Wypadkowa tych składowych wywoła przyśpieszenie rozważanego elementu. Ponieważ kąty α_1 i α_2 są bardzo małe, możemy napisać

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

(pochodna cząstkowa, gdyż y jest również funkcją czasu). Piszemy równanie Newtona dla tego przypadku. Jeżeli oznaczymy masę jednostki długości struny przez d, to masa elementu o długości Δx będzie $d\Delta x$. Iloczyn masy przez przyśpieszenie musi się równać sumie algebraicznej sił działających na ten element

$$d\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1) = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1\right], \tag{13.16}$$

stąd

$$d\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1}{\Delta x}. \tag{13.17}$$

Jeżeli będziemy brać pod uwagę coraz krótszy odcinek struny, Δx będzie dążyć do zera. W granicy otrzymamy

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{d}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \tag{13.18}$$

oznaczając $\frac{F}{d} = v^2$ otrzymamy ostatecznie równanie

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{13.19}$$

gdzie

$$v = \sqrt{\frac{F}{d}}. \tag{13.20}$$

Jest to zwykłe równanie fali. Wzdłuż pobudzonej do drgania struny biegną fale. Ponieważ dwa końce struny są unieruchomione, odbijają się one i muszą wytworzyć fale stojące.

Weźmy pod uwagę strunę, której jeden koniec znajduje się w początku współrzędnych, a więc ma odciętą $x_1 = 0$, drugi ma odciętą $x_2 = l$ (l jest więc długością struny). Niech po strunie biegną w obu kierunkach fale

$$y_1 = A\sin(\omega t + kx + \varphi), \qquad y_2 = A\sin(\omega t - kx - \varphi);$$

φ jest początkową fazą drgania. Dodajemy ją w tym celu, aby można było dopasować wzory do warunków tzw. brzegowych, to znaczy warunków iż początkowy i końcowy punkt struny są nieruchome. Biegnące fale interferują ze sobą. Wypadkowe wychylenie dowolnego punktu struny będzie

$$\begin{aligned} y = y_1 + y_2 &= A\sin(\omega t + kx + \varphi) + A\sin(\omega t - kx - \varphi) = \\ &= 2A\cos(kx + \varphi)\sin\omega t. \end{aligned} \tag{13.21}$$

Ponieważ zaś $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, więc otrzymamy

$$y = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi\right)\sin\omega t.$$

Amplituda drgań na końcach musi się równać zeru, zatem dla $x = 0$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}0 + \varphi\right) = 0,$$

zaś dla $x = l$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}l + \varphi\right) = 0.$$

Z pierwszego warunku otrzymujemy

$$\cos\varphi = 0, \quad \text{skąd} \quad \varphi = 90°,$$

z drugiego

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}l + 90°\right) = -\sin\frac{2\pi}{\lambda}l = 0.$$

Sinus kąta $\frac{2\pi}{\lambda}l$ jest równy zeru, gdy kąt ten jest wielokrotnością kąta $180° = \pi$.

Zatem

$$\frac{2\pi}{\lambda}l = n\pi, \quad \text{gdzie} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

skąd

$$l = n\frac{\lambda}{2}.$$

Wartość $n = 0$ jako niezgodną z warunkiem, że $l \neq 0$ musimy odrzucić. A więc dla

$$n = 1 \text{ otrzymujemy } l = \frac{\lambda_1}{2}, \quad \text{dla} \quad n = 2: \quad l = 2\frac{\lambda_2}{2};$$

$$\text{dla} \quad n = 3: \quad l = 3\frac{\lambda_3}{2}, \quad \text{dla} \quad n = 4: \quad l = 4\frac{\lambda_4}{2} \text{ itd.}$$

Wynika stąd, że fale stojące mogą się tylko wtedy wytworzyć, gdy na długości struny mieści się całkowita liczba połówek fali. Długości tych fal będą, jak to z ostatnich wzorów wynika, określone w sposób następujący:

$$\frac{\lambda_1}{2} = l; \quad \frac{\lambda_2}{2} = \frac{l}{2}; \quad \frac{\lambda_3}{2} = \frac{l}{3}; \quad \frac{\lambda_4}{2} = \frac{l}{4} \ldots$$

Tak zwany ton zasadniczy struny odpowiada najdłuższej fali, a więc drganiu o najmniejszej częstości. Ponieważ długość fali i częstość drgania związane są równaniem

$$\lambda = \frac{v}{f}, \quad \text{a} \quad v = \sqrt{\frac{F}{d}},$$

zatem

$$\lambda_1 = 2l = \frac{1}{f_1}\sqrt{\frac{F}{d}},$$

stąd

$$f_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{d}}.$$

Na drganie struny odpowiadające tonowi zasadniczemu otrzymamy wzór

$$y_1 = 2A \sin\frac{\pi}{l}x \sin 2\pi f_1 t = B_1 \sin\frac{\pi}{l}x \sin 2\pi f_1 t$$

($2A$ oznaczyliśmy przez B).

Rozwiązanie odpowiadające drugiej harmonicznej będzie

$$y_2 = B_2 \sin\frac{2\pi}{l}x \sin 2\pi f_2 t,$$

gdyż $\lambda_2 = l$. Ponieważ λ_2 jest dwa razy krótsza od λ_1, więc częstość f_2 zgodnie z wzorem $\lambda = \frac{v}{f}$ będzie dwa razy większa od f_1. Amplitudę drgania każdego poszczególnego punktu o odciętej x będzie określało wyrażenie

$$B \sin\frac{2\pi}{l}x.$$

Ponieważ dla $x = \frac{l}{2}$ $\sin\frac{2\pi}{l}\frac{l}{2} = \sin\pi = 0$, więc w środku struny utworzy się węzeł drgania, amplituda w tym punkcie będzie równa zeru. Punkt ten będzie nieruchomy. Struna również może się podzielić na trzy części, z których każda będzie drgać z częstością $f_3 = 3f_1$ ($n = 3$), na cztery części ($n = 4$), z których każda będzie drgać z częstością $4f_1$ itd. Będziemy mieli nieskończenie wiele możliwych drgań. Podobny stan rzeczy możemy zaobserwować na lince gumowej lub zwykłej. Jeżeli jeden jej koniec umocujemy nieruchomo i ująwszy drugi koniec w rękę wprawimy ją w powolny ruch wahadłowy, to możemy łatwo dobrać częstość poruszania tak, że linka będzie drgać jako całość. Gdy jednakże podwoimy częstość ruchów ręki, linka podzieli się na dwie części drgające w fazach przeciwnych. Między nimi utworzy się węzeł. Podobnie powiększywszy jeszcze dalej odpowiednio częstość ruchów ręki możemy spowodować utworzenie się dwóch węzłów dzielących linkę na trzy części drgające z częstością trzy razy większą itd. Pobudzając do drgania zbliżone widełki strojowe o odpowiedniej częstości lub opierając ich nóżkę na pudle, na którym naciągnięta jest struna, można ją także pobudzić do drgania jako całość albo też spowodować podzielenie się jej na dwie połówki drgające z częstością dwa razy większą, na trzy części drgające z częstością trzy razy większą itd. Przy grze na skrzypcach wywołuje się to przyciskając

lekko palcem strunę w miejscu, gdzie ma powstać węzeł. Wtedy struna dzieli się na pewną liczbę części, z których każda ma długość równą odległości palca od nieruchomego końca struny. Każdy odcinek drga z odpowiednio wysoką częstością. Są to tak zwane flażolety.

Z teorii równań różniczkowych wynika, że suma poszczególnych rozwiązań równania (całek szczególnych) daje ogólne rozwiązanie tego równania (całkę ogólną). To znaczy ogólnym rozwiązaniem równania (13.19) jest

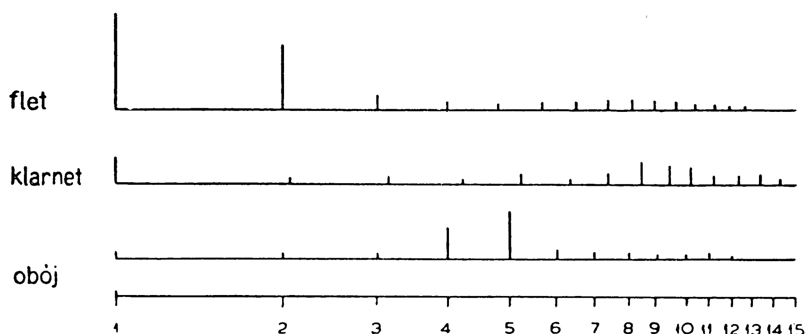
$$y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin (n\omega t + \varphi_n). \tag{13.22}$$

Struna pobudzona do drgania drga w ogólności w sposób bardzo złożony. Wśród drgań jej cząstek mamy drgania o najmniejszej częstości $f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{d}}$ określające wysokość dźwięku i zwane tonem zasadniczym oraz drgania o częstościach $2f$, $3f$, $4f$ itd., zwane tonami harmonicznymi. Zwykle zwracamy uwagę na ton zasadniczy, który jest jednocześnie najczęściej najsilniejszy (ma największą amplitudę, lecz nie zawsze). Na harmoniczne nie zwracamy zwykle uwagi, lecz dzięki ich istnieniu każdy instrument ma inne brzmienie, lub jak mówimy — barwę. Że istotnie struna wykonywa jednocześnie drgania rozmaitej częstości, można się przekonać doświadczeniem. Jeżeli strunę pobudzoną do drgania dotkniemy lekko palcem w środku, ton zasadniczy zniknie, a usłyszymy wyraźnie oktawę tonu zasadniczego, to znaczy ton o częstości dwa razy większej. Podobnie można usłyszeć ton o trzy razy wyższej częstości unieruchamiając punkt struny w odległości $^1/_3$ od jej końca. Są i inne sposoby stwierdzenia, że struna wydaje prócz tonu zasadniczego jednocześnie tony harmoniczne. Wprawne ucho może usłyszeć i odróżnić kilka pierwszych harmonicznych w dźwięku struny, przy specjalnym zwróceniu na nie uwagi.

Podobne zjawisko występuje przy wszelkich innych instrumentach. W piszczałce organowej np., w której za pomocą dmuchania pobudza się do drgania zawarty wewnątrz niej słup powietrza, drganie o najmniejszej częstości określa wysokość tonu. Lecz cząstki powietrza wewnątrz drgają w sposób skomplikowany dając szereg tonów harmonicznych. Podobnie szereg harmonicznych występuje przy dźwięku fletu czy klarnetu, czy waltorni. Każdy instrument daje harmoniczne o innym natężeniu i tu leży przyczyna, dla której tony różnych instrumentów się różnią. Ucho, chociaż może nawet nie odróżnia harmonicznych, odróżnia dzięki harmonicznym dźwięki rozmaitych instrumentów. Mówimy, że dźwięk każdego instrumentu ma swoistą barwę (timbre). Zresztą nawet przy tym samym instrumencie mogą często harmoniczne różnić się, zależy to np. od siły zadęcia przy instrumentach dętych, od miejsca, gdzie uderzymy strunę, przy instrumentach strunowych itd. Muzycy często z tego korzystają.

Ciekawą jest rzeczą, że fazy początkowe φ_0 poszczególnych drgań składowych nie odgrywają żadnej roli.

Aby łatwo się zorientować w częstości i natężeniu harmonicznych, przedstawiamy je w układzie współrzędnych, jak na rys. 13. 6. Na osi odciętych odkładamy częstość, na osi rzędnych — natężenie danego tonu harmonicznego.



Rys. 13.6. Tony harmoniczne różnych instrumentów

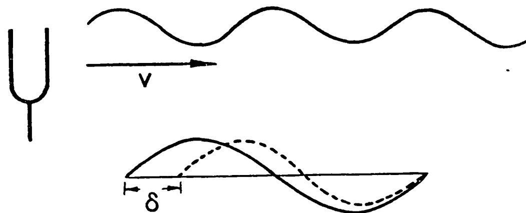
Zespół tonów harmonicznych stanowi tzw. widmo danego dźwięku (przypomina bowiem widmo liniowe optyczne). Na rysunku 13.6 przedstawiono zespół tonów harmonicznych fletu, klarnetu i oboju.

13.8. Głos ludzki, mowa. Zasadniczą częścią organu mowy są struny głosowe, wiązki mięśniowe umieszczone w gardle, rozsunięte, gdy nie mówimy, tak że powietrze może swobodnie między nimi przechodzić. Przy mówieniu struny głosowe napinają się schodząc się ze sobą. Pozostaje między nimi wąska szczelina. Gdy powietrze przechodzi przez szczelinę, struny głosowe drgają powodując powstanie fal dźwiękowych. Jama ustna i nosowa stanowią układ rezonatorów. Powietrze w tych przestrzeniach zawarte drga w sposób skomplikowany wydając dużą liczbę tonów różnej wysokości. Zmieniając układ języka, warg, zębów wydobywamy różne dźwięki obfitujące w silne i liczne harmoniczne. Dźwięki różnych samogłosek różnią się właśnie obecnością rozmaitych harmonicznych. Spółgłoski polegają na bardzo złożonych drganiach często bardzo dużej częstości powstających przy przechodzeniu powietrza między zębami, wargami, przy czym towarzyszą im często drgania końca języka i warg. Nie noszą one już charakteru tonów. Jest to często syk lub szum o nieokreślonej wysokości.

13.9. Słyszenie, ucho. Jak wiadomo, fale głosowe, fale zgęszczeń i rozrzedzeń powietrza dochodzące do naszych uszu wywołują wrażenie dźwięku. Budowa ucha jest dość skomplikowana. Składa się ono z trzech części: ucha zewnętrznego, środkowego i wewnętrznego. Ucho zewnętrzne składa się z małżowiny usznej nie odgrywającej w słyszeniu większej roli i przewodu głosowego, przez który fale dźwiękowe dochodzą do błony bębenkowej. Błona bębenkowa oddziela ucho środkowe od ucha zewnętrznego. Ucho środkowe zawiera układ

kosteczek składający się z młoteczka, kowadełka i strzemiączka, przenoszącego drgania wymuszone błony bębenkowej na błonę zamykającą owalne okienko ucha wewnętrznego. Najważniejszą częścią ucha wewnętrznego jest tzw. ślimak napełniony cieczą, wzdłuż skrętów którego rozciąga się błona podstawowa z narządem Cortiego. Składa się on z wielkiej liczby włókien poprzecznych rozmaitej długości i rozmaicie napiętych podobnie do strun fortepianu lub arfy. Wskutek tego mają one rozmaite częstości rezonansowe. Przy działaniu tonów złożonych drgają odpowiednio nastrojone włókna, dzięki czemu ucho ma zdolność rozkładania tonów złożonych na tony proste. Włókna połączone są z rozgałęzionymi zakończeniami nerwu słuchowego, które przenoszą bodźce do mózgu.

13.10. Zjawisko Dopplera. Rozpatrywaliśmy poprzednio rozchodzenie się fal zakładając, że tak źródło fal, jak i obserwator znajdują się w spoczynku. Jeżeli natomiast albo źródło fal, albo obserwator poruszają się względem nieruchomego środowiska, w którym rozchodzą się fale, wówczas obserwator stwierdzi inną częstość drgania niż w pierwszym przypadku. Zjawisko to występuje tak przy falach dźwiękowych, jak i przy wszystkich innych zjawiskach falowych. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy źródło fal, powiedzmy dźwiękowych, drgające z częstością f zbliża się z prędkością v do obserwatora nieruchomego.



Rys. 13.7. Poruszające się w kierunku biegu fal źródło dźwięku

Podczas każdego okresu drgania $T = \frac{1}{f}$ źródło wysyła jedną falę. Niech fala przemieszcza się dalej z prędkością c. Ponieważ w czasie T źródło przesunie się o odcinek $\delta = vT$ (rys. 13.7), wskutek tego fala skróci się o δ i będzie miała długość

$$\lambda' = \lambda - \delta = cT - vT = (c - v)T = \frac{c-v}{f}. \tag{13.23}$$

Ta zmieniona wskutek ruchu źródła długość fali będzie odpowiadała częstości f' związanej z λ' równaniem

$$\lambda' = \frac{c}{f'}. \tag{13.24}$$

Zważywszy, że $\lambda' = \frac{c-v}{f}$, otrzymamy równanie

$$\frac{c-v}{f} = \frac{c}{f'},$$

skąd

$$f' = \frac{fc}{c-v} = \frac{c}{c-v}f = \frac{1}{1-\frac{v}{c}}f.$$

Dzieląc 1 przez $1 - \frac{v}{c}$ otrzymamy

$$\frac{1}{1-\frac{v}{c}} = 1 + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2} + \ldots$$

Jeżeli się ograniczymy do prędkości małych w porównaniu z prędkością dźwięku, wówczas można zaniedbać trzeci i dalsze wyrazy rozwinięcia i otrzymamy

$$f' = \left(1 + \frac{v}{c}\right)f. \tag{13.25}$$

Jeżeli źródło dźwięku oddala się od obserwatora, wówczas podczas jednego okresu drgania oddali się o vT, o tyleż podłuży się fala. A więc długość fali będzie

$$\lambda' = \lambda + vT = cT + vT = (c+v)T.$$

Częstość odpowiadająca tej fali, jak zawsze, związana jest z jej długością równaniem $\lambda' = \frac{c}{f'}$, zatem $(c+v)\,T = \frac{c}{f'}$, czyli

$$\frac{c+v}{f} = \frac{c}{f'},$$

skąd

$$f' = \frac{c}{c+v}f = \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \cdot f$$

Dzieląc 1 przez $1 + \frac{v}{c}$ otrzymamy

$$\frac{1}{1+\frac{v}{c}} = 1 - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2} + \ldots$$

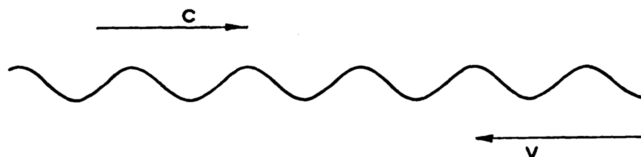
Gdy ograniczymy się do pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia, wówczas

$$f' = \left(1 - \frac{v}{c}\right)f. \tag{13.26}$$

Przypuśćmy teraz, że źródło dźwięku jest nieruchome, a obserwator zbliża się do niego z prędkością v (rys. 13.8). Przez punkt nieruchomy w 1 sec przebiega f

fal. Ponieważ obserwator przebędzie w przeciwnym kierunku w 1 sec drogę v, zatem napotka jeszcze $\frac{v}{\lambda}$ fal. Razem zaobserwuje $f + \frac{v}{\lambda}$ fal. Częstość przez niego obserwowana będzie

$$f' = f + \frac{v}{c} f = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f. \qquad (13.27)$$



Rys. 13.8. Obserwator poruszający się przeciwnie do biegu fal odbierze ich więcej niż nieruchomy

Przy oddalaniu się natomiast liczba fal, która go minie, będzie o tyleż mniejsza, to znaczy wtedy

$$f' = f - \frac{v}{c} f = \left(1 - \frac{v}{c}\right) f. \qquad (13.28)$$

Zjawisko Dopplera jest dość pospolite i łatwo je zaobserwować, jeżeli się na nie zwraca uwagę. Gdy się stoi przy torze kolejowym i gdy mija nas gwiżdżąca lokomotywa, wysokość tonu nagle się obniża w chwili mijania. Podobne zjawisko obserwuje się przy nieruchomym źródle dźwięku i poruszającym się obserwatorze. Gdy jadąc pociągiem mijamy gwiżdżącą lokomotywę stojącą na sąsiednim torze, wysokość tonu nagle się obniża w chwili mijania.

Zadania

13.1. Jaka jest prędkość fal dźwiękowych w wodorze (v_1) (gęstość wodoru = 0,00008988 g/cm^3, $\varkappa = 1{,}41$) oraz w azocie (v_2) (gęstość = 0,001251 g/cm^3, $\varkappa = 1{,}41$) pod ciśnieniem normalnym w temperaturze 0°C?

Odpowiedź: $v_1 = 1260$ m/sec, $v_2 = 338$ m/sec.

13.2. Jaka jest prędkość fal dźwiękowych w powietrzu pod ciśnieniem 760 Tr przy temperaturze +30°C, −20°C (gęstość powietrza w temperaturze 0°C 0,001293 g/cm^3)?

Odpowiedź: 351,1 m/sec, 319,3 m/sec.

13.3 Jaka jest prędkość fali dźwiękowej w pręcie szklanym (moduł Younga $E = 0{,}6 \cdot 10^6$ kG/cm^2, $\varrho = 2{,}7$ g/cm^3)?

Odpowiedź: 4669 m/sec.

13.4. Prędkość dźwięku w szynie stalowej $v = 5100$ m/sec. Jaki jest moduł Younga dla stali? (gęstość stali = 7,8 g/cm^3)

Odpowiedź: $E = 2{,}07 \cdot 10^6$ kG/cm^2.

13.5. Jaka jest długość fali dźwiękowej w powietrzu w warunkach normalnych ($v = 330$ m/sec), wytworzonej przez ton *a* 440 Hz oraz przez drgania o częstotliwości 4000 Hz i 30 Hz?

Odpowiedź: $\lambda_1 = 75$ cm, $\lambda_2 = 8{,}25$ cm, $\lambda_3 = 11$ m.

13.6. Struna stalowa (gęstość $\varrho = 7{,}8$ g/cm³) o średnicy 0,5 mm i długości 0,5 m napięta jest siłą 10 kG. Jaka jest częstość drgania tonu zasadniczego (pierwszej harmonicznej, drugiej i trzeciej harmonicznej)?

Odpowiedź: $f_1 = 253$ Hz, $f_2 = 506$ Hz, $f_3 = 759$ Hz.

13.7. Dwie jednakowe struny długości 1 m nastrojone są na ten sam ton. Gdy jedną strunę skróci się o 0,5 cm, wówczas występują dudnienia o częstości 2 Hz. Jaka była pierwotna częstość strun?

Odpowiedź: 398 Hz.

13.8. Dwie jednakowe struny długości 1 m i o masie 2,25 g każda zostały nastrojone na ten sam ton. Siła naciągająca jedną z nich osłabła o 1 kG. Powstały wówczas dudnienia o częstości 3 Hz. Jaka była częstość drgania strun przed rozstrojeniem?

Odpowiedź: 183,2 Hz.

13.9. Pociąg jadący z prędkością 72 km/godz mija stojącą lokomotywę wydającą gwizdkiem ton odpowiadający częstości 600 Hz. Jakiej częstości ton będzie słyszał podróżny jadący w pociągu przy zbliżaniu się i przy oddalaniu od gwiżdżącej lokomotywy (prędkość dźwięku 340 m/sec)?

Odpowiedź: 635,3 Hz, 564,7 Hz.

✓ **13.10.** Przechodzeń stojący na szosie słyszy dźwięk klaksonu zbliżającego się samochodu odpowiadający częstości 218 Hz. W rzeczywistości drganie wzbudzające dźwięk miało częstość 200 Hz. Jaka była prędkość samochodu (prędkość dźwięku w powietrzu $c = 340$ m/sec)?

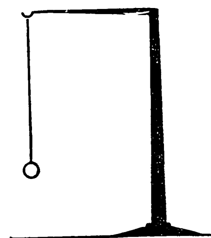
Odpowiedź: 110,2 km/godz.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Kiedy wytwarzają się dźwięki? Jaka jest różnica między tonem a dźwiękiem lub głosem?
2. Jakie zjawiska potwierdzają to, że dźwięk polega na rozchodzeniu się fal?
3. Jakie jest równanie fali dźwiękowej? Od czego zależy szybkość fali?
4. Od jakich wielkości zależy prędkość fali dźwiękowej w prętach?
5. Z czym jest związana wysokość tonu? Natężenie dźwięku?
6. W jakich jednostkach wyraża się stosunek natężeń 2 dźwięków?
7. Jakie jest równanie drgania struny? Od jakich wielkości zależy prędkość fali poprzecznej na strunie?
8. Z jakimi częstościami może drgać struna?
9. Od czego zależy barwa dźwięku?
10. Na czym polega zjawisko Dopplera? Jak zmienia się ton przy zbliżaniu się lub oddalaniu źródła dźwięku od obserwatora albo też przy przemieszczaniu się obserwatora względem źródła dźwięku?

14. Pole elektryczne statyczne

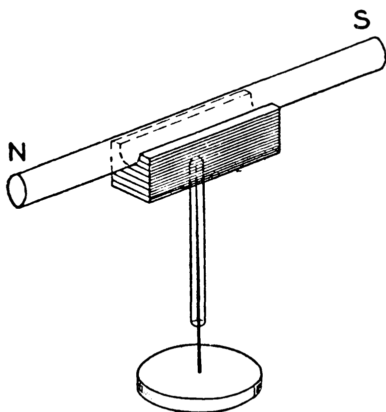
14.1. Elektryzowanie ciał. Przewodniki i izolatory. Elektroskop. Doświadczenia wykazują, że dwa ciała takie, jak np. bursztyn i jedwab, szkło i papier, celuloid i wełna, ebonit i futro i wiele innych potarte jedno o drugie uzyskują własności przyciągania małych, lekkich ciał, jak papierków, słomek itp. Mówimy, że ciała te elektryzują się przez potarcie. Najłatwiej okazać naelektryzowanie za pomocą tzw. wahadełka elektrycznego. Jest to lekka kulka z rdzenia bzowego zawieszona na niteczce jedwabnej (rys. 14.1).



Rys. 14.1. Wahadło elektryczne

Umieszczając pocierane laseczki na łatwo obracającej się podstawie (rys. 14.2) łatwo stwierdzamy, że dwie laski szklane potarte skórą lub papierem odpychają się, również dwie laski ebonitowe potarte futrem odpychają się, natomiast laska szklana i ebonitowa przyciągają się.

Doświadczenia wykazały, że inne ciała elektryzują się albo tak jak szkło, to znaczy odpychają szkło naelektryzowane, a przyciągają ebonit, albo tak jak ebonit potarty futrem i wtedy odpychają ebonit, a przyciągają szkło. Istnieje więc dwojaki sposób elektryzowania. Ciała elektryzujące się tak jak szkło potarte skórą nazywamy dodatnio, zaś elektryzujące się tak jak ebonit potarty futrem — ujemnie naelektryzowanymi.



Rys. 14. 2. Stwierdzenie przyciągania się lub odpychania ciał naelektryzowanych

Możemy krótko streścić te fakty w zdaniu: ciała jednoimiennie naelektryzowane odpychają się, różnoimiennie naelektryzowane — przyciągają się.

Można również wykazać, że skóra pocierana szkłem elektryzuje się ujemnie, futro pocierane ebonitem — dodatnio. Ciała pocierane jedno o drugie uzyskują, jak mówimy, ładunki elektryczne różnych znaków.

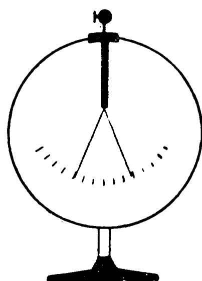
Ciała, które trzymane ręką dadzą się naelektryzować i przez dłuższy czas wy-

kazują stan naelektryzowania, nazywamy izolatorami. Znaczna liczba ciał, przede wszystkim wszystkie metale, dadzą się naelektryzować tylko wtedy, gdy są osadzone na izolatorze. A więc np. kula z blachy cynkowej osadzona na pręcie szklanym i natrzepana futrem elektryzuje się. Tak samo inne metale możemy naelektryzować tylko przy odizolowaniu od ręki. Metale możemy naelektryzować nie tylko przez potarcie. Jeżeli kulę metalową dotknę naelektryzowaną laską szklaną lub ebonitową, to uzyska ona ładunek tego samego znaku co laska. Ciała takie, jak metale, nazywamy przewodnikami. Można wykazać za pomocą np. wahadełka elektrycznego, że ładunek wprowadzony w którymkolwiek miejscu na przewodnik rozlewa się na nim wszędzie, natomiast na izolatorze pozostaje tylko w tym miejscu, w którym został wzbudzony. Do przewodników prócz metali należy węgiel, ciało ludzkie i wiele innych ciał.

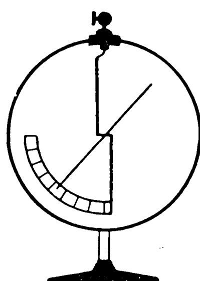
Elektryzowanie się ciał przez potarcie przypisujemy ładunkom elektrycznym powstającym w miejscach, gdzie jedno ciało stykało się z drugim. W gruncie rzeczy ładunki nie powstają, tylko się rozdzielają, gdyż oba pocierane ciała uzyskują ładunki przeciwnych znaków.

Jeżeli na kulkę metalową osadzoną na izolującym trzonku wprowadzimy najpierw ładunki dodatnie, a następnie ujemne, można te ładunki tak dobrać, że kulka nie będzie wywierać żadnych działań elektrycznych. Ładunki przeciwnych znaków mogą się zobojętniać, znosić.

Przewodniki możemy elektryzować tak dodatnio jak i ujemnie przez dotknięcie odpowiednio naelektryzowanym ciałem. Można ten stan zniszczyć, czyli, jak mówimy, rozbroić je przez dotknięcie ręką. Ładunki odpływają wtedy przez ciało do ziemi.



Rys. 14. 3. Elektroskop dwulistkowy



Rys. 14. 4. Elektroskop Brauna ze wskazówką aluminiową

Do wykazania stanu naelektryzowania ciał używamy często elektroskopu, przyrządu składającego się z puszki metalowej, wewnątrz której umieszczone są dwa lekkie listki z cieniutkiej folii metalowej. Listki wiszą na pręcie metalowym wychodzącym na zewnątrz, odizolowanym od puszki. Przy dotknięciu pręta ciałem naelektryzowanym ładunki przenoszą się na pręt i listki, które wówczas jako ciała jednoimiennie naelektryzowane rozchylą się wskutek odpychania (rys. 14.3). Zamiast dwóch listków bywa jeden zawieszony na dłuższym pręcie albo lekka wskazówka aluminiowa (rys. 14.4).

14. 2. Wielkość ładunku elektrycznego. Prawo Coulomba. Dwa ładunki są sobie równe, jeżeli na trzeci z tej samej odległości działają tą samą siłą. Wprowadzając na kulkę metalową dwa jednakowe ładunki stwierdzimy, że kulka będzie

wywierała dwa razy większe siły na inne ładunki niż przy ładunku pojedynczym. Przy wprowadzeniu na kulkę n takich samych ładunków siły wywierane przez kulkę na inne ładunki wzrosną n razy. Zatem siły wywierane przez ciało naelektryzowane na inne ciała naelektryzowane są proporcjonalne do nagromadzonego na nim ładunku. Odwrotnie zatem możemy porównywać ładunki ciał porównując siły przez nie wywierane na jakieś ciało o dowolnym ładunku. Oznaczając ładunki ciał przez $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, siły zaś przez nie wywierane na daną kulkę naelektryzowaną przez $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ możemy napisać

$$Q_1 : Q_2 : \ldots : Q_n = F_1 : F_2 : \ldots : F_n.$$

Aby móc określać ładunki liczbowo, musimy określić jeszcze jednostkę ładunku.

Zależność siły działającej między dwoma ciałami naelektryzowanymi (o bardzo małych rozmiarach w porównaniu do ich odległości) wykrył doświadczalnie Coulomb za pomocą swojej wagi skręceń. Stwierdził on, że siły te są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu ich odległości. Obie powyżej wymienione zależności możemy ująć za pomocą jednego wzoru:

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \tag{14.1}$$

gdzie r oznacza odległość między ciałami o ładunkach Q_1 i Q_2. Ciała te powinny być tak małe, aby wobec odległości między nimi można je było uważać za punkty. Wzór ten wyraża tzw. prawo Coulomba. Współczynnik proporcjonalności k zależy od wyboru jednostek. Ponieważ jednostka ładunku nie została jeszcze obrana, możemy więc albo umówić się co do wartości tej jednostki, albo co do wartości współczynnika k. W układzie jednostek zwanym układem elektrostatycznym CGS (w skrócie ES) za jednostkę ładunku przyjmuje się taki ładunek (punktowy), który na równy sobie działa w próżni z odległości 1 cm siłą jednostkową w układzie CGS, tj. siłą 1 dyny. Widać z powyższego wzoru, że przy takim dobraniu jednostek współczynnik $k = 1$ i prawo Coulomba przybiera prostszą postać:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \tag{14.2}$$

Wzór powyższy odnosi się do próżni. Lecz powietrze pod względem własności elektrycznych tak mało różni się od próżni, że stosując wzór ten do ładunków w powietrzu popełniamy błąd bardzo mały.

Z wzoru Coulomba przy założeniu, że $Q_1 = Q_2 = Q$, otrzymamy na Q wzór

$$Q = r\sqrt{F}, \tag{14.3}$$

z którego możemy obliczyć wymiar ładunku elektrycznego

$$[Q] = l\sqrt{ml\,t^{-2}} = m^{1/2}\, l^{3/2}\, t^{-1}.$$

Obecnie coraz częściej wprowadza się w nauce jednostki układu zwanego dawniej praktycznym, obecnie zaś układem MKSA. Jest to czterojednostkowy układ jednostek, w którym podstawowymi jednostkami są: metr, kilogram, sekunda

i amper. Szczegóły odnoszące się do tego układu będą wyjaśnione później. W układzie tym używamy jako jednostki ładunku zwanego kulombem, skrót C. Ze znacznym przybliżeniem można przyjąć, że

$$1\ \mathrm{C} = 3 \cdot 10^9\ \text{j. ES}.$$

Inne wielkości wchodzące do wzoru Coulomba wyrażamy w jednostkach układu MKS. W tym układzie współczynnik proporcjonalności k we wzorze Coulomba oczywiście nie równa się już jednostce. Przyjmuje się obecnie wprowadzając nową wielkość ε_0, że

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0},$$

gdzie ε_0 nosi nazwę przenikalności elektrycznej próżni. A więc prawo Coulomba w tym układzie jednostek wyrazi się wzorem

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \tag{14.4}$$

gdzie Q_1 i Q_2 powinny być wyrażone w kulombach, r — w metrach, F — w niutonach. Aby obliczyć, jaką wartość w tym wzorze powinna mieć wielkość ε_0, podstawmy $Q_1 = 1$ C, $Q_2 = 1$ C, $r = 1$ m, wówczas

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \text{niutonów}.$$

Obliczmy, jaką wartość musi mieć ε_0. Ponieważ $1\ \mathrm{C} = 3 \cdot 10^9$ j. ES, zatem możemy napisać w układzie ES:

$$F = \frac{3 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^9}{100^2} = 9 \cdot 10^{14}\ \text{dyn} = 9 \cdot 10^9\ \text{niutonów}.$$

Jak widać więc, dwa ładunki punktowe, z których każdy równy jest kulombowi znajdując się w odległości 1 metra jeden od drugiego w próżni odpychałyby się lub przyciągały z ogromną siłą $9 \cdot 10^9$ niutonów, czyli około 918 milionów kG.

Aby taki wynik dał bezpośrednio wzór (14.4), musimy na ε_0 przyjąć wartość określoną wzorem

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9,$$

skąd

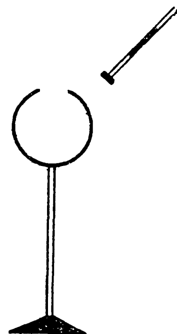
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}. \tag{14.5}$$

Przyjąwszy taką wartość na ε_0 otrzymamy bezpośrednio wynik na siłę z wzoru (14.4) przy podstawieniu na Q_1, Q_2 i r jednostek układu MKSA:

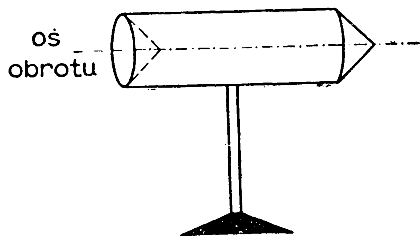
$$F = \frac{1}{4\pi \cdot \dfrac{1}{36\pi \cdot 10^9}} = 9 \cdot 10^9\ \mathrm{N}.$$

Układ jednostek i wzorów, w którym do prawa Coulomba wprowadzamy w mianowniku czynnik 4π nazwano „zracjonalizowanym”. Czynnik ten wprowadził po raz pierwszy fizyk angielski Heaviside (czyt. Hewisajd) wychodząc z założenia, że wówczas w pewnej liczbie wzorów znika czynnik π (lecz zjawia się w niektórych, w których go nie było w zwykłym układzie).

14.3. Siedziba ładunku elektrycznego. Gęstość ładunku. Jak już poprzednio była o tym mowa, przewodnik (np. kulę metalową osadzoną na izolującym trzonku) możemy naelektryzować przez dotknięcie innym ciałem naelektryzowanym. Aby się przekonać, gdzie znajdują się ładunki wprowadzone na przewodnik, sporządzamy z blachy kulę pustą wewnątrz z małym otworkiem u góry (rys. 14.5). Po naelektryzowaniu jej badamy, gdzie znajdują się ładunki, za pomocą tzw. krążka próbnego, tj. małego krążka metalowego osadzonego na izolującej rączce. Dotykając różnych miejsc powierzchni oraz wnętrza kuli, a następnie elektroskopu łatwo się przekonamy, że z powierzchni przewodnika krążek zabiera ładunki, natomiast wnętrze nie wykazuje zupełnie ładunków. Ładunki zawsze znajdują się tylko na powierzchni przewodników. Krążek próbny nie tylko z wnętrza przewodnika nie zabiera żadnych ładunków, ale nawet traci swój ładunek, jeżeli go posiadał. Jeżeli więc do wnętrza kuli wprowadzimy krążek próbny naładowany i dotkniemy nim ścianki, krążek traci ładunek, który przejdzie w całości na powierzchnię kuli. W ten sposób wprowadzając pewną liczbę razy do wnętrza przewodnika krążek próbny, niosący zawsze ten sam ładunek, mamy możliwość umieszczenia na kuli ładunku będącego wielokrotnością pewnego określonego ładunku.



Rys. 14.5. Ładunki znajdują się tylko na zewnętrznej powierzchni przewodnika



Rys. 14.6. Gęstość ładunku na przewodniku o nieregularnej powierzchni jest rozmaita

Gdy z różnych miejsc powierzchni przewodnika, takiego kształtu np. jak na rys. 14.6, będziemy zabierać ładunki za pomocą krążka próbnego i badać je elektroskopem, okaże się, że będą one rozmaite, zależnie od tego, z którego miejsca powierzchni je zbierzemy. Największy ładunek zabierze krążek z ostrego końca, nieco mniejszy z powierzchni walcowej, najmniejszy — z powierzchni wgłębionej do środka. Zatem ładunki elektryczne znajdują się w różnych ilościach na elementach powierzchni danej wielkości; ich zagęszczenie jest rozmaite.

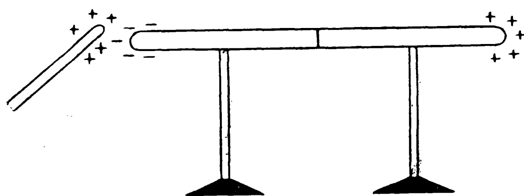
Gęstością powierzchniową średnią ładunku nazywamy stosunek

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \tag{14.6}$$

gdzie ΔQ oznacza ładunek znajdujący się na elemencie powierzchni ΔS. Gęstością ładunku w punkcie A nazywamy granicę tego stosunku dla elementu ΔS dążącego do zera. Oczywiście musi on stale zawierać punkt, w którym chcemy określić gęstość ładunku.

Gęstość powierzchniowa ładunku zależy od kształtu powierzchni. Im bardziej wypukła jest powierzchnia i im większą ma krzywiznę, tym gęstość ładunku jest na niej większa.

14. 4. Elektryzowanie przez influencję albo przez indukcję. Zbliżając naelektryzowaną pałeczkę szklaną do elektroskopu łatwo zauważymy, że wskazówka elektroskopu odchyla się, zanim dotkniemy jego gałki. Lecz to wychylenie jest chwilowe i po oddaleniu laski znika. Gdy do walca metalowego złożonego z dwóch zetkniętych ze sobą części zbliżymy laskę szklaną naładowaną, po czym oddzielimy te połowy jedną od drugiej, to okaże się, że obie połowy są naelektryzowane: część zbliżona do laski szklanej ujemnie, oddalona — dodatnio (rys. 14. 7). Mówimy, że przewodnik ten został naelektryzowany przez influencję albo przez indukcję.



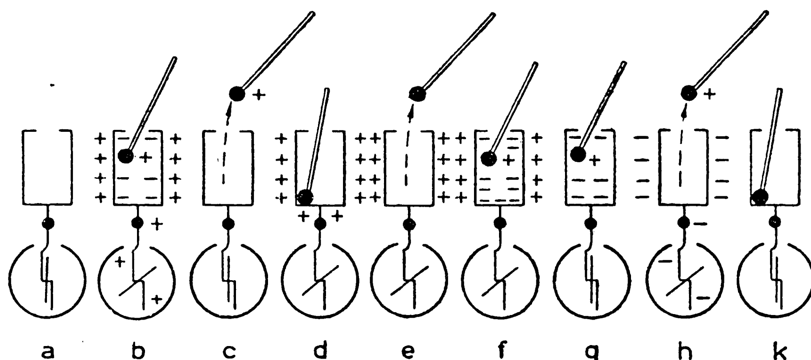
Rys. 14. 7. Elektryzowanie przez indukcję

Możemy również wywołać naelektryzowanie walca nie rozsuwając jego części. Wystarczy po zbliżeniu laski szklanej naelektryzowanej dotknąć przewodnika palcem. Ładunki dodatnie, tzw. swobodne, odpłyną przez palec i ciało do ziemi, pozostaną zaś ujemne zwane związanymi. Po usunięciu palca i oddaleniu laski walec pozostaje ujemnie naelektryzowany.

Elektryzowanie się przewodników przez indukcję tłumaczymy przyjmując, że w przewodniku nienaelektryzowanym znajdują się ładunki elektryczne dodatnie i ujemne w równych i bardzo wielkich ilościach. Zbliżenie ciała naelektryzowanego wywołuje rozsunięcie ładunków: ładunki tego samego znaku jak u ciała indukującego oddalają się od niego jak najdalej, ujemne — przyciągane — zbierają się na zbliżonym końcu.

Przyciąganie przez ciała naelektryzowane ciał nienaelektryzowanych, np. kulki wahadełka elektrycznego, tłumaczy się powstawaniem na tych ostatnich ładunków przez indukcję. Na zbliżonych do ciała naelektryzowanego częściach powstaje ładunek przeciwnego znaku, przyciągany, na dalszych częściach ładunek tego samego znaku — odpychany. Przyciąganie ładunków różnoimiennych — jako bliższych — zyskuje przewagę.

Chcąc określić, w jakich ilościach powstają ładunki indukcyjne, powodujemy ich powstawanie za pomocą indukcji od wnętrza w tzw. puszce Faradaya. Jest to puszka metalowa z małym otworkiem u góry, którą możemy osadzić na elektroskopie. Przez ten otwór możemy wprowadzić do środka małą kuleczkę metalową osadzoną na izolującym pręciku (rys. 14.8a). Ładujemy kulkę za pomocą np. na-



Rys. 14.8. Doświadczenia z puszką Faradaya nad powstawaniem ładunków indukcyjnych

elektryzowanej laski szklanej, po czym wprowadzamy ją do puszki (b). Wskazówka elektroskopu odchyli się. Po usunięciu kulki wskazówka wraca do położenia zerowego (c). Wkładamy ponownie kulkę naelektryzowaną. Wskazówka znowu się odchyla tak samo jak poprzednio. Dotykamy kulką wewnętrznej ściany puszki (d). Wychylenie wskazówki nie zmieni się. Nie zmieni się nawet po wyjęciu kulki z puszki (e). Natomiast łatwo stwierdzimy, że kulka została pozbawiona ładunku.

Wprowadźmy jeszcze raz kulkę naładowaną do wnętrza puszki (f). Wskazówka elektroskopu odchyli się. Dotknijmy teraz puszki palcem. Wskazówka wróci do zera (g). Po odjęciu palca i wyjęciu kulki wskazówka wróci do poprzedniego odchylenia (h). Wreszcie gdy jeszcze raz wprowadzimy z powrotem kulkę do środka i dotkniemy nią ścianki puszki, i odchylenie wskazówki zniknie (k). Przebieg tych doświadczeń wyjaśniony jest na rys. 14.8. Kulka wprowadzona do wnętrza puszki wzbudza na wewnętrznych jej ściankach ładunki przeciwnego znaku, zaś na zewnętrznej powierzchni powstają przez indukcję ładunki tego samego znaku co na kulce. Ładunki te są równe co do wartości bezwzględnej, jak również równe ładunkowi indukującemu. Dochodzimy więc do wniosku, że przy elektryzowaniu przez indukcję powstają zawsze równoważne ilości elektryczności dodatniej i ujemnej. Ładunkom nagromadzonym na przewodnikach znajdujących się w pokoju towarzyszą zawsze ładunki przeciwnego znaku indukcyjne na wewnętrznych ścianach pokoju. Ładunki tego samego znaku odpływają do ziemi.

Można sprawdzić także, że przy elektryzowaniu, jak mówimy, przez pocieranie również powstają ładunki dodatnie i ujemne w ilości równoważnej. Umieszczając np. kawałek skóry na izolatorze i pocierając nią laskę szklaną można

stwierdzić, że laska elektryzuje się dodatnio, skóra — ujemnie. Faraday wykonywał podobne doświadczenia w skrzyni oklejonej staniolem połączonej z elektroskopem, a więc w wielkiej puszce Faradaya. Elektroskop nigdy nie wykazywał żadnego odchylenia przy wytwarzaniu wewnątrz ładunków przez pocieranie dwóch ciał, to znaczy, że powstające przy tym ilości elektryczności są przeciwnych znaków i dokładnie równe co do ilości.

14.5. Atomizm elektryczności. Zasada zachowania elektryczności. Jak wiadomo, wszystkie ciała zbudowane są z atomów. Wiemy obecnie, że atomy złożone są z jeszcze mniejszych części. Każdy atom składa się z jądra o bardzo małych rozmiarach posiadającego ładunek dodatni oraz otaczających go elektronów, ciałek nadzwyczaj małych, o masie znikomo małej nawet wobec masy najlżejszego z atomów, atomu wodoru. Ładunek, jaki niesie każdy elektron, ujemny i zawsze jednakowy, jest stosunkowo olbrzymi. Elektrony w metalach mogą się poruszać niemal swobodnie między atomami. Porównywano dawniej elektryczność do cieczy, którą można przelewać z jednego ciała do drugiego. Słuszniej byłoby porównać ją do nadzwyczaj subtelnego gazu, złożonego z elektronów, jak gdyby atomów elektryczności. One to przenoszą ładunki z jednych ciał na drugie. W izolatorach elektrony są związane z atomami czy też drobinami i nie mogą się przemieszczać z miejsca na miejsce. Jednak przy zetknięciu się ciał, np. przy potarciu ebonitu futrem, pewna ich ilość przenosi się z futra na ebonit powodując jego ujemne naelektryzowanie. Elektryczność dodatnia, jak dziś wiemy, jest związana z atomami i tylko razem z nimi może się przemieszczać. Jednak często pewne zjawiska można tak ujmować, jak gdyby możność przenoszenia się miały tak ładunki ujemne, jak i dodatnie. Będziemy to nieraz robić.

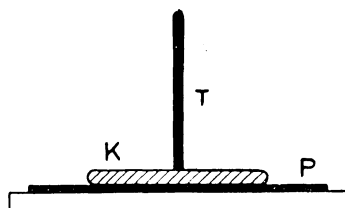
Powiedzieliśmy poprzednio, że przy elektryzowaniu ciał przez potarcie, czy też przez indukcję, ilości powstającej elektryczności dodatniej i ujemnej są dokładnie równe sobie. Możemy tylko ładunki znajdujące się w ciałach rozdzielać, nie możemy ich wytwarzać. Doświadczenia zawsze potwierdzają ten fakt. Możemy więc wypowiedzieć ogólną zasadę noszącą nazwę zasady zachowania elektryczności: elektryczności nie możemy ani stworzyć, ani zniszczyć; suma algebraiczna ładunków elektrycznych w układzie odosobnionym jest niezmienna i wieczna. Można ją zmienić jedynie przez wprowadzenie z zewnątrz jakiegoś ładunku.

Zasada ta, jedna z najdonioślejszych w fizyce, odgrywa w nauce o elektryczności rolę podobną do zasady zachowania masy w mechanice.

14.6. Elektrofor. Maszyna elektrostatyczna influencyjna Whimshursta. Na zasadzie rozdzielania ładunków elektrycznych w przewodnikach przez działania indukcyjne zbudowane są rozmaite przyrządy służące do elektryzowania. Jednym z najprostszych jest elektrofor. Składa się on z płyty z ebonitu P oraz krążka metalowego K osadzonego na izolującym trzonku T (rys. 14.9).

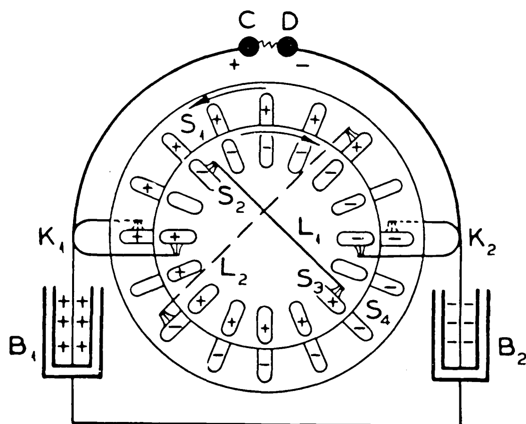
Płyta ebonitowa potarta futrem elektryzuje się ujemnie i wzbudza ładunki indukcyjne na krążku K (ponieważ krążek ten w kilku punktach zaledwie styka

się z płytą ebonitową, ładunki z niej bezpośrednio zebrane nie odgrywają roli). Jednak krążek ten, zdjęty z płyty ebonitowej, nie będzie wykazywał żadnego ładunku, gdyż znajdujące się na nim ładunki przeciwnych znaków zobojętniają się. Jeżeli natomiast przed zdjęciem krążka połączymy go na chwilę z ziemią przez dotknięcie palcem, wówczas po odjęciu krążek wykazywać będzie stosunkowo silne naelektryzowanie, będzie dawać wyraźne iskierki. Przez dotknięcie palcem odprowadzamy ładunki swobodne, ujemne, do ziemi, pozostają zaś na nim dodatnie.



Rys. 14.9. Elektrofor

Do uzyskiwania stosunkowo znacznych ładunków i do różnych doświadczeń elektrostatycznych używa się maszyn influencyjnych. Najpospoliciej używana maszyna Whimshursta (czyt. Uimshersta) składa się z dwóch ebonitowych krążków osadzonych równolegle, w bardzo małym odstępie jeden od drugiego, które kręcą się poruszane korbą w dwóch przeciwnych kierunkach. Na zewnętrznej stronie każdego krążka naklejone są sektory ze staniolu, jak na rys. 14.10. Tylny krążek jest narysowany większy niż przedni, żeby znajdujące się na nim sektory były widoczne. Przed każdym krążkiem znajduje się metalowy pręt, łącznik, opatrzony na swych dwóch końcach w miotełki z cienkich drucików metalowych dotykających płyty, nachylony do poziomu pod kątem 45°.



Rys. 14.10. Maszyna elektrostatyczna influencyjna Whimshursta

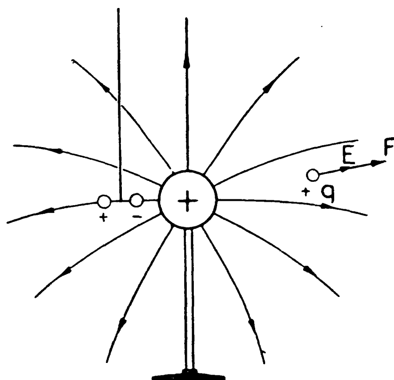
Jeżeli którykolwiek z sektorów jednej płyty, powiedzmy S_1, posiada jakiś przypadkowy, choćby bardzo nieznaczny ładunek, dajmy na to, dodatni, to znalazłszy się naprzeciwko sektora S_2 wzbudzi na nim przez indukcję ładunek ujemny oraz na połączonym z nim łącznikiem L_1 sektorze S_3 — ładunek dodatni. Ponieważ sektory te poruszają się w kierunkach wskazanych na rysunku strzałką, połączenie między nimi przerwie się. Sektor S_2 uniesie ładunek ujemny, sektor S_3 — dodatni. Znalazłszy się naprzeciwko sektorów połączonych łącznikiem L_2 wzbudzą na nich wzmocnione już ładunki, które, uniesione, znalazłszy się naprzeciwko łącznika L_1 znowu wzbudzą ładunki indukcyjne na sektorach przeciwnej płyty itd. Ładunki nagromadzone na sektorach szybko rosną.

Na średnicy poziomej osadzone są dwa pałączki metalowe, kolektory, obejmujące obie płyty, dotykające się sektorów miotełkami metalowymi. Jak łatwo

stwierdzić z rysunku, do kolektora K_1 sektory obu płyt niosą ładunki dodatnie, do kolektora K_2 — ujemne. Kolektory zbierają ładunki, które nagromadzają się na nich oraz na kulkach C i D, ewentualnie na połączonych z nimi butelkach lejdejskich B_1 i B_2 (o butelkach lejdejskich będzie mowa później). Wreszcie między kulkami C i D uderza silna iskra.

14.7. Pole elektryczne. Natężenie pola. Przestrzeń otaczającą przewodnik naelektryzowany, w której na ładunki elektryczne wywierane są siły, a przewodniki elektryzują się przez indukcję, nazywamy polem elektrycznym.

Jeżeli w pobliżu ciała naelektryzowanego umieścimy mały ładunek punktowy, który często nazywają próbnym, i następnie będziemy go posuwali w kierunku działającej nań siły, to ładunek ten zakreśli nam tzw. linię natężenia pola elektrycznego. Linię taką możemy również otrzymać prowadząc podwójny ładunek punktowy, tzw. dipol, złożony np. z dwóch malutkich kuleczek osadzonych na izolującym pręciku i zawieszonych na cienkiej niteczce, naelektryzowanych różnoimiennie. Prowadząc taki dipol w kierunku ustawiania się jego osi otrzymamy również rysunek linii elektrycznego natężenia (rys. 14.11). Linii takich możemy wykreślić w przestrzeni dowolnie wiele. Przypisujemy im kierunek od ładunku dodatniego do ujemnego. Ponieważ każdy ładunek elektrycznk związany jest zawsze z ładunkiem indukcyjnym przeciwnego znaku, zatem linie zawsze zaczynają się na ładunkach dodatnich, a kończą na ujemnych. Zarysy linii elektrycznych można otrzymać naklejając na płytkach szklanych kawałki staniolu różnych kształtów, ładując je, a następnie posypując płytkę szklaną proszkiem otrzymanym przez rozdrobnienie kryształów gipsu. Na rysunku 14.12 znajdują się przykłady linii elektrycznych o rozmaitym przebiegu.

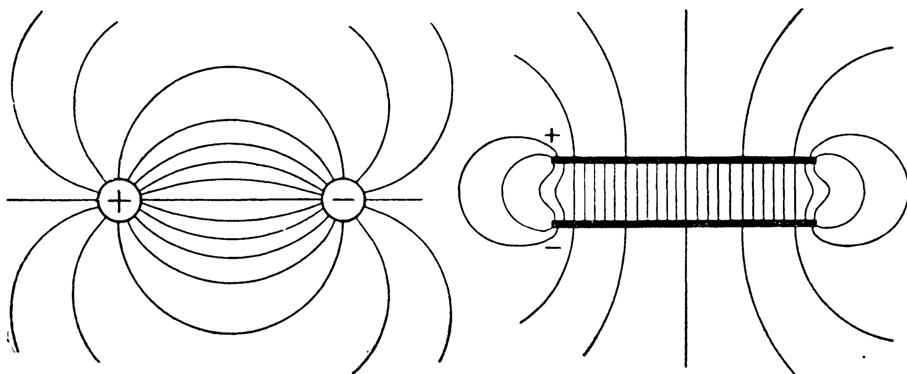


Rys. 14.11. Wykreślanie linii elektrycznego natężenia

Siły wywierane w polu na pewien określony ładunek elektryczny $+q$ zależą oczywiście od wielkości tego ładunku oraz od miejsca w którym znajduje się ten ładunek. Weźmy pod uwagę pole otaczające np. kulę naelektryzowaną mającą ładunek $+Q$ (rys. 14.11). Umieśćmy w jakimś punkcie pola ładunek próbny $+q$. Siła działająca na ten ładunek jest według prawa Coulomba proporcjonalna do wielkości tego ładunku. Niech wielkość tej siły będzie F. W takim razie stosunek tej siły do ładunku q:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}} \tag{14.7}$$

jest już niezależny od ładunku q, a zależy jedynie od miejsca, w którym znajduje się ładunek q. Stosunek ten określa nam *natężenie pola elektrycznego*, nazywane też wektorem elektrycznym. Natężenie pola jest wektorem, którego kierunkiem



Rys. 14.12. Linie elektrycznego natężenia

jest kierunek siły działającej na dodatni ładunek próbny. Natężenie pola elektrycznego jest funkcją tylko współrzędnych określających położenie badanego punktu:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z).$$

Natężenie pola $E = 1$ jednostce elektrostatycznej (ES), gdy na ładunek równy jednostce elektrostatycznej wywierana jest siła równa 1 dynie. Jednostkę tę moglibyśmy również nazwać $g^{1/2}\ cm^{-1/2}\ sec^{-1}$. Wymiar wielkości E łatwo obliczyć z równania:

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{[m\, l\, t^{-2}]}{[m^{1/2}\, l^{3/2}\, t^{-1}]} = m^{1/2}\, l^{-1/2}\, t^{-1}.$$

W układzie MKSA natężenie pola $E = 1$, gdy na ładunek 1 C działa siła 1 N. Możemy łatwo obliczyć, że

$$1 \text{ jednostka układu MKSA} = \frac{1\text{ N}}{1\text{ C}} = \frac{10^5 \text{ dyn}}{3 \cdot 10^9 \text{ j. ES}} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ j. ES}.$$

Siłę wywieraną gdziekolwiek w polu daje nam związek

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}.} \tag{14.8}$$

Pole elektryczne niezmienne w czasie nazywamy polem elektrostatycznym. W przybliżeniu takim polem elektrostatycznym jest pole wokół dobrze izolowanego od otoczenia przewodnika naelektryzowanego. Pole zmieniające się w czasie nazywamy polem zmiennym. Takim polem zmiennym jest np. pole elektryczne rozciągające się nad Ziemią w atmosferze. Także naokoło anteny stacji radiowej nadawczej rozciąga się pole zmienne.

Wektory elektryczne pochodzące od większej liczby ładunków dodaje się według zasad dodawania wektorów.

Pole elektrostatyczne może istnieć tylko w próżni oraz w izolatorach zwanych także dielektrykami.

W przypadku gdy na przewodniku znajdują się ładunki elektryczne w s p o c z y n k u, wewnątrz niego nie może istnieć pole elektryczne, ponieważ ładunki swobodne znajdujące się w przewodniku natychmiast zaczęłyby się przemieszczać. W przypadku równowagi ładunków przewodnik lub nawet metalowa osłona wewnątrz pusta zawierają przestrzeń, w której natężenie pola

$$\vec{E} = 0$$

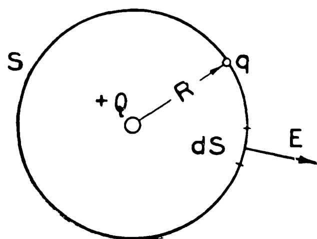
(jeżeli do wewnątrz osłony nie wprowadzimy ładunku na przewodniku odizolowanym od osłony). Przyrządy umieszczone wewnątrz metalowej osłony nie odczuwają żadnych działań zewnętrznych ładunków. Na osłonie powstają wtedy ładunki przeciwnego znaku, na których kończą się linie elektrycznego natężenia.

Natężenie pola przy powierzchni przewodnika musi być wszędzie normalne do tej powierzchni. Składowa styczna nie może istnieć, bo natychmiast wywołałaby ruch ładunków na powierzchni.

Reasumując możemy powiedzieć, że we wnętrzu przewodnika $\vec{E} = 0$, a na powierzchni składowa styczna $\vec{E}_{st} = 0$.

Iloczyn natężenia pola elektrycznego przez pole elementu powierzchni dS ustawionego normalnie do wektora $\vec{E}$ i tak małego, aby można było uważać $\vec{E}$ w tym elemencie za stałe, nazywamy strumieniem albo przepływem wektora $\vec{E}$ przez powierzchnię dS. Oznaczając przepływ przez $d\psi$ możemy napisać:

$$d\psi = E\,dS. \tag{14.9}$$



Rys. 14.13. Strumień natężenia pola przez powierzchnię otaczającą ładunek Q

W przypadku, gdy element dS nie jest normalny do E, określenie przepływu jest następujące:

$$d\psi = E_n\,dS, \tag{14.10}$$

gdzie $E_n = E\cos(E, n)$ jest składową normalną do elementu dS wektora $\vec{E}$, równą iloczynowi wektora $\vec{E}$ przez cosinus kąta między nim i normalną $\vec{n}$ do elementu.

Wyobraźmy sobie jakiś przewodnik małych rozmiarów w przestrzeni pustej niosący ładunek dodatni Q (rys. 14.13). Natężenie pola w odległości R od przewodnika daje nam związek $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$.

Ponieważ według prawa Coulomba

$$F = \frac{Qq}{R^2},$$

gdzie q jest ładunkiem próbnym, na natężenie pola w odległości R do przewodnika otrzymamy wzór

$$E = \frac{Q}{R^2}. \tag{14.11}$$

Wyobraźmy sobie teraz powierzchnię kulistą S o promieniu R otaczającą ładunek Q. Strumień wektora $\vec{E}$ przez powierzchnię zamkniętą będzie sumą strumieni przez wszystkie elementy tej powierzchni:

$$\psi = E\,dS_1 + E\,dS_2 + \ldots = E(dS_1 + dS_2 \ldots) = ES = E4\pi R^2. \tag{14.12}$$

Podstawiając na E jego wartość z równania (14.11) otrzymamy

$$\psi = \frac{Q}{R^2}\,4\pi R^2 = 4\pi Q. \tag{14.13}$$

Strumień wektora $\vec{E}$ przez powierzchnię kulistą otaczającą ładunek Q równa się $4\pi Q$. Można udowodnić, że ten strumień przez powierzchnię zamkniętą dowolnego kształtu otaczającą ładunek Q jest zawsze równy $4\pi Q$. Twierdzenie to nazywamy twierdzeniem Gaussa.

Weźmy teraz pod uwagę przewodnik kulisty o powierzchni S_0 znajdujący się w próżni i niosący ładunek Q Otoczmy go pomyślaną powierzchnią kulistą S. Przepływ wektora E przez tę powierzchnię będzie równy iloczynowi wektora E przez pole powierzchni kuli S.

$$\psi = ES. \tag{14.14}$$

Lecz z drugiej strony, jak udowodniliśmy

$$\psi = 4\pi Q. \tag{14.15}$$

Zmniejszajmy teraz powierzchnię kulistą S. Przepływ wektora przez tę powierzchnię oczywiście nie będzie ulegał zmianie (gdyż stale jest równy $4\pi Q$). Wreszcie powierzchnia S zejdzie się z powierzchnią przewodnika S_0. Na tej powierzchni znajduje się ładunek o gęstości powierzchniowej σ, gdzie $\sigma = \frac{Q}{S_0}$. Całkowity ładunek znajdujący się na kulce możemy zatem wyrazić w następujący sposób:

$$Q = \sigma S_0. \tag{14.16}$$

Z równań (14.14), (14.15) i (14.16) otrzymamy

$$ES_0 = 4\pi\sigma S_0,$$

skąd

$$\boxed{E = 4\pi\sigma.} \tag{14.17}$$

Równanie to daje związek między natężeniem pola przy powierzchni przewodnika i gęstością na nim ładunku.

Jeżeli takie samo rozumowanie przeprowadzimy w układzie MKSA jednostek, to zamiast wzoru (14.11) otrzymamy

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}. \tag{14.18}$$

Na strumień wektora E przez powierzchnię A otrzymamy wzór

$$\psi = E4\pi R^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \tag{14.19}$$

Zamiast wzoru (14.17) otrzymamy

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma. \tag{14.20}$$

14.8. Napięcie. Umieścimy w punkcie A pola elektrostatycznego w próżni ładunek próbny $+q$ (rys. 14.14). Na ładunek ten działa siła $\vec{F} = q\vec{E}$. Weźmy pod uwagę jeszcze jakiś inny punkt B leżący na tej samej linii elektrycznego natężenia. Obliczmy pracę, jaką wykonają siły pola przy przemieszczeniu się ładunku od punktu A do B. Ponieważ siła działająca na ładunek zmienia się podczas przemieszczania ładunku, więc musimy rozbić drogę na małe odcinki i obliczyć pracę w sposób opisany w mechanice (patrz 3.14). Przybliżona wartość pracy będzie dana przez równanie

$$L_{AB} = F_1\,ds_1 + F_2\,ds_2 + \ldots + F_n\,ds_n = q\,(E_1\,ds_1 + E_2\,ds_2 + \ldots + E_n\,ds_n).$$

Dokładna zaś wartość tej pracy

$$L_{AB} = q\int_A^B E\,ds. \tag{14.21}$$

Rys. 14.14. Przy przemieszczeniu ładunku w polu elektrycznym siły pola wykonują pracę

Gdy ładunek porusza się nie po linii elektrycznego natężenia, tylko po innej drodze, praca wykonana przez siły pola przy przejściu od punktu A do B będzie określona wzorem

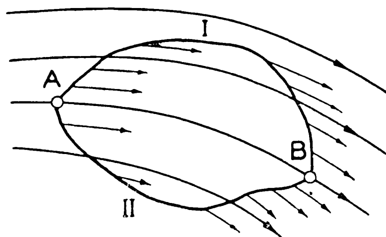
$$L_{AB} = q\int_A^B E\,ds\cos(E, ds); \tag{14.22}$$

$\cos(E, ds)$ jest cosinusem kąta zawartego między kierunkiem E i ds. Z zasady zachowania energii wynika, że praca L_{AB} nie zależy od drogi przejścia od A do B (rys. 14.15). Gdyby bowiem praca na drodze I była np. większa niż praca na drodze II, to przemieszczając ładunek po drodze kołowej zamkniętej $AIBIIA$, otrzymalibyśmy pewną ilość pracy nie zużywając żadnej energii. Byłoby to *perpetuum mobile*, co, jak wiemy, jest niemożliwe.

Stosunek pracy L_{AB} do ładunku q jest zależny jedynie od położeń punktów A i B. Nazywamy go napięciem punktu A względem punktu B. Oznaczając je literą U_{AB} otrzymamy

$$U_{AB} = \frac{L_{AB}}{q} = \int_A^B E\,ds\cos(E, ds). \qquad (14.23)$$

Mamy zatem definicję następującą: napięciem między punktami A i B nazywamy stosunek pracy wykonanej przez siły pola przy przeniesieniu ładunku q od punktu A do B — do wielkości tego ładunku. Gdybyśmy do doświadczenia wzięli ładunek jednostkowy $q = 1$, wtedy otrzymalibyśmy $U = L$. Moglibyśmy więc również, choć mniej dobrze, powiedzieć, że napięcie punktu A względem punktu B równa się pracy wykonanej przez siły pola przy przeniesieniu ładunku jednostkowego od punktu A do B.



Rys. 14.15. Praca sił pola elektrostatycznego przy przemieszczaniu ładunku nie zależy od drogi przejścia, zależy jedynie od położenia punktu początkowego i końcowego

Napięcie, tak jak i praca, jest wielkością skalarną.

Z definicji wynika oczywiście, że napięcie punktu B względem punktu B równa się zeru (ponieważ praca po drodze kołowej zamkniętej równa się zeru).

Napięcie punktu A względem punktu B równa się jednostce elektrostatycznej, gdy przy przeniesieniu jednostki elektrostatycznej ładunku siły pola wykonają pracę równą jeden erg. Jednostka ta nie posiada nazwy. Moglibyśmy ją nazwać $g^{1/2}\,cm^{1/2}\,sec^{-1}$. Gdy przy przeniesieniu ładunku wynoszącego 1 kulomb siły pola wykonują pracę 1 dżula, to napięcie punktu A względem punktu B wynosi 1 wolt (skrót V):

$$1\,\mathrm{V} = \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{C}} = \frac{10^7\ \text{ergów}}{3\cdot 10^9\ \text{j. ES}} = \frac{1}{300}\ \text{j. ES napięcia.}$$

Wymiar napięcia łatwo możemy wyliczyć z definicji:

$$[\mathrm{U}] = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{q}]} = \frac{[\mathrm{m\,l^2\,t^{-2}}]}{[\mathrm{m^{1/2}\,l^{3/2}\,t^{-1}}]} = [\mathrm{m^{1/2}\,l^{1/2}\,t^{-1}}].$$

Z równania (14.23) otrzymujemy, że przy przeniesieniu ładunku $+q$ od punktu A posiadającego napięcie U_{AB} względem punktu B do punktu B praca wykonana

przez siły pola wyrazi się wzorem

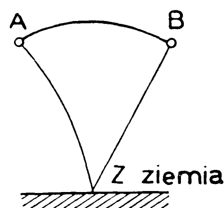
$$\boxed{L_{AB} = qU_{AB},} \tag{14.24}$$

14.9. Potencjał. Napięcie punktu względem pewnego innego punktu, którego napięcie przyjmujemy umownie za zero, nazywamy jego potencjałem. W praktyce zazwyczaj ciałem odniesienia jest ziemia (jak to później zostanie wyjaśnione, wszystko jedno, jaki punkt ziemi obierzemy za punkt odniesienia). Zatem potencjałem danego punktu będziemy w dalszym ciągu nazywać napięcie jego względem ziemi.

Potencjał może być dodatni albo ujemny, zależnie od tego, czy praca sił pola przy przeniesieniu ładunku do ziemi będzie dodatnia, czy ujemna.

Potencjałem punktu A będziemy zatem nazywali stosunek pracy L wykonanej przez siły pola podczas przeniesienia ładunku $+q$ z tego punktu do ziemi — do wielkości tego ładunku:

$$U = \frac{L}{q}. \tag{14.25}$$



Rys. 14.16. Napięcie między punktami A i B równa się różnicy ich potencjałów

Gdy $q = 1$, to $U = L$, potencjał równa się liczbowo pracy wykonanej przez siły pola przy przeniesieniu ładunku jednostkowego z punktu A do ziemi.

Z definicji wynika, że potencjały punktów ziemi (jak zobaczymy później, jednakowe) równają się zeru. Między potencjałami punktów i napięciem między nimi istnieje prosty związek. Weźmy pod uwagę dwa punkty A i B o potencjałach U_A i U_B (rys. 14.16). Potencjał U_A równa się liczbowo pracy, jaką siły pola wykonują przy przeniesieniu ładunku jednostkowego z punktu A do Z. Potencjał U_B punktu B będzie równy takiejż pracy wykonanej przy przeniesieniu ładunku jednostkowego z punktu B do Z. Lecz, jak wiemy, droga przejścia jest obojętna, zatem ładunek z punktu A do Z możemy przeprowadzić po drodze ABZ. W takim razie widać, że

$$U_A = L_{AB} + U_B,$$

gdzie L_{AB} jest pracą wykonaną przez siły pola przy przeniesieniu ładunku $+1$ z punktu A do B równą napięciu U_{AB}. Zatem

$$U_A = U_{AB} + U_B,$$

skąd

$$\boxed{U_{AB} = U_A - U_B.} \tag{14.26}$$

Napięcie między punktami A i B równa się różnicy ich potencjałów.

Linie pola są skierowane zawsze od punktów o potencjale wyższym do punktów o potencjale niższym.

Oczywiście wymiar potencjału i jego jednostki są takie same, jak wymiar i jednostki napięcia.

14.10. Związek między potencjałem a natężeniem pola elektrycznego. Weźmy pod uwagę dwa punkty leżące na linii natężenia elektrycznego A i B (rys. 14.17) tak bliskie, aby natężenie pola między nimi można było uważać w przybliżeniu za stałe. Praca wykonana przez siły pola przy przemieszczaniu ładunku $+q$ od punktu A do B będzie

$$L_{AB} = qU_{AB}$$

(równanie 14.18). Lecz

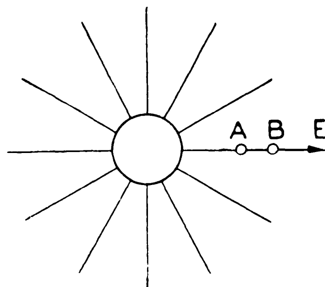
$$U_{AB} = U_A - U_B.$$

Zatem możemy napisać

$$L_{AB} = q(U_A - U_B). \qquad (14.27)$$

Lecz z drugiej strony praca równa się iloczynowi siły przez drogę, a więc

$$L_{AB} = qE\Delta s, \qquad (14.28)$$



Rys. 14.17. Praca wykonana przy przemieszczeniu ładunku q od punktu A do bliskiego punktu B jest równa $qE\Delta s$

gdzie Δs jest odległością między punktem A i B. Z równań (14.27) i (14.28) otrzymamy

$$E = \frac{U_A - U_B}{\Delta s} = -\frac{U_B - U_A}{\Delta s} = -\frac{\Delta U}{\Delta s}, \qquad (14.29)$$

gdzie przez ΔU oznaczyliśmy przyrost potencjału wzdłuż linii elektrycznego natężenia. Wyrażenie $\frac{U_A - U_B}{\Delta s}$ jest zmniejszeniem się albo spadkiem potencjału przypadającym na jednostkę przemieszczenia w kierunku wektora $\vec{E}$. Otrzymaliśmy zatem twierdzenie: natężenie pola równa się spadkowi potencjału przypadającemu na jednostkę przemieszczenia w kierunku linii elektrycznego natężenia.

Równanie

$$E = -\frac{\Delta U}{\Delta s} \qquad (14.30)$$

pokazuje, że zwrot wektora $\vec{E}$ jest przeciwny względem przyrostu potencjału U, to znaczy wektor $\vec{E}$ jest skierowany od potencjału wyższego do niższego. Przechodząc do granicy możemy napisać

$$E = -\frac{dU}{ds}. \qquad (14.31)$$

$\frac{dU}{ds}$ jest to tak zwana pochodna kierunkowa wielkości skalarnej U w kierunku ds.

$\vec{ds}$ jest w tym przypadku styczne do wektora $\vec{E}$.

Ze względu na powyższy związek możemy natężenie pola wyrażać w woltach na metr albo w woltach na centymetr.

Mówiliśmy już poprzednio o tym, że wewnątrz przewodników w przypadku równowagi ładunków wszędzie natężenie pola

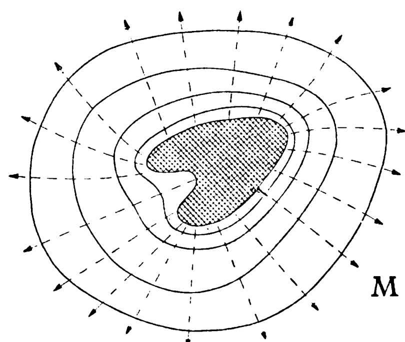
$$E = 0.$$

Z równania (14.29) wynika, że w takim razie $U_A - U_B = 0$, napięcie albo różnica potencjałów między dwoma jakimikolwiek punktami równa się zeru. Stąd otrzymamy wniosek:

$$U_A = U_B.$$

Potencjały jakichkolwiek dwóch punktów przewodnika, a więc i wszystkich jego punktów są równe. Możemy zatem mówić o potencjale przewodnika nie wymieniając, o który punkt chodzi. Oczywiście tak jest tylko w przypadku równowagi ładunków. Gdy ładunki się przemieszczają, wtedy różne punkty przewodnika mają w ogólności różne potencjały.

Ponieważ ziemia jest przewodnikiem, wszystkie jej punkty mają potencjały jednakowe, równe zeru. Dlatego mówiliśmy poprzednio, że obojętną jest rzeczą, względem jakiego punktu ziemi odnosimy napięcia punktów czy przewodników.



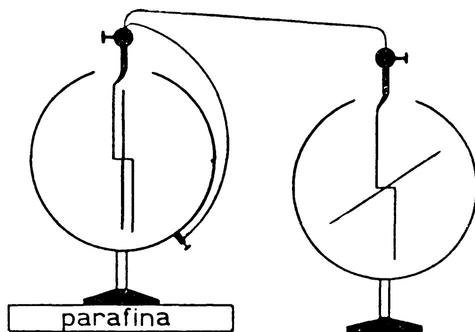
Rys. 14.18. Powierzchnie ekwipotencjalne. Linie kreskowane są liniami elektrycznego natężenia

Przewodnik połączony przewodnikiem z ziemią stanowi z nią całość, zatem również jego potencjał jest równy zeru. Łącząc przewodnik z ziemią np. za pośrednictwem rury wodociągowej mówimy, że uziemiamy dany przewodnik. Po uziemieniu można przyjąć, że jego potencjał jest równy zeru.

14.11. Powierzchnie ekwipotencjalne. W otoczeniu przewodnika naelektryzowanego o potencjale U wszystkie punkty przestrzeni uzyskują pewne potencjały, w ogólności rozmaite. Lecz znajdziemy najwidoczniej bardzo wiele punktów, w których potencjał będzie miał taką samą wartość, jak w punkcie np. M (rys. 14.18). Wszystkie te punkty leżą na pewnej powierzchni, w ogólności krzywej, zwanej powierzchnią ekwipotencjalną albo powierzchnią poziomu elektrycznego. Na każdej z tych powierzchni potencjał ma stałą wartość. Można nakreślić w polu dowolną liczbę powierzchni ekwipotencjalnych. Na każdej potencjał będzie miał inną wartość. Oczywiście dwie takie powierzchnie nie mogą

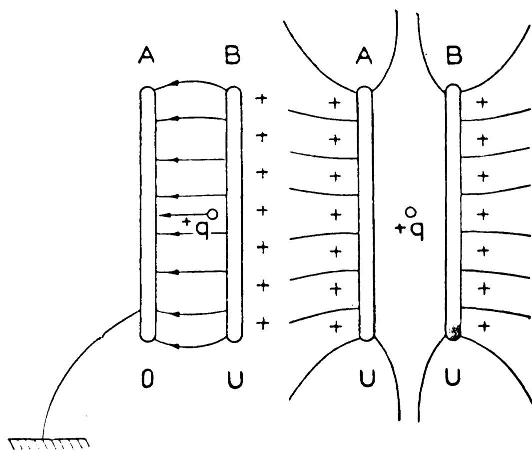
się nigdzie przecinać, gdyż potencjał w danym punkcie ma jedną określoną wartość. Między sąsiednimi punktami powierzchni ekwipotencjalnej nie ma żadnej różnicy potencjałów, zatem przesunięcie jakiegokolwiek ładunku po tej powierzchni nie daje ani nie zużywa żadnej pracy. Wynika stąd, że składowa natężenia pola elektrycznego w kierunku stycznym do powierzchni poziomu równa się zeru. Zatem natężenie pola jest w każdym punkcie tego pola normalne do powierzchni ekwipotencjalnych.

Oczywiście powierzchnia przewodnika, w którym prąd nie płynie jest powierzchnią ekwipotencjalną. Zatem linie elektryczne przy jego powierzchni muszą być do tej powierzchni normalne.



Rys. 14.19. W elektroskopie, w którym wewnętrzny pręt połączony jest metalicznie z osłoną, listki się nie odchylają mimo naelektryzowania

14.12. Elektroskop służy do mierzenia napięć lub potencjałów. Za pomocą łatwych doświadczeń możemy stwierdzić, że wskazania elektroskopu nie są jednoznacznie związane z obecnością na jego pręcie wewnętrznym ładunków. Listki, czy też wskazówka odchylają się tylko wtedy, gdy między nimi a zewnętrzną osłoną metalową istnieje różnica potencjałów. Jeżeli więc połączymy osłonę z prętem wewnętrznym metalowym drutem, to wprowadzenie ładunków nie wywoła żadnego odchylenia wskazówki, mimo iż możemy elektroskop silnie naelektryzować po umieszczeniu go na izolującej podstawie, np. na płycie parafinowej. Za pomocą drugiego elektroskopu możemy sprawdzić, iż pierwszy jest naelektryzowany (rys. 14.19). Możemy również uzyskać odchylenie wskazówki łącząc pręt wewnętrzny z ziemią, a wprowadzając ładunki na osłonę. Wreszcie wskazówka odchyli się również po potarciu szybek elektroskopu jedwabiem lub papierem, wskutek czego naelektryzują się one. By zrozumieć dobrze, w jakich przypadkach elektroskop odchyla się, a w jakich nie, weźmy następujący prosty przykład. Przypuśćmy, że mamy dwie równoległe płyty metalo-



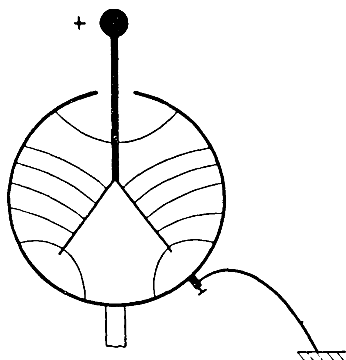
Rys. 14.20. Na ładunek umieszczony między płytami o różnych potencjałach działa siła; gdy płyty mają jednakowe potencjały, siła nie działa

we A i B (rys. 14.20). Jeżeli między nimi istnieje różnica potencjałów, to w przestrzeni między nimi zawartej istnieje pole elektryczne. Natężenie pola E jest odmienne od zera. Na ładunek znajdujący się między płytami będzie działać siła

$$F = qE.$$

Natomiast gdy obie płyty naelektryzujemy choćby dowolnie silnie, ale tak, aby ich potencjały były równe, to natężenie pola między nimi $E = 0$. Na ładunek umieszczony między nimi nie będą działać siły.

Na listkach elektroskopu znajdują się ładunki, zatem jeżeli między nimi i osłoną istnieje różnica potencjałów, wtedy istnieje i pole elektryczne, na listki wywierane są siły powodujące ich odchylenie. Gdy różnica potencjałów równa jest zeru, pole nie istnieje i na ładunki, które mogą się znajdować na listkach, nie działają żadne siły, a więc listki nie rozchylą się. Rysunek 14.21 przedstawia pole wewnętrzne elektroskopu.



Rys. 14.21. Pole elektryczne wewnątrz elektroskopu

Jeżeli więc elektroskop ma wykazywać potencjały połączonych z nim przewodników, osłona jego powinna być połączona z ziemią, czyli mieć wszędzie potencjał równy zeru. Dlatego osłona ta powinna być metalowa i jeżeli wskazania elektroskopu mają być zupełnie poprawne, to nie powinna wcale zawierać szkła. Bowiem na szkle mogą w różnych miejscach powstawać ładunki trzymające się przez czas dłuższy. Potencjały różnych miejsc szkła mogą być rozmaite. Może zaistnieć różnica potencjałów między tymi miejscami a wewnętrznym prętem i listkami. Listki mogą się wtedy odchylić, mogą się odchylić nawet wtedy, gdy nie wprowadzimy na nie ładunków. Ładunki na szkle wzbudzą na listkach ładunki indukcyjne, a pole wewnątrz spowoduje ich rozchylenie. Dlatego szyby w elektroskopach są tolerowane tylko przy przyrządach demonstracyjnych, aby z daleka można było obserwować odchylenia elektroskopu. W elektroskopach precyzyjnych osłonę zewnętrzną stanowi całkowicie zamknięta puszka metalowa z jak najmniejszym okienkiem dla obserwacji odchyleń. Zupełnie niedopuszczalne jest oczywiście sporządzenie całej osłony ze szkła.

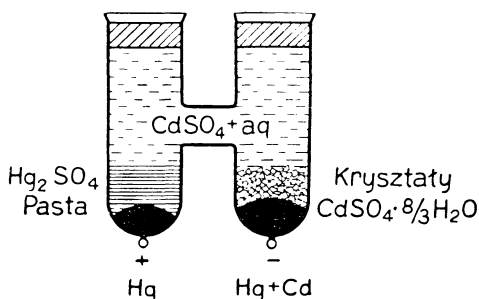
14.13. Ogniwa galwaniczne. Zespół dwóch płytek z różnych metali (jedna może być węglowa) ewentualnie związków metali (tlenek miedzi, tlenek ołowiu, siarczan ołowiu) zanurzonych w roztworze wodnym kwasu, zasady lub soli nazywamy ogniwem galwanicznym. Za pomocą czułego elektroskopu, elektrometru lub woltomierza, którego budowa będzie wyjaśniona później, możemy stwierdzić, że między płytami ogniwa istnieje różnica potencjałów.

Płyty ogniwa nazywamy elektrodami. Elektrodę o wyższym potencjale nazywamy anodą, elektrodę o niższym potencjale — katodą. Wychodzący na zewnątrz koniec anody nazywamy również często biegunem dodatnim ogniwa i oznaczamy znakiem +, koniec katody — biegunem ujemnym i oznaczamy znakiem —. Ogniwo, którego bieguny nie są połączone przewodnikiem, nazywamy ogniwem otwartym, gdy natomiast bieguny są połączone drutem, mówimy, iż ogniwo jest zamknięte.

Napięcia między biegunami ogniw są niewielkie, mniej więcej zawarte w granicach od 1 do 2 woltów. Mimo to za pomocą większej liczby ogniw możemy wytwarzać napięcia wynoszące setki i tysiące woltów, jak o tym będzie mowa w dalszym ciągu.

Jest wiele różnych typów ogniw, jednakże większość ich wyszła z użycia. Jedynie często używanymi są ogniwa Leclanchégo i akumulatory.

Przykłady ogniw: ogniwo Daniella składa się z płyty miedzianej zanurzonej w roztworze wodnym siarczanu miedzi oraz płyty cynkowej zanurzonej w roztworze siarczanu cynku. Oba elektrolity przedzielone są ścianką z porowatej glinki. Napięcie wynosi 1,08 V. Ogniwo Leclanchégo składa się z płyty węglowej i cynkowej zanurzonych w 20%-owym roztworze chlorku amonowego, NH_4Cl. Napięcie wynosi 1,4 do 1,5 V.

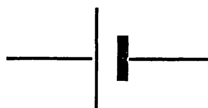


Rys. 14.22. Ogniwo Westona

Bardzo ważnym dla pomiarów elektrycznych jest ogniwo Westona, którego budowę wyjaśnia rys. 14. 22. Ma ono nadzwyczaj stałe napięcie równe 1,0183 V. Służy jako wzorzec napięcia.

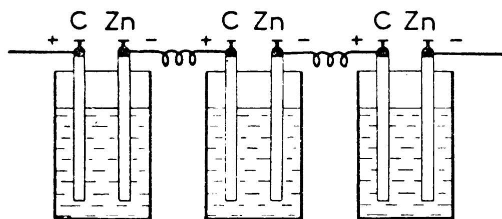
Charakterystyczne cechy ogniw galwanicznych są następujące:

Napięcie ogniwa otwartego zależy: 1) od jego budowy, tzn. od rodzaju płyt i elektrolitu, 2) od temperatury. Natomiast napięcie ogniwa n i e zależy: 1) od jego wielkości (napięcie jest identyczne bez względu na to, czy ogniwo będzie wielkości naparstka, czy też beczki, jeżeli tylko jego skład będzie taki sam), 2) od wysokości potencjałów płyt. To znaczy, że jeżeli naelektryzujemy jakąkolwiek elektrodę ogniwa do potencjału powiedzmy 1000 woltów, to druga elektroda będzie wykazywać stale względem pierwszej to samo napięcie, które miała poprzednio.

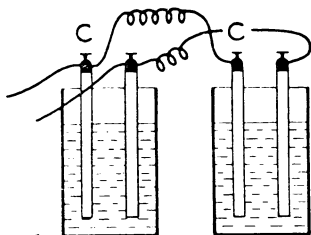

Rys. 14.23. Oznaczenie schematyczne ogniwa

Przy rysunkach schematycznych używanych bardzo często w elektrotechnice używamy symbolicznego oznaczania ogniw, jak zresztą i wielu innych przyrządów. Oznaczenie podaje rys. 14. 23.

14.14. Łączenie ogniw w baterie. Możemy dwojako łączyć ogniwa w baterie. Pierwszym, znacznie częściej używanym, jest łączenie szeregowe, polegające na tym, że biegun dodatni każdego ogniwa łączymy z ujemnym biegunem następnego. Na przykład w ogniwach Leclanchégo łączymy elektrodę węglową (dodatnią) z elektrodą cynkową następnego ogniwa (rys. 14.24). Jeżeli połączymy biegun ujemny pierwszego ogniwa, to znaczy cynk, z ziemią, to będzie on miał potencjał równy zeru. Dodatni biegun będzie miał napięcie 1,5 V. Ujemny biegun następnego ogniwa połączony metalicznie z dodatnim następnego musi mieć taki sam potencjał, tj. 1,5 V. Dodatni biegun drugiego ogniwa ma zawsze potencjał wyższy od bieguna ujemnego o 1,5 V, zatem będzie miał 3 V względem ziemi. Ten sam potencjał uzyska połączony z nim ujemny biegun trzeciego ogniwa. Dodatni biegun uzyska potencjał 4,5 V itd. Między ujemnym biegunem pierwszego ogniwa i biegunem dodatnim n-go ogniwa uzyskamy napięcie nU. W ten sposób łącząc większą liczbę ogniw możemy uzyskiwać napięcia dość wysokie. Do celów radiofonii używane tzw. baterie anodowe są bateriami małych



Rys. 14.24. Połączenie szeregowe ogniw



Rys. 14.25. Połączenie równoległe ogniw

ogniw Leclanchégo połączonych szeregowo. Zwykle mają napięcie 120 do 150 V. Używane dawniej często w laboratoriach baterie małych akumulatorów, z których każdy ma napięcie 2 V, dawały często napięcia po parę tysięcy woltów.

Baterii łączonej szeregowo można używać do cechowania elektroskopów, których wychylenia, jak mówiliśmy, zależą od napięcia między listkami czy też wskazówką a osłoną.

Łączenie równoległe ogniw polega na połączeniu razem wszystkich biegunów ujemnych, a także na wspólnym połączeniu wszystkich biegunów dodatnich (rys. 14.25). Taka bateria zastępuje właściwie jedno ogniwo o większych płytach. Ma zatem napięcie równe napięciu jednego ogniwa. Używa się jej stosunkowo rzadko, tylko w niektórych przypadkach pobierania z baterii prądu elektrycznego.

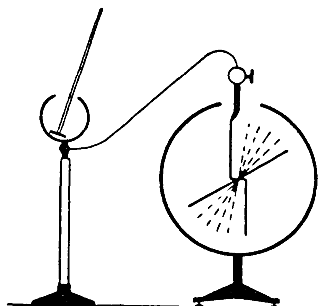
14.15. Pojemność elektryczna. Powiedzieliśmy poprzednio, że wskazania elektroskopu nie są jednoznacznie związane z ładunkiem. A jednak po wprowadzeniu na jego gałkę ładunku wskazówka odchyla się. Pochodzi to stąd, że przy wprowadzaniu na przewodnik ładunku potencjał jego podwyższa się. Możemy wykonać następujące doświadczenie: weźmy kulę pustą w środku na izolującym

trzonku, taką jak opisana w ust. 14.3 (rys. 14.26). Połączmy ją drutem z elektroskopem, którego osłona jest uziemiona. Wprowadzajmy do wnętrza kuli za pomocą krążka próbnego możliwie jednakowe ładunki. Jak już wiemy, po zetknięciu z wewnętrzną ścianką kuli krążek traci całkowicie ładunek. Możemy to powtórzyć wielokrotnie, przy czym za każdym wprowadzeniem ładunku q elektroskop wychyli się więcej stwierdzając w ten sposób wzrost potencjału kuli. Dokładne pomiary stwierdzają, że potencjał przewodnika w niezmiennym położeniu względem otoczenia rośnie proporcjonalnie do ładunku wprowadzonego na ten przewodnik:

$$U \sim Q.$$

Zatem stosunek $\frac{Q}{U}$ będzie wielkością stałą, w ogólności dla każdego przewodnika inną. Jest on miarą wielkości fizycznej, którą nazywamy *pojemnością* elektryczną przewodnika. Oznaczając go literą C otrzymamy związek

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}.} \qquad (14.32)$$



Rys. 14.26. Potencjał przewodnika jest proporcjonalny do jego ładunku

Taki przewodnik, który po wprowadzeniu nań jednostkowego ładunku uzyska potencjał równy jednostce, będzie miał pojemność jednostkową. W układzie elektrostatycznym przewodnik ma zatem jednostkę elektrostatyczną pojemności (cm), gdy po wprowadzeniu jednostki elektrostatycznej ładunku uzyskuje jednostkę elektrostatyczną potencjału. Zgodnie z równaniem (14.32) otrzymamy

$$1 \text{ ES pojemności} = \frac{g^{1/2}\, cm^{3/2}\, sec^{-1}}{g^{1/2}\, cm^{1/2}\, sec^{-1}} = 1 cm.$$

Na wymiar tej wielkości otrzymamy

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[m^{1/2} l^{3/2} t^{-1}]}{[m^{1/2} l^{1/2} t^{-1}]} = [l].$$

Zatem w układzie elektrostatycznym pojemność ma wymiar długości, a jednostkę jej często nazywano centymetrem. Oczywiście jest to jednak zupełnie inna wielkość niż długość.

W układzie MKSA jednostek jednostkę pojemności będzie miał taki przewodnik, który po wprowadzeniu nań jednego kulomba uzyska potencjał 1 wolt. Jednostka ta została nazwana faradem (w skrócie F). Okazało się jednak, że jednostka ta jest zbyt wielka nawet dla celów praktycznych. Toteż w praktyce używa się podwielokrotności tej jednostki. Najczęściej używanymi są:

$$1\, \mu F = 10^{-6}\, F,$$

$$1\, pF = 10^{-12}\, F = 10^{-6}\, \mu F.$$

1 μF — mikrofarad, 1 pF — pikofarad.

Z równania (14.32) możemy obliczyć

$$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ kulomb}}{1 \text{ wolt}} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ j. ES ładunku}}{\frac{1}{300} \text{ j. ES potencjału}} = 9 \cdot 10^{11} \text{ cm}.$$

Zatem

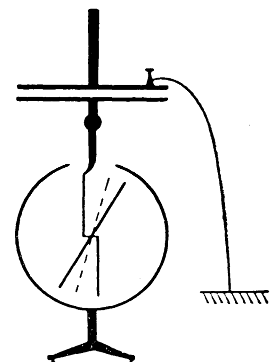
$$1 \, \mu\text{F} = 9 \cdot 10^5 \text{ cm},$$

$$1 \text{ pF} = 0{,}9 \text{ cm}.$$

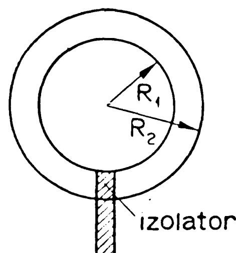
14. 16. Kondensatory. Stała dielektryczna. Osadźmy na elektroskopie krążek metalowy i naelektryzujmy go np. za pomocą potartej laski szklanej. Wskazówka elektroskopu odchyli się. Zbliżmy teraz drugi krążek metalowy możliwie na jak najmniejszą odległość (rys. 14.27). Wskazówka zmniejszy swoje odchylenie wykazując w ten sposób obniżenie się potencjału krążka umieszczonego na elektroskopie. Obniżenie to jest największe, gdy płyta zbliżana jest uziemiona. Skoro potencjał krążka maleje, a ładunek nie został zmieniony, to ze związku:

$$C = \frac{Q}{U} \tag{14.32}$$

można wnioskować, że pojemność krążka wskutek zbliżenia drugiego przewodnika wzrasta. Okazuje się, że zawsze pojemność przewodnika zmienia się przy zmianie położenia otaczających przedmiotów, w szczególności przewodników. Właściwie więc nie można mówić o określonej pojemności pojedynczego przewodnika, tylko o pojemności układu przewodników znajdujących się w określonej i stałej odległości od siebie. Takie układy nazywamy kondensatorami. A więc dobrze określoną pojemność ma np. układ złożony z dwóch współśrodkowych kul odizolowanych jedna od drugiej (rys. 14.28). Nazywamy go kondensatorem kulistym. Obliczmy pojemność takiego kondensatora. Wprowadźmy na wewnętrzną kulę ładunek Q. Zewnętrzną kulę połączmy z ziemią. Będzie miała ona zatem potencjał zero. Napięcie między kulą wewnętrzną i zewnętrzną według wzoru 14.23 będzie



Rys. 14.27. Potencjał płyty obniża się przy zbliżeniu drugiej płyty



Rys. 14.28. Kondensator kulisty

$$U - 0 = \int_{E_1}^{E_2} E \, dR^{*}.$$

Aby obliczyć, całkę, trzeba znać wartość E między okładkami kondensatora.

* Możemy iść wzdłuż promienia. Wtedy zamiast ds piszemy dR.

Stosując twierdzenie Gaussa do powierzchni kulistej współśrodkowej o promieniu R zawartym między R_1 i R_2 możemy napisać

$$\psi = 4\pi R^2 E = 4\pi Q$$

(E z powodu symetrii musi mieć na całej powierzchni kuli jednakową wartość). Stąd

$$E = \frac{Q}{R^2}.$$

Zatem

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{R^2} dR = Q \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = -\frac{Q}{R}\Bigg|_{R_1}^{R_2} = Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (14.32) na pojemność otrzymamy

$$C = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \tag{14.33}$$

albo

$$C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \tag{14.34}$$

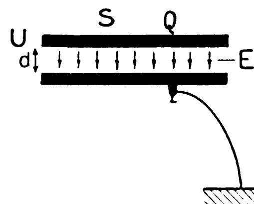
Jest to znany wzór na pojemność kondensatora kulistego. Chcąc za pomocą niego obliczyć pojemność, należy podstawić wartości promieni R_1 i R_2 w centymetrach. Pojemność otrzymujemy wtedy w jednostkach ES.

Gdybyśmy teraz wyobrazili sobie, że zewnętrzna osłona rośnie bezgranicznie, tzn. $R_2 \to \infty$, $\frac{1}{R_2} \to 0$, otrzymamy z wzoru (14.33)

$$C = R_1 \tag{14.35}$$

pojemność kuli znajdującej się w bardzo wielkiej odległości od pozostałych ciał wyrażona w jednostkach elektrostatycznych równa się liczbowo promieniowi kuli wyrażonemu w centymetrach. Jeżeli więc na taką kulę wprowadzimy ładunek Q, to uzyska on według wzoru (14.32) potencjał

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{R}. \tag{14.36}$$



Rys. 14.29. Kondensator płaski

Układ złożony z dwóch płyt metalowych znajdujących się w stałej odległości jedna od drugiej nazywamy kondensatorem płaskim. Nie trudno jest obliczyć jego pojemność. Niech będą dane dwie płyty każda o powierzchni S znajdujące się w odległości wzajemnej d (rys. 14. 29). Jedną połączmy z ziemią, a na drugą wprowadźmy ładunek Q. Uzyska on pewien potencjał U. Między płytami wytworzy się pole elektryczne jednostajne o natęże-

niu E. Według definicji potencjał U równa się pracy wykonanej przez siły pola podczas przeniesienia ładunku jednostkowego od płyty górnej do dolnej, zatem

$$U = Ed, \tag{14.37}$$

zaś

$$E = 4\pi\sigma \tag{14.38}$$

(ust. 14.7). Z drugiej strony, ładunek równa się gęstości ładunku pomnożonej przez powierzchnię:

$$Q = \sigma \cdot S. \tag{14.39}$$

Zatem po podstawieniu do wzoru na pojemność otrzymamy

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{4\sigma\pi d} = \frac{S}{4\pi d}. \tag{14.40}$$

Jest to wzór na pojemność kondensatora płaskiego. Wynik otrzymujemy w jednostkach elektrostatycznych, gdy S wyrazimy w cm^2 i d w cm.

W układzie MKSA wzór ten będzie wyglądał nieco inaczej. Ponieważ mamy wtedy

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad U = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0},$$

wobec tego

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S \varepsilon_0}{\sigma d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}. \tag{14. 41}$$

Wzór ten da nam pojemność w faradach, gdy S wyrazimy w m^2, d — w metrach, a jak już wiemy

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}.$$

Wzór na pojemność kondensatora kulistego w układzie MKSA będzie następujący:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \tag{14.42}$$

Wskazówka elektroskopu zmniejsza również swe odchylenie, gdy w doświadczeniu wyżej opisanym między krążki metalowe wsuniemy płytę z dielektryka, a więc szklaną, ebonitową, parafinową itp. Zatem zastąpienie powietrza jakimś innym dielektrykiem również powiększa pojemność kondensatora. Stosunek pojemności kondensatora C, którego okładki są umieszczone całkowicie w dielektryku (szczególnie łatwo to zrobić, gdy dielektrykiem jest ciecz), do pojemności C_0 kondensatora, którego okładki znajdują się w próżni albo — co prawie na jedno wychodzi — w powietrzu, nazywamy stałą dielektryczną danego dielektryka. Stałą dielektryczną będziemy oznaczać literą ε. Mamy więc

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0}. \tag{14.43}$$

Tabela 14.1.

Stałe dielektryczne przy temperaturze 18°C

Dielektryk	ε	Dielektryk	ε	Dielektryk	ε
Próżnia	1,000	Parafina	1,7—2,3	Benzen	2,3
Powietrze (0°)	1,0006	Szkło	5—7	Nitrobenzen	36,1
				Woda	81,1

Stała dielektryczna zależy od temperatury. Stałe dielektryczne cieczy maleją z podwyższeniem temperatury, ciał stałych — nieco wzrastają.

Pojemność kondensatora płaskiego po wprowadzeniu między jego okładki dielektryka o stałej dielektrycznej ε powiększy się ε razy. Zatem będzie dana przez wzór

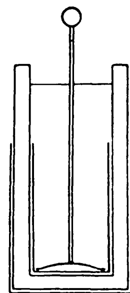
$$C = \frac{\varepsilon E}{4\pi d}. \tag{14.44}$$

Uwaga. Przy małej odległości okładek można również do kondensatora kulistego a także do cylindrycznego (np. butelki lejdejskiej) stosować wzór na kondensator płaski:

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d},$$

gdzie S będzie oznaczać całkowitą powierzchnię jednej okładki, d — odległość między okładkami, względnie grubość dielektryka przedzielającego okładki.

Z własności dielektryków powiększania pojemności kondensatora korzysta się przy sporządzaniu kondensatorów w wielkiej ilości obecnie używanych w technice. Ponieważ pojemność kondensatora jest tym większa, im większa jest powierzchnia okładek, im mniejszy ich odstęp i im większa stała dielektryczna, więc gdy weźmiemy dwa bardzo długie paski cynfolii przedzielone papierem parafinowym, to kondensator z nich złożony będzie miał bardzo dużą pojemność. Przedzielanie okładek papierem parafinowanym ma jeszcze tę wielką zaletę, że iskra trudniej przebija papier parafinowany niż powietrze i wskutek tego silniej możemy ładować kondensator. Aby taki kondensator zajmował jak najmniej miejsca, zwija się go, po czym umieszcza zwykle w puszce metalowej zalutowanej, z której wychodzą tylko dwa druty izolowane, połączone z okładkami.

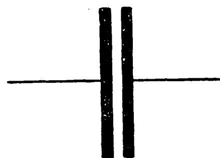


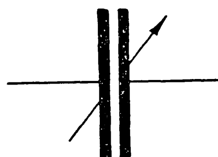
Rys. 14.30. Butelka lejdejska

Butelka lejdejska używana często do doświadczeń, przy których potrzebne są wysokie napięcia, składa się ze słoja szklanego oklejonego zewnątrz i wewnątrz cynfolią. Do wnętrza wchodzi zwykle pręt metalowy zakończony u góry gałką, łączący się metalicznie z wewnętrzną okładką (rys. 14.30). Butelka lejdejska wytrzymuje znaczne napięcia między okładkami. Zależnie od grubości i gatunku szkła butelka

lejdejska może wytrzymywać napięcia od kilkunastu do kilkudziesięciu tysięcy woltów.

Kondensatory radiowe o zmiennej pojemności składają się z układu płytek metalowych półokrągłych osadzonych na osi, które przy jej obrocie wchodzą między takież płytki metalowe nieruchome. W ten sposób pojemność kondensatora możemy łatwo zmieniać. Symbolem kondensatora o stałej pojemności na schematach są dwie kreski pionowe, kondensatora zmiennego takież kreski przekreślone ukośną strzałką (rys. 14.31).





Rys. 14.31. Oznaczenie kondensatora stałego (u góry) i zmiennego (u dołu)

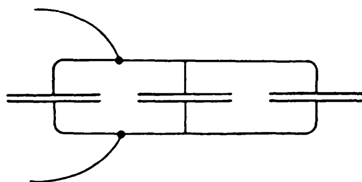
14.17. Łączenie kondensatorów w baterie. 1. Ł ą c z e n i e r ó w n o l e g ł e. Łączenie równoległe kondensatorów przedstawia schematycznie rysunek 14. 32. Widać od razu, że taki układ zastępuje właściwie jeden kondensator o większej powierzchni płyt. Wszystkie połączone ze sobą okładki kondensatora muszą mieć ten sam potencjał. Powiedzmy, że górne, połączone ze sobą okładki będą miały potencjał U_1, dolne zaś U_2. Pierwszy kondensator nagromadzi ładunek $Q_1 = C_1(U_1 - U_2)$, drugi zaś $Q_2 = C_2(U_1 - U_2)$ itd. Całkowity nagromadzony w baterii ładunek będzie

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots = (C_1 + C_2 + C_3 + \ldots)(U_1 - U_2). \qquad (14.45)$$

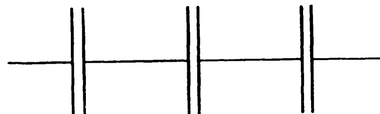
A więc bateria nagromadzi taki sam ładunek jak jeden kondensator o pojemności

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n. \qquad (14.46)$$

2. P o ł ą c z e n i e s z e r g o w e przedstawia rysunek 14. 33. Przypuśćmy, że ostatnią okładkę kondensatora C_n połączymy z ziemią, a na pierwszą konden-



Rys. 14.32. Połączenie równoległe kondensatorów



Rys. 14.33. Połączenie szeregowe kondensatorów

satora C_1 wprowadzimy ładunek $+Q$. W takim razie na drugiej jego okładce powstanie ładunek indukcyjny $-Q$, zaś na połączonej z nią okładce drugiego kondensatora ładunek $+Q$ itd. Wszystkie kondensatory będą miały jednakowe ładunki $+Q$ na jednej okładce, a $-Q$ na drugiej. Napięcie między okładkami

pierwszego kondensatora będzie dane przez wzór

$$U_1 - U_2 = \frac{Q}{C_1}.$$

Między okładkami drugiego:

$$U_2 - U_3 = \frac{Q}{C_2}$$

itd. Między okładkami n-go:

$$U_n - 0 = \frac{Q}{C_n}.$$

Dodając te równania stronami otrzymamy

$$U_1 - U_2 + U_2 - U_3 + U_3 - \ldots + U_n - 0 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right).$$

Po lewej stronie wszystkie wyrazy znoszą się prócz pierwszego, a więc otrzymamy

$$U_1 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right).$$

Stąd na stosunek $\frac{U_1}{Q}$ równy odwrotności pojemności $\frac{1}{C}$ otrzymamy wzór

$$\frac{U_1}{Q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}. \tag{14.47}$$

Otrzymujemy więc wynik, że odwrotność pojemności baterii kondensatorów połączonych szeregowo równa się sumie odwrotności pojemności poszczególnych kondensatorów. Łatwo na prostym przykładzie stwierdzić, że taka bateria ma pojemność mniejszą od pojemności najmniejszego wchodzącego w jej skład kondensatora. Bateria złożona z dwóch jednakowych kondensatorów ma pojemność równą połowie każdego z nich. Połączenia szeregowego używamy, gdy potrzebujemy mniejszego kondensatora niż te, które mamy do rozporządzenia, a przede wszystkim wtedy, gdy bateria ma wytrzymać wysokie napięcie. Bateria taka bowiem wytrzymuje napięcie równe sumie napięć, które wytrzymują poszczególne kondensatory.

14.18. Dielektryki. Indukcja elektryczna. Weźmy pod uwagę kondensator płaski. Naładujmy go tak, aby między okładkami powstała różnica potencjałów. Niech napięcie między okładkami będzie U_0, pojemność kondensatora C_0. Według definicji:

$$C_0 = \frac{Q}{U_0}. \tag{14.48}$$

Jeżeli między okładki wsuniemy płytę z dielektryka, napięcie zmniejszy się ε razy (ε — stała dielektryczna), będzie zatem $\frac{U_0}{\varepsilon}$. Pojemność kondensatora zmieni się na

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{U_0}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon Q}{U_0}, \tag{14.49}$$

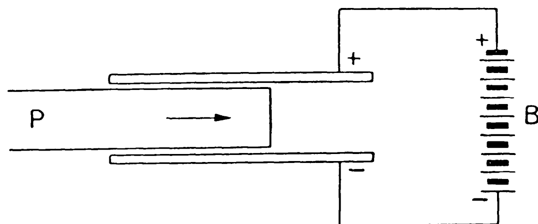
będzie więc ε razy większa zgodnie z tym, co było powiedziane w ust. 14.16. Między różnicą potencjałów i natężeniem pola istnieje prosty związek:

$$E = \frac{U}{d}, \tag{14.50}$$

gdzie d oznacza odległość między okładkami kondensatora (ponieważ pole jest jednostajne, więc E jest stałe i praca przy przeniesieniu jednostki ładunku od jednej okładki do drugiej wykonana przez siły pola jest Ed (patrz wzór 14.37).

Ponieważ po wprowadzeniu dielektryka różnica potencjałów zmniejszyła się ε razy, zatem i natężenie pola zmniejszy się ε razy. Zupełnie to samo zajdzie w jakimkolwiek kondensatorze np. kulistym po wprowadzeniu dielektryka między jego okładki. Oczywiście wszystko jedno, w jakiej odległości od wewnętrznej kuli będzie się znajdowała zewnętrzna okładka. Możemy ją sobie wyobrazić oddaloną do nieskończoności. Zatem w środowisku o stałej dielektrycznej ε natężenie pola przy tym samym ładunku Q_1 na przewodniku jest ε razy mniejsze niż w próżni. Działania na jakikolwiek ładunek Q_2 będą ε razy słabsze. Dla dielektryka musimy więc napisać prawo Coulomba w postaci

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon r^2}. \tag{14.51}$$



Rys. 14.34. Przy włożeniu płyty z dielektryka P między okładki kondensatora, ładunki dopływają z baterii B, potencjał utrzymuje się stały

Zróbmy teraz następujące doświadczenie: połączmy okładki kondensatora z biegunami baterii galwanicznej (rys. 14.34). Bateria będzie wytwarzać stałe napięcie między okładkami kondensatora. Jeżeli teraz wsuniemy między okładki płytę z dielektryka, napięcie mimo to się nie zmieni. W takim razie i natężenie pola E_0 między okładkami nie zmieni się. Ponieważ pojemność kondensatora powiększyła się ε razy, zatem jeżeli napięcie pozostało niezmienione, musiał ładunek powiększyć się ε razy (dostarczyła go oczywiście bateria). Musiała również wzrosnąć gęstość ładunku ε razy. Jeżeli przed wsunięciem płyty dielektrycznej gęstość ładunku była σ_0, to po wsunięciu jej będzie

$$\sigma = \varepsilon \sigma_0. \tag{14.52}$$

Gdy przy samej płycie zrobimy bardzo wąską szczelinę równoległą do płyty, a więc prostopadłą do linii elektrycznego natężenia, to w takiej szczelinie będziemy mieli natężenie pola E związane z gęstością ładunku równaniem

$$4\pi\sigma = E. \tag{14.53}$$

Przed wsunięciem płyty zaś mieliśmy

$$4\pi\sigma_0 = E_0, \tag{14.54}$$

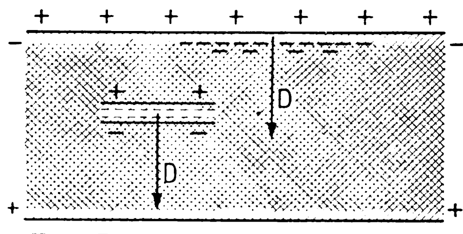
zatem

$$4\pi\sigma = 4\pi\varepsilon\sigma_0 = \varepsilon E_0. \tag{14.55}$$

Natężenie pola będzie w tej szczelinie ε razy większe niż wewnątrz środowiska. Oznaczając

$$\varepsilon E = D \tag{14.56}$$

otrzymujemy wielkość, która nazywa się indukcją elektryczną. Można ją określić jako siłę działającą na ładunek jednostkowy w szczelinie nieskończenie wąskiej zawartej między płaszczyznami prostopadłymi do linij elektrycznego natężenia. Siła ta, jak widać, jest ε razy większa niż siła działająca na taki sam ładunek wewnątrz środowiska. Tłumaczy się to w sposób następujący: przyjmujemy, że każdy dielektryk zawiera dodatnie i ujemne ładunki w równych ilościach, wobec czego jest on jako całość elektrycznie obojętny. Oba rodzaje ładunków są związane siłami mającymi takie same własności jak siły sprężyste. Pod wpływem działania sił pola ładunki przemieszczają się nieco w dwóch przeciwnych kierunkach: dodatnie w kierunku pola, ujemne — w kierunku przeciwnym. Zjawisko to nazywamy polaryzacją dielektryka. Wnętrze dielektryka w dalszym ciągu będzie elektrycznie obojętne. Lecz na powierzchniach granicznych szczeliny prostopadłej do pola zjawią się ładunki, jak pokazano na rys. 14.35. Działanie ich dołączy się do działania pola pochodzącego od okładek. Wskutek tego siły działające na ładunek w takiej szczelinie będą znacznie większe niż w dielektryku.



Rys. 14.35. Dielektryk między płytami ulega polaryzacji polegającej na przesunięciu ładunków dodatnich w kierunku pola, ujemnych — w kierunku przeciwnym

Indukcja jest wektorem mającym w środowiskach izotropowych ten sam kierunek co wektor E.

Ponieważ dla próżni $\varepsilon = 1$, a dla powietrza $\varepsilon = 1{,}0006$, zatem w próżni i, praktycznie biorąc, w powietrzu

$$D = E. \tag{14.57}$$

Wszystkie dotychczasowe wzory w niniejszym paragrafie były napisane w układzie elektrostatycznym. W układzie MKSA na związek między indukcją i natężeniem pola w dielektryku należałoby napisać

$$D = \varepsilon' E, \tag{14.58}$$

gdzie ε' oznacza wielkość zwaną przenikalnością elektryczną dielektryka w tym układzie jednostek. Dla próżni zaś

$$D = \varepsilon_0 E, \tag{14.59}$$

gdzie ε_0 oznacza przenikalność elektryczną próżni. Wartość stałej dielektrycznej ε da nam stosunek

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} = \varepsilon. \tag{14.60}$$

Jak już wiadomo, natężenie pola zmaleje ε razy w dielektryku. Zatem prawo Coulomba dla dielektryka powinniśmy napisać w formie

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon r^2},$$

ponieważ zaś $\varepsilon_0 \varepsilon = \varepsilon'$, zatem

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon'} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{14.61}$$

Ten ostatni wzór możemy stosować równie dobrze do dielektryka jak i do próżni, tylko za ε' trzeba podstawić dla dielektryka iloczyn $\varepsilon_0\varepsilon$, a dla próżni tylko ε_0 (gdyż stała dielektryczna próżni $\varepsilon = 1$).

Podobnie możemy napisać w układzie ES pominąwszy tylko czynnik 4π w mianowniku:

$$F = \frac{1}{\varepsilon'} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \tag{14.62}$$

i tak samo możemy nazwać ε' przenikalnością elektryczną dielektryka. Również tak samo jak poprzednio

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 \varepsilon,$$

gdzie ε jest stałą dielektryczną, a ε_0 — przenikalnością elektryczną próżni. Różnica będzie polegać tylko na tym, że przenikalność elektryczna próżni ε_0 w układzie ES równa się jedności, a w układzie MKSA zaś $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi \cdot 10^9} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$.

14.19. Energia elektryczna. Układ ciał naelektryzowanych posiada pewną energię dzięki siłom działającym pomiędzy nimi. Przy rozbrojeniu np. przez iskrę energia ta zamienia się na inne rodzaje energii: ciepło, światło, energię fal dźwiękowych. Oczywiście energia układu naelektryzowanego jest energią potencjalną. Obliczmy energię najprostszego układu, jakim jest kondensator naładowany.

Przypuśćmy, że to jest kondensator płaski; jedna jego okładka niech będzie uziemiona, a więc posiada potencjał zero, druga zaś — niech ma potencjał U_0 przy ładunku Q_0. Zabierzmy z okładki naelektryzowanej ładunek dQ tak mały, aby wskutek tego potencjał okładki nie zmienił się znacznie, i spuśćmy go na drugą okładkę. Praca wykonana przy tym będzie równa w przybliżeniu

$$U_0\,dQ.$$

Powtórzmy ponownie ten proces. Przy przeniesieniu następnego ładunku dQ_1 wykonana praca będzie już nieco mniejsza, gdyż potencjał naładowanej okładki jest nieco niższy. Będzie ona

$$U_1\,dQ_1\,.$$

Przenośmy w ten sposób kolejno ładunki, dopóki się całkowicie nie wyczerpią. Całkowita uzyskana przy tym praca wyrazi się wzorem przybliżonym

$$L = U_0\,dQ + U_1\,dQ_1 + \ldots$$

Dokładną wartość uzyskanej pracy da nam wzór

$$L = \int\limits_{U_0}^{0} U\,dQ = \int\limits_{0}^{Q_0} \frac{Q}{C}\,dQ = \frac{1}{C}\int\limits_{0}^{Q_0} Q\,dQ = \frac{1}{C}\frac{1}{2}Q_0^2. \tag{14.63}$$

A więc energia układu, którą oznaczymy E_p, wyrazi się wzorem

$$E_p = \frac{1}{2}U_0 Q_0\,. \tag{14.64}$$

Albo wziąwszy pod uwagę, że $Q_0 = CU_0$,

$$E_p = \frac{1}{2}CU_0^2. \tag{14.65}$$

Podstawiając do powyższego wzoru wyrażenie na pojemność kondensatora płaskiego otrzymamy na jego energię wzór (w układzie ES)

$$E_p = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon S}{4\pi d}U^2 = \frac{1}{8\pi}\,\frac{\varepsilon S}{d}\,E^2 d^2 = \frac{1}{8\pi}\varepsilon\,E^2 S d. \tag{14.66}$$

Lecz iloczyn $Sd = V$, czyli objętości przestrzeni zawartej między okładkami kondensatora. Możemy więc napisać

$$E_p = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}V, \tag{14.67}$$

skąd wynika, że energia jest proporcjonalna do objętości zawartej między okładkami, do kwadratu natężenia pola między nimi i do stałej dielektrycznej środo-

wiska wypełniającego tę przestrzeń. Za przykładem Faradaya przypisujemy każdej jednostce objętości, w której panuje pole elektryczne, energię

$$\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \tag{14.68}$$

Jak się okazało, we wszelkich przypadkach pól elektrycznych możemy zawsze przypisać jednostce objętości energię w wyżej wymienionej ilości. Nazywamy ją gęstością energii, jako energię przypadającą na jednostkę objętości.

Zadania

14.1. Z jaką siłą przyciągają się dwie bardzo małe kuleczki w powietrzu zawierające ładunki $Q_1 = 80$ j. ES i $Q_2 = -40$ j. ES z odległości $r = 8$ cm?

Odpowiedź: 50 dyn.

14.2. Z jaką siłą odpychają się w powietrzu dwie kuleczki o ładunkach $Q_1 = 10^{-6}$C i $Q_2 = 2 \cdot 10^{-5}$C z odległości 20 cm. Obliczyć w układzie MKSA i w układzie ES.

Odpowiedź: 4,5 N, $4{,}5 \cdot 10^5$ dyn.

14.3. Dwie kuleczki, każda o masie 20 mg zawieszone są na lekkich niteczkach długości 50 cm stykając się ze sobą. Po naelektryzowaniu oddaliły się o 8 cm. Jaki jest ładunek elektryczny każdej kuleczki w j. ES i w kulombach?

Odpowiedź: 10,04 j. ES $= 3{,}347 \cdot 10^{-9}$C.

14.4. Trzy jednakowe ładunki dodatnie q znajdują się w wierzchołkach trójkąta równobocznego. Jaki ładunek Q należy umieścić w środku trójkąta, aby siły wywierane na poszczególne ładunki były równe zeru?

Odpowiedź: Ładunek ujemny o wartości $Q = \frac{q}{\sqrt{3}}$.

14.5. Jaka jest gęstość ładunku na kuli o promieniu $R = 3$ cm po wprowadzeniu na nią ładunku 120 j. ES?

Odpowiedź: 1,061 j. ES/cm².

14.6. Jaka jest wartość natężenia pola przy powierzchni tego przewodnika?

Odpowiedź: 13,33 j. ES = 3999 V/cm.

14.7. W punkcie A znajduje się ładunek $Q = 100$ j. ES. Jakie jest napięcie między punktami B i C, z których B znajduje się w odległości 5 cm, a C — w odległości 20 cm od punktu A?

Odpowiedź: $U = \int\limits_5^{20} \frac{Q}{r^2}\,dr = 15$ j. ES = 4500 V.

14.8. Jaka jest wartość potencjału w powietrzu w punkcie oddalonym od bieguna zawierającego Q jednostek ES o r cm, jeżeli ziemia, względem której liczymy potencjały, jak również inne ciała są niezmiernie odległe?

Odpowiedź: $U = \int\limits_r^{\infty} \frac{Q}{r^2}\,dr = \frac{Q}{r}$.

14.9. Na kuli przewodzącej o promieniu r znajdującej się w bardzo wielkiej odległości od innych ciał znajduje się ładunek Q. Jakie jest natężenie pola w odległości R od środka kuli?

W s k a z ó w k a. Obliczyć strumień wektora E przez powierzchnię kulistą o promieniu R, który według twierdzenia Gaussa $= 4\pi Q$. Stąd otrzymuje się $E = \frac{Q}{R^2}$.

14.10. Jakie jest natężenie pola w odległości $d = 1$ cm od powierzchni kuli o promieniu $r = 3$ cm znajdującej się w bardzo dużej odległości od otaczających ciał, naładowanej do potencjału $U = 1000$ V?

O d p o w i e d ź: $E = \frac{Ur}{300(r+d)^2} = 0{,}625$ j. ES.

14.11. Natężenie pola elektrycznego Ziemi przy jej powierzchni wynosi średnio — 0,043 j. ES. Jaki ładunek ma Ziemia?

O d p o w i e d ź: $17{,}4 \cdot 10^{15}$ j. ES $= 5{,}8 \cdot 10^5$C.

14.12. Jaki potencjał U będzie miała kula o promieniu $R = 3$ cm po wprowadzeniu na nią ładunku 120 j. ES?

O d p o w i e d ź: $U = 12\,000$ V.

14.13. Jaką pojemność ma kula ziemska (promień $R = 6370$ km)?

O d p o w i e d ź: $6{,}37 \cdot 10^8$ j. ES $= 707$ μF.

14.14. Jaki ładunek znajduje się na okładce kondensatora o pojemności 2000 pF naładowanego do napięcia 3000 V między okładkami?

O d p o w i e d ź: $Q = 6 \cdot 10^{-6}$C $= 18\,000$ j. ES.

14.15. Jakie napięcie między okładkami uzyska kondensator o pojemności 500 pF po wprowadzeniu na okładkę ładunku $0{,}5 \cdot 10^{-6}$C?

O d p o w i e d ź: 1000 V.

14.16. Jaka jest pojemność kondensatora kulistego w j. ES i MKSA złożonego z dwóch kul współśrodkowych, z których wewnętrzna ma średnicę 10 cm, zewnętrzna zaś średnicę większą od wewnętrznej o 2 mm?

O d p o w i e d ź: $C = 255$ j. ES $= 283{,}3$ pF.

14.17. Na kulę metalową o pojemności 2 j. ES wprowadzono ładunek $Q = 5{,}5$ j. ES. Jaki ładunek przejdzie na kulkę nienaładowaną o promieniu $r = 2$ mm po połączeniu jej drutem z poprzednią (pojemność drutu łączącego zaniedbać)? Jaki potencjał będą miały wtedy kulki?

O d p o w i e d ź: 0,5 j. ES; $U = 750$ V.

14.18. Kondensator składa się z dwóch płaskich krążków średnicy 20 cm oddalonych od siebie o 1 mm. Jaka jest jego pojemność?

O d p o w i e d ź: $C = 250$ j. ES $= 277{,}8$ pF.

14.19. Obliczyć pojemność butelki lejdejskiej (stosując wzór na pojemność kondensatora płaskiego) mając dane następujące: średnica 12 cm, wysokość okładek 20 cm, stała dielektryczna szkła $\varepsilon = 7$, grubość ścianek słoja 2,5 mm?

O d p o w i e d ź: $C = 1932$ j. ES $= 2147$ pF.

14.20. Dwadzieścia butelek lejdejskich naładowano każdą do napięcia 5000 V, po czym połączono je w szereg. Zewnętrzną okładkę pierwszej połączono z ziemią. Ile wynosi napięcie na wewnętrznej okładce ostatniej butelki?

O d p o w i e d ź: 100 000 V.

14.21. Jaka jest energia kondensatora o pojemności 2μF naładowanego do napięcia 2000 V?

O d p o w i e d ź: 4 J.

14.22. Kondensator o pojemności $6\mu F$ zawierający ładunek 0,006 C rozbrojono przez cienki drucik, w którym wydzieliło się ciepło. Jaka ilość ciepła zostanie wytworzona?

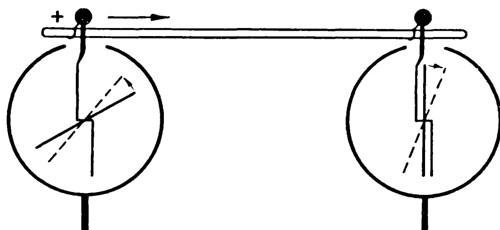
Odpowiedź: 0,717 cal.

Pytania do powtórzenia materiału

1. W jaki sposób możemy ciała elektryzować?
2. Jaka jest treść prawa Coulomba? Jak się wyraża prawo Coulomba w układzie ES i MKSA?
3. Jak się określa jednostkę ES ładunku, kulomb?
4. Gdzie się znajdują na ciałach ładunki elektryczne? Jak określamy gęstość ładunku?
5. W jaki sposób można wzbudzać ładunki przez indukcję?
6. Jaka jest treść zasady zachowania elektryczności?
7. Jak się objaśnia działanie elektroforu? Maszyny influencyjnej elektrostatycznej?
8. Co nazywamy polem elektrycznym? Natężeniem pola w danym miejscu?
9. Jakie jest natężenie pola wewnątrz przewodnika w przypadku równowagi ładunków? Jaki kierunek mają linie elektrycznego natężenia przy powierzchni przewodnika?
10. Jak się określa strumień pola elektrycznego przez powierzchnię dS?
11. Jakie jest natężenie pola w odległości R od ładunku punktowego?
12. Czemu się równa strumień natężenia pola przez powierzchnię otaczającą ładunek Q?
13. Jaki jest związek między natężeniem pola przy powierzchni przewodnika a gęstością na nim ładunku w układzie ES i MKSA?
14. Jak się określa napięcie między dwoma punktami pola elektrycznego?
15. Jakie są jednostki napięcia i jak się je definiuje?
16. Co nazywamy potencjałem? Jaki jest związek między potencjałem a napięciem?
17. Jaki jest związek między potencjałem a natężeniem pola elektrycznego?
18. Co można powiedzieć o potencjałach poszczególnych punktów przewodnika?
19. Jakie powierzchnie nazywamy powierzchniami ekwipotencjalnymi?
20. Jaką wielkość elektryczną mierzą elektroskopy i elektrometry?
21. Jakie są zasadnicze części ogniwa galwanicznego? Jakie ma ono własności?
22. Jak możemy łączyć ogniwa w baterie? Co możemy w taki sposób uzyskać?
23. Jak określamy pojemność elektryczną przewodnika? Jakie są jednostki pojemności?
24. Czy pojemność pojedynczego przewodnika jest dobrze określona?
25. Jakie układy przewodników nazywamy kondensatorami?
26. Jak jest zbudowany kondensator kulisty? Jaka jest jego pojemność?
27. Jaka jest pojemność kuli bardzo oddalonej od otaczających przedmiotów?
28. Jak jest zbudowany kondensator płaski? Jaka jest jego pojemność?
29. Jak określamy stałą dielektryczną dielektryka? Jaka jest pojemność kondensatora wypełnionego dielektrykiem?
30. Jak możemy łączyć kondensatory? Jaka jest pojemność układu kondensatorów połączonych równolegle? szeregowo?
31. Czy siły pola działające na ładunki w dielektryku są takie same jak w próżni? Jak należy napisać prawo Coulomba dla ładunków w dielektryku?
32. Jak określamy natężenie pola i indukcję w dielektryku? Jaki jest związek między tymi wektorami?
33. Na czym polega polaryzacja dielektryka?
34. Jaką energię ma naładowany kondensator? Czemu się równa gęstość energii pola elektrycznego?

15. Prąd elektryczny

15. 1. Przepływ ładunków. Prąd elektryczny. Weźmy dwa elektroskopy Naładujmy jeden, drugi niech będzie całkowicie wyładowany (rys. 15.1). Połączmy je długim na $^1/_2$ m prętem drewnianym. Stwierdzimy, że odchylenie wskazówki pierwszego elektroskopu zmniejsza się, natomiast w drugim wskazówka zaczyna się odchylać. Po jakimś czasie odchylenia zrównają się, wyrównają się zatem ich potencjały. Gdy zamiast pręta drewnianego użyjemy do połączeni- elektroskopów drutu metalowego, zjawisko odbędzie się momentalnie. Stwiera dzamy w ten sposób, że gdy dwa przewodniki o różnych potencjałach połączymy przewodnikiem, ładunki przepływają od potencjału wyższego do niższego. Zjawisko to nazywamy prądem elektrycznym. Za kierunek prądu przyjęto kierunek ruchu ładunków dodatnich, a więc od potencjału wyższego do niższego. Jak się okazało, w metalach płyną tylko ładunki ujemne, elektrony, w kierunku przeciwnym do kierunku przyjętego za kierunek prądu. W cieczach i gazach płyną jednocześnie ładunki obu znaków w przeciwnych kierunkach. Ruch ładunków jednego znaku jest w zupełności równoważny ruchowi ładunków znaku przeciwnego w przeciwną stronę. Najczęściej będziemy więc traktowali przepływ ładunków w prądzie jako przepływ ładunków dodatnich.



Rys. 15.1. Przepływ ładunków od elektroskopu naładowanego do nienaładowanego

Najrozmaitsze doświadczenia wykazały, że jakikolwiek ruch ładunków elektrycznych, czy to w ciałach, czy w próżni, czy wraz z ciałami, ma zawsze własności prądu elektrycznego. Z prądem elektrycznym zaś są związane najrozmaitsze zjawiska: wydzielanie ciepła w przewodnikach, działania magnetyczne, działania chemiczne. Będziemy się kolejno zajmowali tymi działaniami. Z działań tych ocenić często można, jakie ilości elektryczności przepływają w danym przewodniku.

Gdy dwa przewodniki o różnych potencjałach połączymy drutem, ładunki elektryczne płyną przez drut, dopóki potencjały ich nie wyrównają się. Mamy

tu przepływ prądu krótkotrwałego, chwilowego. Lecz znamy sposoby, aby wywołać długotrwały przepływ ładunków, np. za pomocą ogniw galwanicznych. Łatwo sprawdzić, że jeżeli bieguny ogniwa połączymy drutem, to jednak bieguny te mimo to będą miały trwale różne potencjały. Muszą więc w tym przypadku trwale płynąć ładunki elektryczne. Najwidoczniej w ogniwie występują działania pędzące ładunki w pewnym kierunku. Działania takie nazywamy siłami elektromotorycznymi. Siła elektromotoryczna jest zresztą zupełnie inną wielkością niż siła w mechanice i o innym wymiarze.

15.2. Natężenie prądu elektrycznego. Gdy ładunki przemieszczają się wzdłuż przewodnika, mówimy, że w przewodniku płynie prąd elektryczny o natężeniu i określonym wzorem

$$i = \frac{Q}{t}, \tag{15.1}$$

gdzie Q oznacza ładunek przepływający przez dany przekrój przewodnika w czasie t. A więc natężenie prądu elektrycznego określone jest przez stosunek ładunku przepływającego do czasu jego przepływu. Gdy ładunek ten nie jest proporcjonalny do czasu, wówczas określamy natężenie prądu wzorem

$$i = \frac{dQ}{dt}. \tag{15.2}$$

Gdy w każdej sekundzie przepływa przez przewodnik jednostka *ES* ładunku, wówczas prąd ma natężenie równe jednostce ES. Gdy $Q = 1$ C w każdej sekundzie, wówczas mówimy, że natężenie prądu wynosi 1 amper (skrót A).

Wymiar natężenia prądu w układzie elektrostatycznym będzie:

$$[\mathrm{i}] = \frac{[\mathrm{m}^{1/2}\,\mathrm{l}^{3/2}\,\mathrm{t}^{-1}]}{[\mathrm{t}]} = [\mathrm{m}^{1/2}\,\mathrm{l}^{3/2}\,\mathrm{t}^{-2}].$$

Jednostką będzie więc $\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{g}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-2}$. Jednostka ta nie ma nazwy. 1 A jest równy w przybliżeniu $3 \cdot 10^9$ jednostek ES. Dokładne określenie ampera będzie podane później.

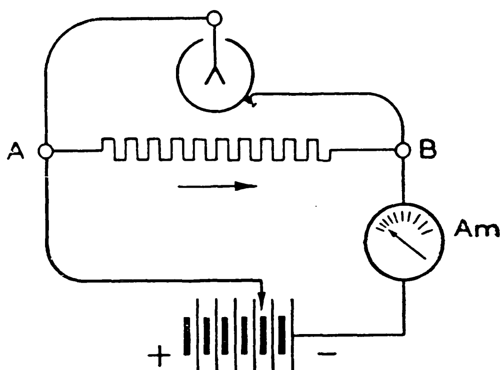
Prąd elektryczny, którego natężenie nie zależy od czasu, nazywamy prądem stałym. Prąd stały musi mieć we wszystkich przekrojach przewodnika taką samą wartość, przy tym prąd taki może płynąć tylko w obwodzie zamkniętym, krążyć w koło. Gdyby tak nie było, ładunki dodatnie lub ujemne musiałyby się zbierać w niektórych miejscach obwodu, co musiałoby spowodować zmiany potencjałów i prądu w czasie. Podobnie jak przy przepływie ustalonym cieczy przez rury, ile cieczy do pewnej objętości rury przypływa, tyleż musi odpływać, tak samo, ile elektryczności do jakiejś części obwodu przypływa, tyleż musi odpływać.

Do pomiaru natężenia prądu służą przyrządy oparte na rozmaitych działaniach prądu, najczęściej magnetycznych, zwane amperomierzami. Budowa ich będzie

wyjaśniona później. Zwykle przyrządy takie są wycechowane i wskazówka ich wskazuje od razu przepływający przez nie prąd w amperach.

Prócz ampera używamy często jako jednostek podwielokrotności i wielokrotności ampera. Najczęściej w laboratoriach używaną jednostką mniejszą jest miliamper (skrót mA).

15.3. Prawo Ohma. Opór elektryczny. Doświadczeniem łatwo wykazać, że natężenie prądu płynącego w przewodniku zależy od różnicy potencjałów między jego różnymi częściami. Zwykle używamy do przewodzenia prądu drutów o małym przekroju w stosunku do długości. Aby stwierdzić zależność między prądem płynącym w drucie i napięciem między jego końcami, zestawiamy obwód jak na rys. 15.2. Jako źródło napięć może służyć bateria galwaniczna. Włączając różną liczbę ogniw baterii połączonej szeregowo możemy wywołać różne napięcia między punktami A i B przewodnika. Można je zmierzyć za pomocą czułego elektroskopu, elektrometru, lub łatwiej — za pomocą woltomierza, którego budowa będzie później opisana. W którekolwiek miejsce obwodu włączamy amperomierz *Am*. Obojętne jest gdzie, gdyż jak już wspomniano, natężenie prądu stałego w każdym miejscu obwodu zamkniętego jest jednakowe.



Rys. 15.2. Stwierdzenie proporcjonalności natężenia prądu do napięcia między końcami przewodnika

Zmieniając napięcie łatwo się przekonać, że i natężenie prądu ulega zmianie przy zmianach napięcia. Przy tym doświadczenie wykazuje, że natężenie prądu i jest dokładnie proporcjonalne do napięcia U:

$$i \sim U.$$

Zależność tę nazywamy prawem Ohma. Stosuje się ono do jakiegokolwiek jednorodnego przewodnika — tak do całości, jak i do każdej jego części.

Skoro natężenie prądu jest proporcjonalne do napięcia, to stosunek tych dwóch wielkości dla danego przewodnika jest stały. Stosunek napięcia na końcach drutu do natężenia prądu w nim płynącego jest miarą wielkości zwanej oporem przewodnika. Będziemy opór oznaczać literą R. Zatem

$$\boxed{R = \frac{U}{i}.} \qquad (15.3)$$

Dla różnych przewodników ten stosunek ma różne wartości, a więc mają one rozmaite opory. Opór przewodnika jest jego cechą charakterystyczną. Sposób oznaczania przewodników o pewnym oporze podaje rys. 15.3. Przewodnik, w którym, przy różnicy potencjałów wynoszącej 1 wolt pomiędzy jego końcami, płynie prąd o natężeniu 1 ampera, ma opór jednostkowy. Tę jednostkę nazywamy omem bezwzględnym albo absolutnym (skrót Ω).





Rys. 15.3. Oznaczanie oporów

Wymiar oporu w układzie elektrostatycznym jest następujący:

$$[R] = \frac{[U]}{[i]} = \frac{[m^{1/2} l^{1/2} t^{-1}]}{[m^{1/2} l^{3/2} t^{-2}]} = [l^{-1}\, t^{1}].$$

Jednostką nie mającą oddzielnej nazwy jest $cm^{-1}\, sec^{1}$.

Doświadczenia wykazały, że opór drutów o stałym przekroju wykonanych z jednolitego materiału jest wprost proporcjonalny do ich długości l, zaś odwrotnie proporcjonalny do pola przekroju S. Wprowadzając współczynnik proporcjonalności ϱ możemy napisać:

$$\boxed{R = \varrho \frac{l}{S}.} \tag{15.4}$$

Współczynnik proporcjonalności ϱ zależy od materiału drutu nazywamy jego oporem właściwym. Gdy $l = 1$ cm i $S = 1$ cm², wówczas $\varrho = R$, zatem opór właściwy równa się oporowi sześcianu lub walca o podstawie równej 1 cm² i wysokości równej 1 cm. W tabelach oporów właściwych podają najczęściej wartość $10^4 \cdot \varrho$ równą oporowi drutu długości 1 m o przekroju 1 mm².

Tabela 15.1

Opór właściwy metali i stopów w temperaturze 18°C. W tabeli podane są liczby dla $10^4 \cdot \varrho$

Metal	Opór właściwy	Stop	Opór właściwy
Srebro	0,016	Manganin	
Miedź	0,017	(70% Cu, 30%Mn)	0,43
Glin	0,027	Konstantan	
Cynk	0,059	(35–55% Ni,	
Żelazo	0,098	65 – 45% Cu,	
		0 = 20% Zn)	0,50

Opór właściwy czystych metali dość szybko rośnie z podwyższeniem temperatury. W niezbyt wielkim zakresie temperatur opór właściwy wzrasta zgodnie z wzorem

$$\varrho = \varrho_0 (1 + at),$$

gdzie ϱ_0 oznacza opór właściwy w temperaturze 0°C. Współczynnik temperaturowy α dla części metali jest bliski współczynnika rozszerzalności dla gazów 0,00367. Poniższa tabela przytacza przykłady:

Tabela 15.2

Współczynniki temperaturowe oporu α

Ciało	w stop^{-1}	Ciało	w stop^{-1}
Glin	0,0039	Rtęć	0,00089
Miedź	0,00393	Węgiel	−0,0005
Platyna	0,003	Wolfram	0,0045
Srebro	0,0038	Żelazo	0,005

Jak widać z powyższej tabeli, szczególnie silnie rośnie opór żelaza, wskutek czego drut żelazny ma różne zastosowania techniczne.

Przy obniżaniu temperatury opór metali silnie maleje. W temperaturach bliskich zera absolutnego opór niektórych metali w określonej temperaturze nagle spada i staje się znikomo mały. Zjawisko to nazywamy nadprzewodnictwem.

Zjawisko zmiany oporu w zależności od temperatury wykorzystano przy budowie termometrów oporowych. Ze zmiany oporu wnioskuje się o temperaturze. Zwykle używany jest do termometrów oporowych drut platynowy.

Wymienione w tabeli stopy manganin i konstantan odznaczają się szczególną stałością oporu. Opór ich w bardzo nieznacznym stopniu zależy od temperatury. Z tego powodu używane są do sporządzania wzorców oporu.

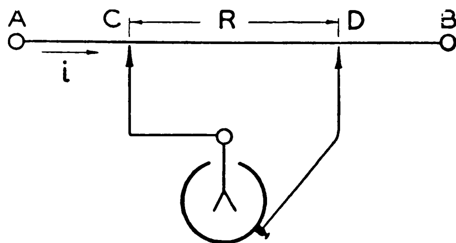
Do przewodników elektrolitycznych stosuje się również prawo Ohma. Opór elektrolitów maleje ze wzrostem temperatury.

Z równania (15.3) otrzymać możemy dwa równania:

$$iR = U, \qquad (15.5)$$

$$i = \frac{U}{R}. \qquad (15.6)$$

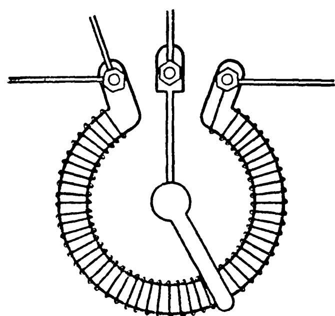
Pierwsze z tych równań wyznacza spadek napięcia na przewodniku, w którym płynie prąd i, drugie pozwala obliczyć natężenie prądu, gdy znamy napięcie między końcami przewodnika i jego opór.



Rys. 15.4. Spadek potencjału wzdłuż przewodu, w którym płynie prąd elektryczny

15.4. Spadek potencjału wzdłuż przewodnika. Jeżeli w drucie AB płynie stały prąd o natężeniu i, to napięcie pomiędzy punktami CD jest według równania (15.5) proporcjonalne do oporu R części drutu między punktami C i D (rys. 15.4):

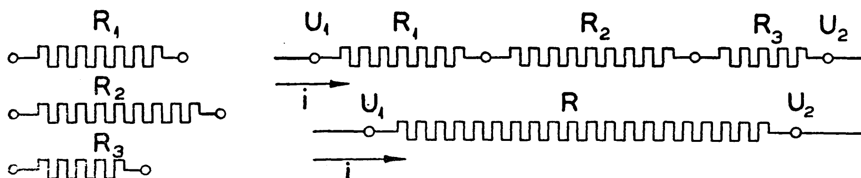
$$U = iR.$$



Rys. 15.5. Potencjometr

Gdy punkty C i D zbliżamy jeden do drugiego, opór R maleje, zatem maleje również napięcie U. Przyłączając dwa druty do różnych punktów przewodnika, w którym płynie prąd, możemy uzyskiwać różne napięcia zawarte między 0 i napięciem między końcami tego przewodnika. Na tej zasadzie oparta jest budowa tzw. potencjometrów, przyrządów do regulowania napięcia. Przykład potencjometru podaje rys. 15.5.

15.5. Łączenie oporów. 1. Łączenie szeregowe. Połączenie kilku oporów R_1, R_2, R_3, np. w sposób wskazany na rys. 15.6, nazywamy połączeniem szeregowym. Przypuśćmy, że przez te przewodniki płynie prąd o natężeniu i. Napięcie, jakie wytworzy się między początkiem pierwszego oporu i końcem ostatniego, niech będzie $U_1 - U_2$. Pytamy się, jakim oporem R można będzie zastąpić poprzednie opory połączone, aby przy tym samym prądzie i między jego końcami wytworzyło się takie samo napięcie $U_1 - U_2$?



Rys. 15.6. Połączenie szeregowe przewodów

Według prawa Ohma możemy napisać:

$$R_1 i = U_1 - U',$$
$$R_2 i = U' - U'', \tag{15.7}$$
$$R_3 i = U'' - U_2.$$

Zaś dla oporu R, który ma zastąpić poprzednie trzy, otrzymamy

$$Ri = U_1 - U_2. \tag{15.8}$$

Dodając trzy równania (15.7) stronami otrzymamy

$$(R_1 + R_2 + R_3)\, i = U_1 - U_2. \tag{15.9}$$

Z porównania równań (15.8) i (15. 9) otrzymujemy

$$R = R_1 + R_2 + R_3. \tag{15.10}$$

Dla n przewodników połączonych szeregowo możemy napisać

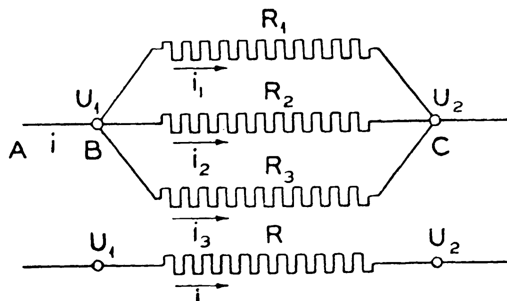
$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n . \tag{15.11}$$

Opór przewodnika złożonego z kilku przewodników połączonych szeregowo równa się sumie ich oporów.

2. Ł ą c z e n i e r ó w n o l e g ł e. Takie połączenie, gdy łączymy razem początki i końce drutów, nazywamy połączeniem równoległym (rys. 15.7). Przede wszystkim musi tu być spełnione równanie

$$i_1 + i_2 + i_3 = i, \tag{15.12}$$

gdyż ile elektryczności dopływa drutem AB do punktu B, tyleż musi odpływać przez trzy druty połączone równolegle. W przeciwnym razie w punkcie B musiałyby się zbierać ładunki dodatnie albo ujemne.



Rys. 15.7. Połączenie równoległe przewodów

Według prawa Ohma możemy napisać dla każdego z przewodów, oznaczając potencjały na ich połączonych końcach przez U_1 i U_2:

$$i_1 = \frac{U_1 - U_2}{R_1}, \quad i_2 = \frac{U_1 - U_2}{R_2}, \quad i_3 = \frac{U_1 - U_2}{R_3}. \tag{15.13}$$

Dodając te trzy równania i wziąwszy pod uwagę równanie (15.12) możemy napisać

$$i = (U_1 - U_2)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right). \tag{15.14}$$

Jeżeli poprzednie trzy przewodniki mają być zastąpione przez jeden drut, to jego opór musi być tak dobrany, aby natężenie prądu w nim płynącego było i, tak samo jak poprzednio, i takie same potencjały na jego końcach. Zatem musimy mieć

$$i = \frac{U_1 - U_2}{R}. \tag{15.15}$$

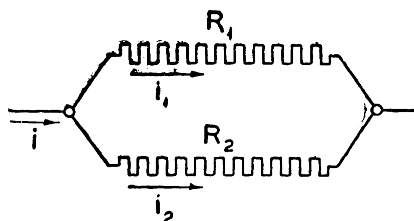
Z porównania równań (15.14) i (15.15) wynika, że

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \tag{15.16}$$

Przy połączeniu n drutów równolegle będziemy mieli wzór

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n}. \tag{15.17}$$

Przerachowując jakikolwiek prosty przykład liczbowy można się przekonać, że opór drutów połączonych równolegle R jest zawsze mniejszy od najmniejszego z włączonych oporów. Równanie (15.17) możemy wysłowić krótko: odwrotność oporu kilku przewodników połączonych równolegle równa się sumie odwrotności ich oporów.



Rys. 15.8. Podział prądu między dwa równoległe przewody

Ważną dla zastosowań rzeczą jest wiedzieć, jak się dzieli prąd całkowity i między poszczególne przewody prądu. Weźmy pod uwagę najprostszy i najczęściej zdarzający się w praktyce przypadek dwu oporów połączonych równolegle (rys. 15.8). Między prądami i, i_1 oraz i_2 mamy związek:

$$i = i_1 + i_2. \tag{15.18}$$

Z prawa Ohma wynika, że

$$\begin{aligned} i_1 R_1 &= U_1 - U_2, \\ i_2 R_2 &= U_1 - U_2. \end{aligned} \tag{15.19}$$

Z powyższych równań wynika, że

$$i_1 R_1 = i_2 R_2. \tag{15.20}$$

Zatem

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}. \tag{15.21}$$

Prądy płynące w poszczególnych przewodach są odwrotnie proporcjonalne do ich oporów. Z równań (15.18) i (15.20) możemy otrzymać

$$i_1 = \frac{iR_2}{R_1 + R_2}, \qquad i_2 = \frac{iR_1}{R_1 + R_2}. \tag{15.22}$$

Z wzorów tych łatwo obliczyć, jaka część całkowitego prądu płynie w każdym z przewodów.

Rozważany tu przypadek rozgałęzienia prądów ma zastosowanie przy znieczulaniu przyrządów pomiarowych za pomocą tzw. boczników. Aby zapobiec przepływowi silnego prądu przez przyrząd, włączamy równolegle do niego drut o odpowiednio małym oporze. Ponieważ według równania (15.21) natężenia prądów są odwrotnie proporcjonalne do oporów, więc można tak dobrać ten opór, aby przez przyrząd płynęła tylko niewielka część całkowitego prądu. Przypuśćmy np., że mamy przyrząd, przez który nie można przepuścić silniejszego prądu niż 0,01 ampera, i że opór tego przyrządu wynosi $R_1 = 100\ \Omega$. Przyrząd mamy włączyć

szeregowo w obwód, w którym ma płynąć prąd o natężeniu $i = 10$ A. Musimy zatem przyrząd spiąć bocznikiem R_2 tak, aby

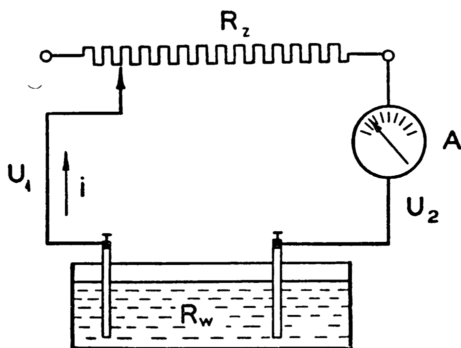
$$i_1 = 0{,}01 = \frac{iR_2}{R_1 + R_2} = \frac{10R_2}{100 + R_2},$$

skąd

$$R_2 = \frac{1}{9{,}99} \approx 0{,}1\,\Omega.$$

15.6. Zastosowanie prawa Ohma do obwodów zamkniętych. a. Obwód zamknięty, w którym znajduje się ogniwo galwaniczne. Zestawmy obwód jak na rys. 15.9. Bieguny ogniwa o oporze wewnętrznym R_w (elektrolitu) łączymy drutem o oporze R_z, który nazwiemy oporem zewnętrznym. Opór wewnętrzny można zmieniać zmieniając odległość między elektrodami ogniwa. Opór zewnętrzny zaś — przez włączanie drutów np. różnej długości. Za pomocą takiego doświadczenia można okazać, że przy zmianie czy to oporu wewnętrznego, czy zewnętrznego natężenie prądu zmienia się w ten sposób, że natężenie i jest odwrotnie proporcjonalne do całkowitego oporu obwodu. Ponieważ opór ten składa się z oporów R_w i R_z połączonych szeregowo, zatem i jest odwrotnie proporcjonalne do $R_w + R_z$. A więc iloczyn

$$i(R_w + R_z) = \text{const.} \quad (15.23)$$



Rys. 15.9. Natężenie prądu płynącego w obwodzie jest odwrotnie proporcjonalne do całkowitego oporu obwodu

Jeżeli do obwodu będziemy włączali ogniwa różnych typów, to okaże się, że ten iloczyn dla każdego typu ogniwa będzie miał inną wartość. Iloczyn ten jest stałą charakterystyczną dla danego typu ogniwa, niezależną ani od jego wielkości, ani od wielkości oporu zewnętrznego, ani wewnętrznego. Określa on wielkość siły elektromotorycznej ogniwa. Oznaczając ją litera E_m możemy napisać

$$E_m = i(R_z + R_w). \quad (15.24)$$

Z tego określenia widać, że siła elektromotoryczna ma wymiar napięcia, i tak jak napięcie wyraża się w woltach. Z równania (15.24) możemy otrzymać

$$E_m = iR_z + iR_w. \quad (15.25)$$

Lecz iloczyn iR_z równa się różnicy potencjałów $U_1 - U_2$ na końcach oporu R_z. Ponieważ końce te są połączone z biegunami ogniwa, zatem jest on także równy różnicy potencjałów między biegunami ogniwa:

$$iR_z = U_1 - U_2. \quad (15.26)$$

Oznaczając różnicę potencjałów jedną literą U, możemy napisać

$$E_m = U + iR_w, \tag{15.27}$$

skąd

$$U = E_m - iR_w. \tag{15.28}$$

Napięcie ogniwa U jest zatem mniejsze od jego siły elektromotorycznej. Jeżeli ogniwo jest otwarte, to $i = 0$ i wtedy

$$U = E_m. \tag{15.29}$$

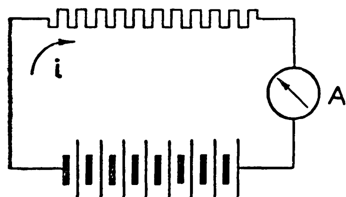
Napięcie ogniwa otwartego równa się jego sile elektromotorycznej. Mierząc zatem napięcie na biegunach ogniwa otwartego znajdujemy wielkość jego siły elektromotorycznej. Jeżeli opór zewnętrzny jest bardzo duży, a więc prąd i bardzo słaby, to U bardzo mało różni się od E_m. Również będzie się mało różnić, gdy opór wewnętrzny R_w jest bardzo mały. Mierząc w takim wypadku napięcie otrzymujemy przybliżoną wartość siły elektromotorycznej.

Z równania (15.24) otrzymujemy

$$i = \frac{E_m}{R_w + R_z}. \tag{15.30}$$

A więc natężenie prądu stałego w obwodzie zamkniętym równa się sile elektromotorycznej działającej w tym obwodzie, podzielonej przez całkowity opór obwodu.

b. Bateria ogniw galwanicznych połączonych szeregowo (rys. 15.10). Łącząc n jednakowych ogniw szeregowo otrzymujemy baterię, której siła elektromotoryczna, równa napięciu baterii otwartej, będzie równa nE_m, gdzie n jest liczbą ogniw, a E_m siłą elektromotoryczną jednego ogniwa. Opór wewnętrzny zaś będzie równy nR_w, gdzie R_w oznacza opór wewnętrzny jednego ogniwa. Łącząc bieguny baterii drutem o oporze R_z otrzymamy w obwodzie prąd o natężeniu



Rys. 15.10. Bateria ogniw galwanicznych połączonych szeregowo

$$i = \frac{nE_m}{R_z + nR_w}. \tag{15.31}$$

Łączenie szeregowe ogniw jest korzystne wtedy, gdy opór wewnętrzny ogniw jest mały. W przypadku, gdy opór zewnętrzny R_z jest bardzo duży wobec R_w, możemy napisać wzór przybliżony

$$i = \frac{nE_m}{R_z}. \tag{15.32}$$

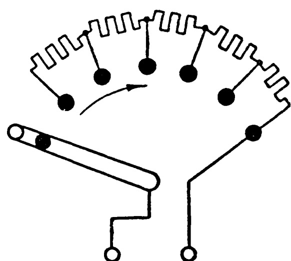
Prąd będzie w przybliżeniu proporcjonalny do liczby n ogniw.

c. Bateria ogniw połączonych równolegle. Siła elektromotoryczna baterii ogniw połączonych równolegle jest taka sama, jak jednego ogniwa. Natomiast opór wewnętrzny będzie mniejszy, gdyż opory ogniw są połączone równolegle. Będzie on zatem równy $\frac{R_w}{n}$. Zatem na natężenie prądu otrzymamy wzór

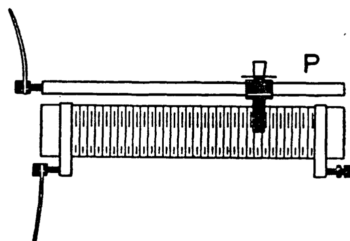
$$i = \frac{E_m}{R_z + \frac{R_w}{n}}. \tag{15.33}$$

Łączenia równoległego używamy wtedy, gdy są nam potrzebne prądy o dużym natężeniu, gdy więc opór zewnętrzny jest stosunkowo mały.

15.7. Oporniki. Połączenia drutów o różnym oporze, które możemy włączać do obwodu prądu mając możność łatwej zmiany oporu, nazywamy opornikami. Istnieją trzy typy zwykle używanych w laboratoriach i w elektrotechnice oporników. Opornik korbowy jest przedstawiony na rys. 15.11. Na płycie izolującej znajduje się szereg guzików względnie płytek metalowych połączonych



Rys. 15.11. Opornik korbowy



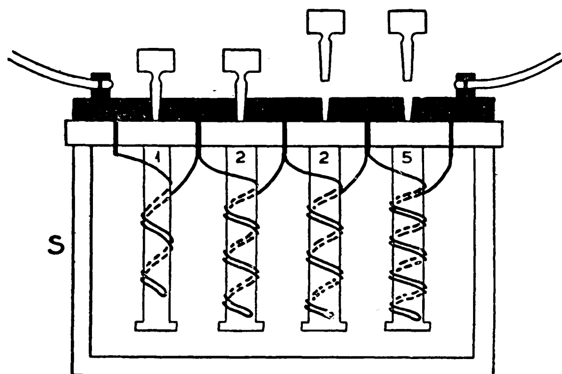
Rys. 15.12. Opornik suwakowy

drutami o określonych oporach. Korbę połączoną z zaciskiem do włączania prądu możemy przesuwać tak, że łączy ona poszczególne guziki z tym zaciskiem. Widać, że przez obrót możemy włączać różne opory do obwodu.

Opornik suwakowy jest przedstawiony na rys. 15.12. Składa się on zazwyczaj z porcelanowego cylindra, na którym nawinięty jest drut oporowy utleniony po wierzchu, oraz pręta metalowego P, po którym porusza się suwak posiadający dwie szczotki metalowe sprężyste ślizgające się po powierzchni drutów. Ślizgające się po powierzchni drutów szczotki ścierają izolującą warstewkę utlenioną i kontaktują dobrze z drutami. Przez przesuwanie suwaka włącza się mniej lub więcej zwojów drutu w obwód i w ten sposób można regulować natężenie prądu w obwodzie.

Opornik zatyczkowy składa się z szeregu drutów nawiniętych bifilarnie na szpulkach (15.13). Cewki te są zamknięte w skrzynce S, na której znajduje się nakrywa z ebonitu lub innego materiału dobrze izolującego. Na tej nakrywie

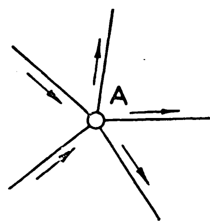
znajdują się klocki mosiężne, między którymi znajdują się małe przerwy. Do tych klocków przylutowane są końce drutów poszczególnych cewek. Końcowe klocki posiadają zaciski, do których przykręca się druty przewodzące prąd. Widać z rysunku, że prąd musi przechodzić przez wszystkie opory połączone w szereg. Lecz wkładając mosiężną zatyczkę przyszlifowaną dokładnie do otworu między klockami zwieramy dany opór, wyłączając go w ten sposób z obwodu. Każda cewka ma dokładnie dobrany opór, wypisany przy odpowiednim otworze na pokrywie. Zwykle w opornikach takich są następujące opory: 1 Ω, 2 Ω, 2 Ω, 5 Ω, 10 Ω, 20 Ω, 20 Ω, 50 Ω, 100 Ω itd. Przez wkładanie lub wyjmowanie odpowiednich zatyczek włączamy w obwód znany opór, który da się zmieniać skokami co 1 Ω, gdy najmniejszym oporem jest 1 Ω, albo co 0,1 Ω, gdy najmniejszym oporem 0,1 Ω. Oporniki zatyczkowe, zwykle bardzo precyzyjne, nawijane są drutem manganinowym.



Rys. 15.13. Opornik zatyczkowy

15.8. Sieć przewodów. Reguły Kirchhoffa. Możność rozwiązania ogólnego zadania dotyczącego rozgałęzienia prądów w skomplikowanej sieci przewodów dają nam reguły Kirchhoffa.

Pierwsza reguła Kirchhoffa odnosi się do węzłów sieci, to znaczy punktów, w których spotyka się pewna liczba przewodów (rys. 15.14). Przypuśćmy, że w punkcie A spotyka się np. 5 przewodów. Uważajmy prądy płynące w kierunku węzła za dodatnie, zaś prądy płynące od węzła A — za ujemne.



Rys. 15.14. Suma algebraiczna natężeń prądów spotykających się w węźle równa się zeru

Dla każdego węzła możemy napisać, że suma algebraiczna wszystkich spotykających się w węźle prądów równa się zeru:

$$\sum_k i_k = 0. \qquad (15.34)$$

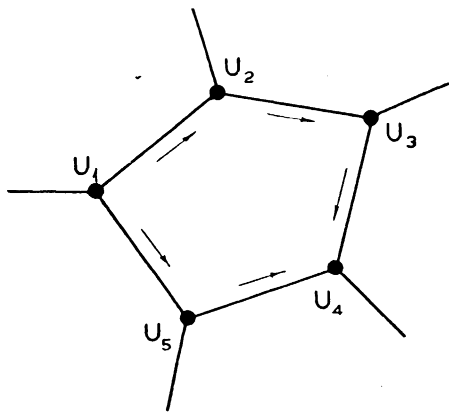
Równanie to wyraża fakt oczywisty, że w przypadku stanu ustalonego ilość dopływającej elektryczności musi się równać ilości odpływającej w tym samym czasie. Stąd to równanie.

Druga reguła Kirchhoffa odnosi się do obwodu zamkniętego w sieci (rys. 15.15). Obchodzimy ten obwód w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara i umawiamy się, że kierunki prądów zgodne z tym kierunkiem uważamy

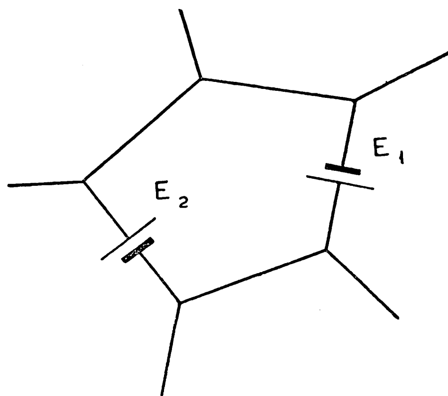
za dodatnie, zaś kierunki przeciwne — za ujemne. Druga reguła Kirchhoffa mówi, że suma algebraiczna iloczynów natężeń prądów przez wartości oporów przewodów, w których one płyną, równa się zeru:

$$\sum_k i_k R_k = 0. \tag{15.35}$$

Suma ta oznacza sumę różnic potencjałów w poszczególnych przewodach obwodu, a więc daje różnicę potencjałów między początkiem i końcem sieci. Ponieważ



Rys. 15.15. Suma algebraiczna iloczynów natężeń prądów przez wartości odpowiednich oporów dla obwodu zamkniętego równa się zeru



Rys. 15.16. Suma algebraiczna iloczynów natężeń prądów przez wartości odpowiednich oporów równa się sumie sił elektromotorycznych w obwodzie zamkniętym

zaś koniec schodzi się z początkiem, więc oczywiście musi się ona równać zeru. Łatwo to stwierdzić na przykładzie obwodu przedstawionego na rys. 15.15:

$$\sum iR = U_1 - U_2 + U_2 - U_3 + U_3 - U_4 + U_4 - U_5 + U_5 - U_1 = 0.$$

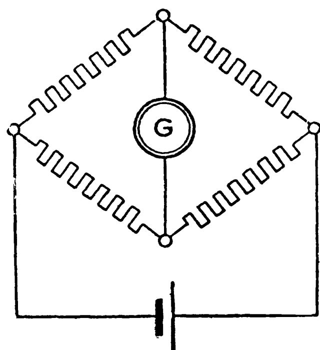
Jeżeli w niektórych gałęziach sieci znajdują się jakieś przyrządy wytwarzające siłę elektromotoryczną, np. ogniwa galwaniczne (rys. 15.16), wówczas II regułę Kirchhoffa piszemy w postaci

$$\sum iR = \sum E_m, \tag{15.36}$$

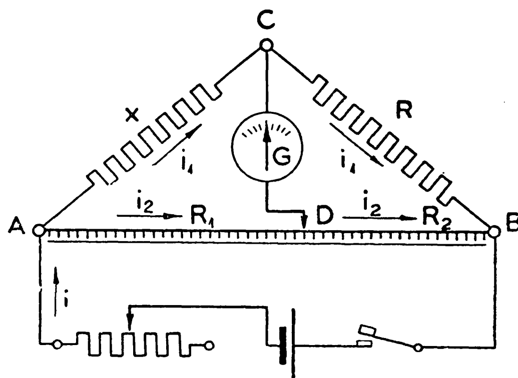
gdzie siły elektromotoryczne zgodne z kierunkiem obiegu uważamy za dodatnie, przeciwne — za ujemne.

15.9. Mostek Wheatstone'a. Układ zwany mostkiem Wheatstone'a (czyt. Uitstona) pozwala porównywać opory i dzięki temu wyznaczać je z wielką dokładnością. Jest on połączeniem czterech oporów ze źródłem prądu (rys. 15.17). Jeżeli trzy z nich są znane, czwarty można wyznaczyć. W prostszej odmianie mostka, mniej precyzyjnej, wystarczy znać jeden z oporów. Układ ten jest przedstawiony na rys. 15.18. Drut oporowy, zwykle długości 1 m, jest napięty na drew-

nianej podstawie. Pod nim znajduje się podziałka milimetrowa. Końce drutu są zaopatrzone w zaciski, do których przyłączamy źródło prądu (ogniwo lub akumulator) oraz dwa opory połączone szeregowo, tj. opór nieznany x, który chcemy zmierzyć, i opór znany R. Punkt C jest połączony giętkim drutem (mostkiem) z ruchomym suwakiem D. W mostek ten włączamy galwanoskop lub galwanometr G. Przesuwając suwak, który musi mieć dobry styk z drutem AB,



Rys. 15.17. Mostek Wheatstone'a



Rys. 15.18. Odmiana mostku używana do szybkich, mniej dokładnych pomiarów

natrafiamy po kilku próbach na taki punkt drutu AB, iż prąd w gałęzi CD przestaje płynąć, galwanoskop przestaje się wychylać. Nastąpi to wtedy, gdy suwak będzie się stykał z punktem D drutu AB o potencjale $U_D = U_C$. W tym przypadku prąd i czerpany z ogniwa dzieli się na dwie części: i_1 płynący przez gałąź ACB oraz i_2 płynący przez ADB. Stosując prawo Ohma możemy napisać:

$$i_1 x = U_A - U_C, \tag{15.37}$$

$$i_2 R_1 = U_A - U_D. \tag{15.38}$$

Gdy $U_D = U_C$, wtedy prawe strony tych równań są równe, otrzymujemy więc

$$i_1 x = i_2 R_1. \tag{15.39}$$

Podobnie możemy napisać

$$i_1 R = U_C - U_B, \tag{15.40}$$

$$i_2 R_2 = U_D - U_B, \tag{15.41}$$

skąd

$$i_1 R = i_2 R_2. \tag{15.42}$$

Dzieląc równanie (15.39) przez (15.42) otrzymamy

$$\frac{x}{R} = \frac{R_1}{R_2}, \tag{15.43}$$

skąd

$$x = R\frac{R_1}{R_2}. \tag{15.44}$$

Fabryki instrumentów fizycznych wyrabiają mostki zatyczkowe lub korbowe, w których stosunek $\frac{R_1}{R_2}$ może mieć kilka wybranych wartości. Ustaliwszy ten stosunek przez zmianę oporu R możemy osiągnąć równowagę w mostku, to znaczy doprowadzić prąd płynący przez galwanoskop do zera. Odczytując wielkość oporu R możemy obliczyć nieznany opór x. Gdy gałąź AB mostku stanowi napięty drut, wtedy opory części, na jakie dzieli ją suwak, są proporcjonalne do ich długości

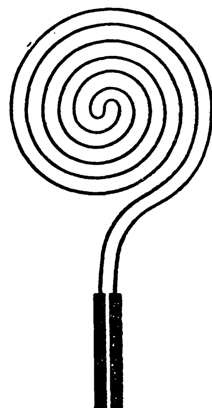
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{AD}{DB}. \tag{15.45}$$

Zatem wtedy

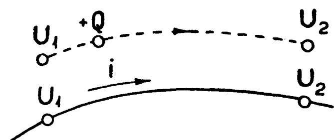
$$x = R\frac{AD}{DB}. \tag{15.46}$$

Wystarczy więc zmierzyć długość AD i DB, które odczytuje się od razu na skali, oraz włączyć do mostku znany opór R. Z równania (15.46) wyliczymy opór x.

15.10. Zależność oporu bizmutu od pola magnetycznego. W większości wypadków pole magnetyczne ma bardzo nieznaczny wpływ na opór metali. Bizmut stanowi wyjątek pod tym względem. Opór drutu bizmutowego w silnym prostopadłym do niego polu wzrasta znacznie, może nawet wzrosnąć więcej niż dwukrotnie. Ze względu na tak znaczną zmianę oporu przy zmianie pola magnetycznego używa się często tzw. spirali bizmutowej do pomiaru pola magnetycznego. Jest to cienki drucik bizmutowy (rys. 15.19) bifilarnie zwinięty w płaską spiralę, którą umieszcza się między dwiema płytkami mikowymi w celu ochrony od uszkodzeń (ponieważ drut bizmutowy jest bardzo kruchy). Spiralę włącza się jako opór x do mostku Wheatstone'a. Ze zmiany oporu, której doznaje w polu magnetycznym spirala, można wnioskować o natężeniu pola.



Rys. 15.19. Spirala bizmutowa do pomiaru pola magnetycznego



Rys. 15.20. Przy przemieszczaniu ładunku w polu elektrycznym siły pola wykonują pracę $L = Q(U_1 - U_2)$

15.11. Zamiana energii elektrycznej na cieplną. Gdy ładunek Q przemieszcza się w polu elektrycznym od potencjału U_1 do potencjału U_2 (rys. 15.20), siły pola wykonują pracę (patrz 14.27)

$$L = Q(U_1 - U_2). \tag{15.47}$$

Jeżeli U_1 i U_2 są potencjałami w dwóch miejscach przewodnika, to musi w nim popłynąć prąd. Gdy jego natężenie jest i, to ładunek przepływający w czasie t będzie

$$Q = it \tag{15.48}$$

$\left(\text{z definicji natężenia prądu } i = \frac{Q}{t}\right)$. A więc praca wykonana przez siły pola w czasie t wyrazi się wzorem

$$L = (U_1 - U_2)\, it. \tag{15.49}$$

Oznaczając różnicę potencjałów, czyli napięcie jedną literą U możemy napisać

$$L = Uit. \tag{15.50}$$

Wykonana przez siły pola praca może zostać zamieniona na ciepło lub inne rodzaje energii. Gdy natężenie prądu wyrazimy w amperach, czas w sekundach, napięcie w woltach, to praca elektryczna zostanie wyrażona w dżulach. W wielu przypadkach praca wykonana przez siły pola zamienia się całkowicie na ciepło. Ponieważ 1 dżul jest równoważny 0,239 kalorii, zatem ilość wydzielonego ciepła w czasie t wyrazi się wzorem

$$Q\,\text{cal} = 0{,}239\; Uit \tag{15.51}$$

(gdy U wyrażamy w woltach, i w amperach, t w sekundach).

Według prawa Ohma

$$U = Ri, \tag{15.52}$$

zatem możemy napisać

$$Q = 0{,}239\; i^2 R \cdot t, \tag{15.53}$$

gdzie R jest oporem przewodnika, w którym wydziela się ciepło. Wzór ten stwierdza, że przy niezmiennym oporze ilość wydzielanego ciepła jest proporcjonalna do kwadratu natężenia prądu. W przypadku, gdy np. wskutek zwarcia popłynie przez przewody oświetleniowe bardzo silny prąd, może on spalić izolację na drutach, a nawet druty stopić. Toteż zabezpieczamy zwykle instalację za pomocą bezpieczników, w których znajdują się cienkie druciki srebrne lub ołowiane. Gdy prąd uzyska zbyt wielkie natężenie, druciki w bezpiecznikach się topią i prąd się przerywa.

Zjawisko wydzielania się ciepła w drutach, w których płynie prąd elektryczny, zostało wykorzystane do oświetlenia i ogrzewania elektrycznego (żarówki, żelazka, kuchenki elektryczne itd.).

Wzór (15.53) określa nam ilość ciepła wydzielanego w przewodniku o oporze R. Wiemy już, że prąd stały może płynąć tylko w obwodzie zamkniętym. Ilość ciepła wydzielona w całym obwodzie wyrazi się oczywiście tym

samym wzorem, lecz wtedy R musi oznaczać całkowity opór obwodu. Jeżeli źródłem prądu jest ogniwo, wówczas całkowity opór obwodu jest sumą oporu wewnętrznego R_w ogniwa i oporu zewnętrznego R_z. Na ilość ciepła wydzielonego w całym obwodzie musimy napisać wzór

$$Q = 0{,}239\, i^2(R_w + R_z)t, \tag{15.54}$$

gdy całkowita praca źródła prądu zamienia się na ciepło.

Lecz $i(R_w + R_z) = E_m$, czyli sile elektromotorycznej ogniwa; zatem

$$Q = 0{,}239\, E_m it. \tag{15.55}$$

Ciepło powstaje kosztem pracy siły elektromotorycznej E_m, której wielkość da nam wzór

$$L = E_m it. \tag{15.56}$$

Wzór ten stosuje się we wszystkich przypadkach, gdy prąd krąży w obwodzie zamkniętym.

Za pomocą prądu elektrycznego możemy przesyłać energię elektryczną po drutach na znaczne odległości i w miejscach, gdzie to jest nam potrzebne, zamieniać ją na pracę lub ciepło. Przesyłanie energii elektrycznej ma doniosłe znaczenie w gospodarce narodowej, możemy bowiem zapasy energii nagromadzonej np. w węglu zamienić na miejscu na energię elektryczną i rozprowadzać ją po kraju oszczędzając na kosztach transportu oraz maszyn i osiągając większą sprawność.

15.12. Moc wydawana przez układ elektryczny. Moc P określiliśmy w mechanice jako stosunek pracy do czasu jej wykonania:

$$P = \frac{L}{t}. \tag{15.57}$$

Zatem w przypadku przepływania ładunków elektrycznych od potencjału wyższego U_1 do niższego U_2 moc będzie

$$P = \frac{(U_1 - U_2)\, it}{t} = (U_1 - U_2)i = Ui, \tag{15.58}$$

gdzie U oznacza napięcie. Gdy i wyrazimy w amperach, a U w woltach, P otrzymamy w dżulach na sec, czyli w watach (W). W przemyśle elektrycznym np. dla określania mocy silników lub prądnic elektrycznych używa się jednostki 1000 razy większej:

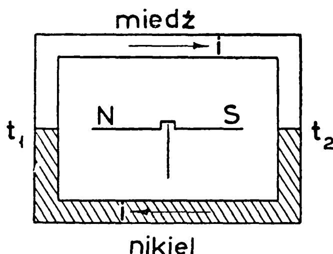
$$1 \text{ kilowat (kW)} = 1000 \text{ W},$$

$$1 \text{ kW} = 1{,}36 \text{ KM}, \qquad 1 \text{ KM} = 0{,}735 \text{ kW}.$$

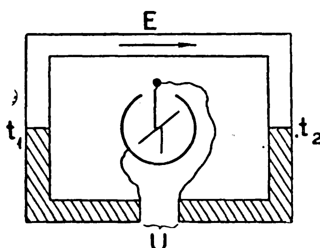
Odpowiednio do większej jednostki mocy używa się w elektrotechnice również większej jednostki pracy:

$$1 \text{ kilowatogodzina (kWh)} = 1000 \text{ W} \times 3600 \text{ sec} = 3\,600\,000 \text{ dżulów}.$$

15.13. Termoelektryczność. Gdy dwa druty lub pręty z różnych metali zlutujemy końcami i jedno ze spojeń podgrzejemy utrzymując drugie w niskiej temperaturze (rys. 15.21), to w obwodzie popłynie prąd elektryczny, który możemy wykazać różnymi sposobami. W ten sposób otrzymane źródło prądu nazywamy ogniwem termoelektrycznym. Gdybyśmy mierzyli prąd płynący w takim obwodzie, np. za pomocą amperomierza, to okazałoby się, że iloczyn



Rys. 15.21. Ogniwo termoelektryczne

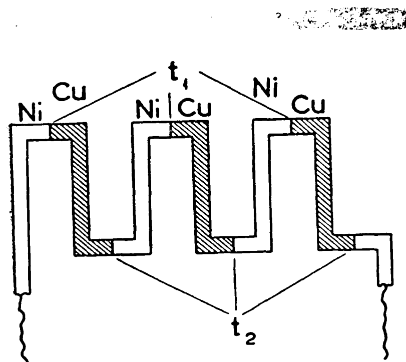


Rys. 15.22. Napięcie między końcami przerwanego obwodu równa się sile termoelektrycznej

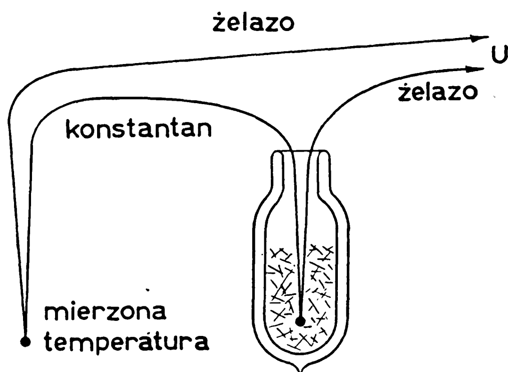
natężenia prądu przez całkowity opór obwodu mieć będzie zawsze jednakową wartość bez względu na długość, kształt, przekrój itd. obwodu, byleby tylko zespół drutów był ten sam i te same temperatury spojeń. Iloczyn ten:

$$Ri = E_m \tag{15.59}$$

jest miarą siły elektromotorycznej, którą nazywamy w tym przypadku siłą termoelektryczną. Gdy przerwiemy obwód w jednym miejscu (rys. 15.22), wówczas



Rys. 15.23. Bateria ogniw termoelektrycznych



Rys. 15.24. Ogniwo termoelektryczne używane do pomiarów temperatury

siła termoelektryczna pędzi ładunki, wskutek czego wytworzy się na biegunach napięcie przeciwdziałające przepływowi ładunków. Napięcie to będzie równe sile termoelektrycznej. Można ją zmierzyć za pomocą czułego elektrometru

lub innymi znanymi sposobami. Wielkość jej zależy od rodzaju użytych metali i od różnicy temperatur spojeń.

Z ogniw termoelektrycznych możemy zestawiać baterie, łączone tu zwykle szeregowo (rys. 15.23). Bateria n ogniw połączonych szeregowo ma siłę termoelektryczną równą nE_m, gdzie E_m oznacza siłę elektromotoryczną jednego ogniwa.

Ogniwa termoelektryczne używane są bardzo często do pomiarów temperatury. Ogniwo takie przedstawia rys. 15.24. Drut np. konstantanowy jest spojony z dwoma drutami żelaznymi idącymi do woltomierza albo do innego przy-

Tabela 15.3

Siła termoelektryczna ogniw termoelektrycznych używanych do pomiarów temperatury (w woltach)

Jedno spojenie w temperaturze t°C, drugie 0°C.
Prąd płynie w spojeniu chłodniejszym od najpierw wymienionego metalu do drugiego

t°	Miedź — Konstantan	Żelazo — Konstantan	90% Pt, 10% Rh — Platyna
− 185	—	0,0075	—
− 80	—	0,0038	—
0	0	0	0
+ 100	0,004	0,005	0,00064
+ 200	0,009	0,011	0,00142
+ 300	0,014	0,016	0,00229
+ 400	0,020	0,022	0,00321
+ 500	0,026	0,027	0,00417
+ 600	—	0,033	0,00518
+ 700	—	0,038	0,00623
+ 800	—	0,0434	0,00731
+ 900	—	0,0494	0,00843
+1000	—	—	0,00956
+1200	—	—	0,01189
+1400	—	—	0,01426
+1600	—	—	0,01663

rządu pozwalającego mierzyć wytworzone napięcie. Jedno spojenie umieszcza się w potłuczonym topniejącym lodzie, drugie umieszcza się w miejscu, w którym chcemy zmierzyć temperaturę. Mierzymy wytworzone napięcie i z jego wielkości wyznaczamy temperaturę. Siły termoelektryczne ogniw w zależności od temperatury są znane. Można zresztą zawsze skalibrować dane ogniwo termoelektryczne przez porównanie z dokładnym termometrem. Fabryki instrumentów wyrabiają termoelementy, które połączone są z galwanometrami posiadającymi już skalę wycechowaną w stopniach, tak że od razu odczytuje się temperaturę na galwanometrze. Termoelementy można sporządzać z drutów bardzo cienkich, których spojenie można umieścić wszędzie tam, gdzie inny termometr

by się nie zmieścił. Ogniwem złożonym z platyny i stopu platyny z rodem można mierzyć temperatury do 1500°C.

Ze względu na to, że opracowane są metody pozwalające mierzyć napięcie z wielką dokładnością (za pomocą aparatu kompensacyjnego), pomiar temperatury termoogniwem może być bardzo dokładny.

15.14. Przepływ prądu przez ciecze. Znamy wiele cieczy, które są dobrymi izolatorami i, można powiedzieć, że praktycznie biorąc wcale nie przewodzą prądu elektrycznego. Należą do nich: benzen, nafta, oleje transformatorowe i wiele innych. Woda bardzo czysta, destylowana i pozbawiona gazów w niej zwykle rozpuszczonych prawie nie przewodzi prądu. Lecz po dodaniu choćby bardzo małej ilości kwasu, zasady lub soli w niej się rozpuszczającej staje się przewodzącą. Roztwory soli, kwasów i zasad w jakichś innych rozpuszczalnikach, np. w nitrobenzenie, również przewodzą prąd, lecz znacznie gorzej. Takie roztwory nazywamy elektrolitami. Tu zajmiemy się elektrolitami wodnymi. Prąd wprowadzamy do elektrolitów za pomocą płytek metalowych lub węglowych, które nazywamy elektrodami. Elektroda, która doprowadza prąd, a więc o potencjale wyższym, nazywa się anodą, elektroda odprowadzająca prąd — katodą. Naczynie z elektrodami napełnione elektrolitem nazywają zwykle woltametrem. Prąd w elektrolitach jest związany zawsze z transportem atomów lub grup atomów rozpuszczonego w rozpuszczalniku związku. O tym będzie mowa w następnym paragrafie.

Warstwa elektrolitu posiada zawsze pewien opór, który możemy określić w zasadzie podobnie jak w metalach jako stosunek

$$\frac{U}{i} = R. \tag{15.60}$$

Opór ten zależny jest od rodzaju elektrolitu, długości l i pola przekroju S przewodzącego słupka cieczy według tego samego wzoru, który odnosi się do metali:

$$R = \varrho \frac{l}{S}. \tag{15.61}$$

Opór właściwy ϱ elektrolitów jest znacznie większy od oporu właściwego metali (milion i więcej razy). Zwykle w tabelach jest podawany nie opór właściwy, lecz jego odwrotność zwana przewodnością właściwą elektrolitu:

$$\frac{1}{\varrho} = \gamma. \tag{15.62}$$

Zatem możemy napisać

$$R = \frac{l}{\gamma S}. \tag{15.63}$$

Jednostką przewodności właściwej w układzie praktycznym jest Ω^{-1} cm^{-1}, czyli odwrotność oma na cm, jak to wynika z równania, które otrzymujemy

ze wzoru (15.63):

$$[\gamma] = \left[\frac{1}{RS}\right] = [R^{-1}\,l^{-1}].$$

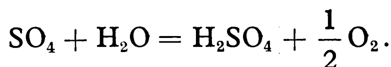
Przewodność właściwa szybko rośnie ze wzrostem temperatury.

Tabela 15.4

Przewodność właściwa przy temperaturze 18°C w Ω^{-1} cm^{-1}

Roztwór	NaCl	KCl	$AgNO_3$	NaOH	H_2SO_4
10%	0,121	0,136	0,0476	0,309	0,392
20%	0,196	0,268	0,087	0,328	0,653

15.15. Pierwsze prawo Faradaya. Jak już wspomnieliśmy, przepływ prądu przez elektrolit związany jest z transportem części składowych rozpuszczonych w wodzie substancji. Jeżeli do roztworu siarczanu miedzi $CuSO_4$ włożymy dwie pałeczki węglowe i połączymy je ze źródłem prądu, już po kilku minutach możemy stwierdzić, że na katodzie osadzi się warstewka miedzi. Podobnie przy przepuszczaniu prądu przez roztwór azotanu srebra $AgNO_3$ stwierdzimy osadzanie się na katodzie srebra. Doświadczenie łatwo wykazuje, że nie tylko metale wydzielają się z elektrolitu. Również na anodzie osadzają się pewne części składowe elektrolitów. Jeżeli przez roztwór wodny kwasu solnego HCl przepuścimy prąd, to tak na katodzie, jak i na anodzie będą wywiązywały się bańki gazu. Bliższe zbadanie wykazuje, że na katodzie wydziela się wodór, a na anodzie chlor. W innych przypadkach procesy są więcej skomplikowane. Jeżeli przez roztwór kwasu siarkowego H_2SO_4 przepuścimy prąd używając elektrod platynowych albo węglowych, to również na katodzie i na anodzie będą się wywiązywać bańki gazu. Bliższe zbadanie tych gazów wykazuje, że na katodzie wydziela się wodór, na anodzie zaś tlen. Tu sprawa jest mniej prosta. W tym przypadku na katodzie wydziela się wodór, na anodzie zaś właściwie reszta kwasowa SO_4. Lecz grupa SO_4 reaguje natychmiast z wodą według wzoru:



$$SO_4 + H_2O = H_2SO_4 + \frac{1}{2}O_2.$$

Rezultat jest taki, jak gdyby nie kwas siarkowy, lecz woda ulegała rozkładowi.

Liczne doświadczenia wykazały, że na katodzie przy przepuszczaniu prądu wydziela się zawsze wodór lub metal, na anodzie tlen, reszta kwasowa lub grupa OH. Przy wydzielaniu się ich zachodzą często wtórne reakcje. Przenoszenie ładunków elektrycznych wraz z atomami lub grupami atomów doprowadza nas do przyjęcia założenia, że atomy lub grupy atomów w elektrolitach muszą być związane z ładunkami dodatnimi lub ujemnymi. Nazywamy je jonami. Ponieważ elektrolit jako całość jest nienaelektryzowany, więc oczywiście tyleż musi być w nim jonów dodatnich co ujemnych.

Faraday stwierdził następującą prawidłowość, zwaną pierwszym prawem Faradaya: masa substancji wydzielona na elektrodzie jest proporcjonalna do natężenia prądu i oraz do czasu jego przepływu przez elektrolit. Można to wyrazić następującym związkiem wprowadziwszy współczynnik proporcjonalności k:

$$m = kit. \tag{15.64}$$

Ponieważ iloczyn $it = Q$, czyli ilości elektryczności, która przepłynęła przez elektrolit, zatem możemy napisać

$$m = kQ. \tag{15.65}$$

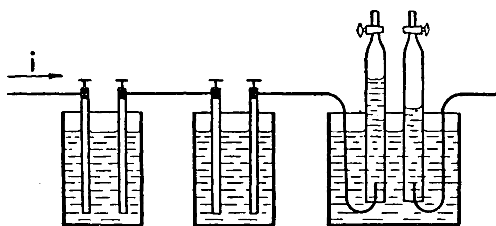
Masa wydzielonej substancji jest proporcjonalna do ładunku, który przepłynął przez elektrolit. Gdy przepuścimy ładunek $Q = 1$ C, to $m = k$. A więc k równa się masie wydzielonej na elektrodzie przez ładunek równy 1 kulombowi. Nazywamy go elektrochemicznym równoważnikiem. Tabela 15. 5 zawiera przykłady elektrochemicznych równoważników.

Tabela 15.5

Elektrochemiczne równoważniki

Substancja	Elektrochemiczny równoważnik k w g/kulomb
Srebro	$1{,}118045 \cdot 10^{-3}$
Miedź	$0{,}3295 \cdot 10^{-3}$
Wodór	$0{,}01045 \cdot 10^{-3}$

Proporcjonalność masy wydzielonej do natężenia prądu według wzoru (15.64) jest tak dokładna, że w swoim czasie przyjęto ją za podstawę określenia jednostki natężenia prądu. Jako tzw. „amper międzynarodowy” określono natężenie prądu, który z wodnego roztworu azotanu srebra $AgNO_3$ wydziela w sekundzie 1,118 mg srebra. Z biegiem czasu okazało się, że takie określenie ampera niezupełnie się zgadza z wielkością ampera tzw. absolutnego, tj. takiego, który w sekundzie przenosi ładunek w ilości 1 kulomba, a którego dokładna definicja będzie podana później. 1 A międzynarodowy = 0,99985 A abs.



Rys. 15.25. Woltametry włączone szeregowo w obwód prądu. Przez wszystkie płynie ten sam prąd

15.16. Drugie prawo Faradaya. Ten sam prąd płynący przez różne elektrolity wydziela na elektrodach masy chemicznie równoważne. Można to stwierdzić włączając w szereg woltametry napełnione różnymi elektrolitami (rys. 15.25). Chemicznie równoważnymi są masy, które w związkach che-

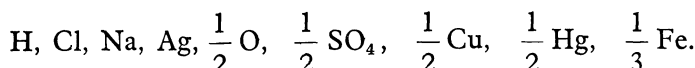
micznych mogą zastępować się wzajemnie, ewentualnie takie, które się łączą chemicznie jedne z drugimi bez reszty.

Jak wykazują przykłady związków



$$HCl,\ NaCl,\ H_2O,\ AgNO_3,\ H_2SO_4,\ CuSO_4,\ HgCl_2,\ FeCl_3,$$

następujące ilości są sobie chemicznie równoważne:



$$H,\ Cl,\ Na,\ Ag,\ \frac{1}{2}O,\ \ \frac{1}{2}SO_4,\ \ \frac{1}{2}Cu,\ \ \frac{1}{2}Hg,\ \ \frac{1}{3}Fe.$$

Jeżeli w pewnym określonym czasie prąd i wydzieli na jednej elektrodzie gramatom wodoru, tzn. 1,008 g, to ten sam prąd wydzieli z innych elektrolitów masy pierwiastków lub grup pierwiastków chemicznie równoważne. Chemicznie równoważne będą następujące ilości:

H	Cl	Na	Ag	NO_3
1,008 g	35,457 g	22,997 g	107,88 g	62,008 g
gram-atom	gram-atom	gram-atom	gram-atom	gramo-drobina

$\frac{1}{2}O$	$\frac{1}{2}Cu$	$\frac{1}{2}Hg$	$\frac{1}{3}Fe$	$\frac{1}{2}SO_4$
8 g	31,785 g	100,305 g	18,617 g	48,03 g
$^1/_2$ gramo-drobiny	$^1/_2$ gramo-drobiny	$^1/_2$ gramo-drobiny	$^1/_3$ gramo-drobiny	$^1/_2$ gramo-drobiny

Jak z tych liczb widać, prąd, który wydziela jeden gramatom pierwiastka jednowartościowego, jak wodoru, chloru, sodu, srebra lub gramodrobinę grupy jednowartościowej, jak NO_3, wydziela pół gramatomu lub pół gramodrobiny pierwiastka lub grupy dwuwartościowej, jedną trzecią gramatomu lub gramodrobiny pierwiastka lub grupy trójwartościowej itd. Oznaczając ciężar atomowy lub drobinowy przez μ, a wartościowość przez w otrzymamy na masę równoważną jednemu gramoatomowi wodoru, czyli na tzw. równoważnik gramowy liczbę

$$\frac{\mu}{w}.$$

Wiedząc jaką masę danego pierwiastka lub grupy pierwiastków wydziela 1 kulomb (elektrochemiczny równoważnik), możemy obliczyć, ile potrzeba kulombów, aby wydzielić jeden równoważnik gramowy. Zwykle bierze się do tego obliczenia elektrochemiczny równoważnik srebra, jeden z najlepiej znanych.

Jak przytoczono w tabeli 15.4, 1 kulomb wydziela z roztworu azotanu srebra $AgNO_3$ 0,001118045 g srebra. A więc do wydzielenia jednego gramowego równoważnika, czyli 107,88 g srebra potrzeba będzie

$$F = \frac{107{,}88\ \mathrm{g}}{0{,}001118045\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{C}}} = 96\,522\ \mathrm{C}.$$

Ta więc ilość elektryczności wydziela z jakichkolwiek elektrolitów gramowe równoważniki rozmaitych substancji. Nazywamy ją stałą Faradaya i oznaczamy literą F. F kulombów wydziela zawsze gramowy równoważnik, czyli $\frac{\mu}{w}$ g. W takim razie 1 kulomb wydzieli

$$\frac{\mu}{Fw}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{C}}.$$

Lecz masę wydzieloną przez 1 kulomb nazwaliśmy poprzednio elektrochemicznym równoważnikiem i oznaczyliśmy przez k. Zatem

$$k=\frac{\mu}{Fw}\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{C}}.$$

Oba zatem prawa Faradaya dadzą się ująć jednym wzorem:

$$m=\frac{\mu}{Fw}Q=\frac{\mu}{Fw}it. \tag{15.66}$$

15.17. Rozpad drobin na jony. Dysocjacja elektrolityczna. Zjawiska poprzednio opisane wykazują, że przy przewodzeniu prądu przez elektrolity przenoszenie ładunków jest związane z jednoczesnym przenoszeniem atomów względnie grup atomów przez elektrolit. Najwidoczniej atomy lub grupy atomów są związane z ładunkami elektrycznymi. Nazywamy je jonami. Można istotnie za pomocą doświadczeń wykazać wędrówkę jonów przez elektrolit przy przewodzeniu prądu. Różne zjawiska doprowadziły fizyków do wniosku, że sól, kwas lub zasada po rozpuszczeniu natychmiast rozpadają się na jony. Na przykład NaCl rozpada się na Na^+ i Cl^-, H_2SO_4 na H_2^+ i SO_4^-. Jony, na które dany związek się rozpada, mają ładunki przeciwne. Gdy elektrody woltametru połączymy z baterią ogniw, wytwarza się między nimi pole elektryczne, którego linie skierowane są od anody do katody. Jony zaczynają natychmiast wędrować, dodatnie do katody, nazywamy je dlatego kationami, ujemne do anody, nazywane są więc anionami. Prędkości jonów są proporcjonalne do natężenia pola. Prędkości jonów przy jednostkowym natężeniu pola nazywamy ich ruchliwościami bezwzględnymi. Wskutek wielkiego oporu środowiska mimo działania siły stałej w polu elektrycznym prędkości jonów są stałe i bardzo niewielkie. W polu jednostkowym w układzie praktycznym, a więc 1 wolt na cm, wyrażają się liczbami wynoszącymi ułamki tysięcznych cm/sec. Najruchliwszy jon, jon wodoru, uzyskuje prędkość około 0,003 cm/sec. Jony mają w ogólności inne własności niż atomy wolne. Dobiegając do katody lub anody tracą przy zetknięciu się z nimi swój ładunek i zamieniają się w zwykłe wolne atomy. Według hipotezy Arrheniusa część liczby drobin ciała rozpuszczonego rozpada się na jony. Stosunek liczby drobin, które uległy rozpadowi, do ogólnej liczby drobin zawartych w roztworze nazywamy stopniem dysocjacji. Stopień dysocjacji rośnie wraz z rozcień-

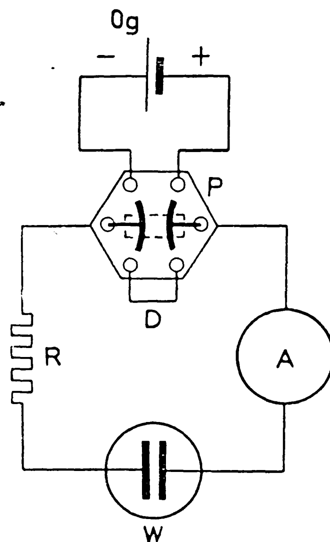
czeniem danego związku. Dla roztworów bardzo rozcieńczonych wynosi 100%. W pewnym, lecz słabym stopniu dysocjują również drobiny samego rozpuszczalnika. Tak np. w czystej wodzie znajduje się zawsze pewna, bardzo niewielka zresztą, liczba jonów H^+ i OH^-. Tym tłumaczy się, że woda nie jest dobrym izolatorem.

Obecnie wiemy, że tylko do tzw. słabych elektrolitów można stosować teorię Arrheniusa. Do słabych elektrolitów należy większość kwasów organicznych. Tak zwane mocne elektrolity, do których należy bardzo wiele związków nieorganicznych, dysocjują całkowicie, to znaczy całkowicie rozpadają się na jony. Ich własności, w szczegóły których nie możemy tutaj wchodzić, tłumaczy się znacznymi siłami elektrostatycznymi wywieranymi na każdy jon przez otaczające go jony.

Prąd elektryczny przechodzący przez elektrolit polega zatem na ruchu kationów w kierunku prądu elektrycznego (a więc w kierunku pola) oraz anionów w kierunku przeciwnym. Aby wyjaśnić prawa Faradaya, można przyjąć, że każdy jon tego samego gatunku połączony jest z tej samej wielkości ładunkiem dodatnim lub ujemnym, przy tym jon jednowartościowy niesie pojedynczy ładunek, jon dwuwartościowy — dwa razy większy, jon trójwartościowy — trzy razy większy itd. Wiedząc, że jeden gramowy równoważnik wodoru równy w tym przypadku gramatomowi, czyli 1,008 g, zawiera $6{,}02 \cdot 10^{23}$ atomów wodoru i że do wydzielenia tej masy wodoru potrzebna jest ilość elektryczności równa 96 522 kulombom, możemy łatwo obliczyć ładunek e jednego jonu wodoru:

$$e = 96\,522 : 6{,}02 \cdot 10^{23} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ kulomba.}$$

Jak rozmaite pomiary w różnych dziedzinach badań wykazały, jest to najmniejszy ładunek, jaki w ogóle występuje w doświadczeniu. Zawsze mamy do czynienia tylko z całkowitą wielokrotnością tego ładunku elementarnego. Możemy powiedzieć zatem, że podobnie jak gaz złożony jest z drobin, tak ładunki elektryczne składają się z bardzo drobnych atomów elektryczności — ładunków elementarnych. Ładunek elementarny oznaczamy zawsze przez e. Ładunki elementarne wyzwolone z atomów lub drobin, z którymi są zwykle związane, nazywamy elektronami.



Rys. 15.26. Doświadczenie wykazujące powstawanie siły elektromotorycznej polaryzacji

15. 18. Polaryzacja elektryczna. Zestawmy obwód prądu w sposób przedstawiony na rys. 15.26. Woltametr W napełniamy roztworem kwasu siarkowego. Wkładamy do niego dwie elektrody węglowe. W obwód włączamy amperomierz

A oraz niewielki opór *R*. Przełącznik sześciobiegunowy *P* włączony w sposób wskazany na rysunku pozwala włączyć do obwodu ogniwo *Og* najlepiej o niewielkiej sile elektromotorycznej, np. ogniwo Leclanchégo. Przez przerzucenie przełącznika możemy wyłączyć ogniwo z obwodu i zewrzeć końce obwodu drutem *D*. Włączmy najpierw ogniwo. Amperomierz *A* wychyli się wykazując przepływ prądu. Lecz natężenie jego będzie maleć stopniowo i po kilku minutach spadnie niemal do zera. Nie zauważymy tego spadku, gdy zamiast ogniwa użyjemy baterii o większej sile elektromotorycznej. Widocznie w woltametrze wytwarza się niewielka siła elektromotoryczna przeciwdziałająca przepływowi prądu. Gdy przerzucimy przełącznik wyłączając ogniwo, amperomierz wychyli się w przeciwną stronę stwierdzając przepływ prądu w przeciwnym do poprzedniego kierunku. Woltametr zamienił się w ogniwo galwaniczne i dostarcza teraz prądu elektrycznego zwanego prądem polaryzacyjnym. Zresztą prąd ten dość szybko maleje. Tłumaczymy to zjawisko zwane polaryzacją elektryczną tym, iż katoda pokrywa się wodorem, a anoda — tlenem, wytwarza się w ten sposób ogniwo galwaniczne (ponieważ elektrody są już różne) o sile elektromotorycznej przeciwnej do kierunku przepuszczanego poprzednio prądu. Ogniwo takie nazywamy ogniwem wtórnym albo ogniwem polaryzacyjnym, jego siłę elektromotoryczną — siłą elektromotoryczną polaryzacji. Ta siła elektromotoryczna ma zawsze kierunek przeciwny do prądu wywołującego jej powstanie, stąd osłabienie prądu wywołującego polaryzację. Źródłem siły elektromotorycznej polaryzacji jest przechodzenie z powrotem drobin gazu w stan jonów. Elektroda pokryta wodorem tracąc dodatnie jony H^+ staje się ujemna względem elektrolitu, elektroda pokryta tlenem staje się dodatnia. Zresztą główne znaczenie mają tu jony wodoru, aniony nie mają wpływu na wartość siły elektromotorycznej. Nie jest bynajmniej konieczne, żeby gazy te były wytworzone sposobem elektrolitycznym. Otoczywszy elektrody powłokami z tlenu i wodoru, wytworzonymi zwykłą drogą chemiczną, otrzymamy również prąd elektryczny (ogniwo gazowe Grovego). Podobnie jak w opisanym przypadku wodór, również metale mają zdolność przechodzenia do roztworu w postaci jonów dodatnich. Jednakże woltametr złożony z dwu jednakowych elektrod, np. miedzianych, zanurzonych w roztworze soli tego samego metalu, nie polaryzuje się. Tłumaczy się to tym, że obie elektrody dążą do wysyłania w roztwór jonów Cu^+, ale w kierunkach przeciwnych. Ich działania elektromotoryczne znoszą się zatem. Inaczej będzie, gdy zanurzymy w płynie dwa różne metale, np. cynk i miedź, których dążności do tworzenia jonów są nierówne. Wtedy otrzymamy działanie elektromotoryczne wypadkowe w tym kierunku, w którym wyzwalają się jony metalu bardziej w tym względzie czynnego (cynku).

Siła elektromotoryczna polaryzacji zjawia się natychmiast po załączeniu baterii polaryzującej do woltametru, skoro jony zaczną się nagromadzać na elektrodach, i rośnie stopniowo do pewnej wartości maksymalnej. Kierunek jej jest zawsze wsteczny, osłabia ona zawsze działanie baterii, a może znosić je całkowicie. Tak np. chcąc rozkładać wodę musimy użyć baterii o sile elektromotorycznej wyższej

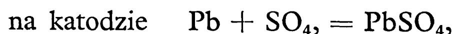
od 1,6 wolta. Słabsza wytworzyłaby tylko krótkotrwały prąd, zatamowany niebawem przez polaryzację elektrod. Siła elektromotoryczna polaryzacji zależy od rodzaju elektrolitu. Ponieważ w obwodzie zamkniętym działa w rezultacie wypadkowa siła elektromotoryczna

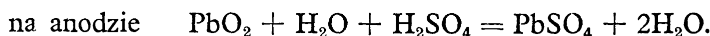
$$E_m - E_p,$$

gdzie E_m oznacza siłę elektromotoryczną ogniwa lub baterii wywołującej prąd, zatem natężenie prądu w obwodzie będzie dane przez wzór

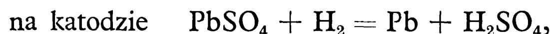
$$i = \frac{E_m - E_p}{R}. \tag{15.67}$$

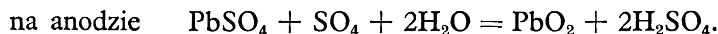
15.19. Ogniwa polaryzacyjne. Akumulatory. Polaryzacja ogniw. Ogniwa wtórne, w których wykorzystuje się siłę elektromotoryczną polaryzacji, zwane akumulatorami, są obecnie powszechnie używane i wyparły prawie całkowicie inne typy ogniw. Akumulator ołowiany, w stanie, w jakim jest wypuszczany z fabryki, składa się z płyty ołowianej Pb oraz z płyty z PbO_2. Obie płyty są specjalnie preparowane, aby były porowate i aby wskutek tego miały bardzo dużą powierzchnię dla zachodzących na nich reakcji. Elektroda PbO_2 jest brunatna i ma potencjał o 2 wolty wyższy niż druga elektroda, jest zatem anodą. Elektroda Pb jest katodą, jest szara. Elektrolitem jest 20-procentowy roztwór chemicznie czystego kwasu siarkowego. Podczas czerpania prądu z akumulatora zachodzą następujące reakcje:


na katodzie $Pb + SO_4 = PbSO_4$,


na anodzie $PbO_2 + H_2O + H_2SO_4 = PbSO_4 + 2H_2O$.

Napięcie akumulatora wynosi 2 wolty i podczas czerpania prądu, czyli jak mówimy, wyładowania akumulatora, powoli się zmniejsza, jednocześnie stężenie kwasu zmniejsza się również. Gdy napięcie spadnie do 1,8 V, należy akumulator naładować. W tym celu łączymy akumulator z zewnętrznym źródłem prądu tak, aby kierunek prądu był przeciwny do kierunku prądu dawanego przez akumulator. Podczas ładowania napięcie akumulatora wzrasta do 2,6 wolta. Zachodzą wtedy następujące reakcje:

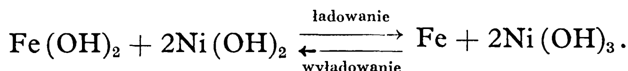

na katodzie $PbSO_4 + H_2 = Pb + H_2SO_4$,


na anodzie $PbSO_4 + SO_4 + 2H_2O = PbO_2 + 2H_2SO_4$.

Jednocześnie stężenie kwasu wzrasta. Wytworzona siła elektromotoryczna polaryzacji po przerwaniu ładowania spada szybko do 2,2 V. Po dość krótkim czasie ustala się na wysokości 2 V, przez długi czas niemal nie zmieniając się. Dlatego akumulator ołowiany jest tak cennym ogniwem w praktyce laboratoryjnej. Akumulator ołowiany może dawać stosunkowo silny prąd, ale nie wyższy od przepisanego maksymalnego prądu dla danej wielkości płyt. Ilość elektryczności, którą akumulator naładowany może przepędzić w obwodzie zamkniętym, wyraża się zwykle w amperogodzinach. Liczbę amperogodzin, równą iloczynowi natężenia

prądu, jaki możemy czerpać z akumulatora naładowanego — przez liczbę godzin jego trwania, nazywamy pojemnością akumulatora.

W akumulatorze żelazo-niklowym Edisona katodą jest płyta żelazna Fe, anodą zaś $Ni(OH)_3$, elektrolitem zaś 20-procentowy roztwór KOH. Podczas ładowania i wyładowania mamy następujące przemiany na elektrodach:



$$Fe(OH)_2 + 2Ni(OH)_2 \underset{\text{wyładowanie}}{\overset{\text{ładowanie}}{\rightleftarrows}} Fe + 2Ni(OH)_3 .$$

Akumulator żelazo-niklowy jest mniej wrażliwy na przeciążenie prądem, pozostawienie bez naładowania itp. zaniedbania, które szybko mogą zniszczyć akumulator ołowiany.

Siła elektromotoryczna polaryzacji występuje zawsze na elektrodach zanurzonych w elektrolicie, przez który płynie prąd, zatem musi występować i w samych ogniwach. W ogniwie Volty np., złożonym z cynku i miedzi zanurzonych w wodzie zakwaszonej kwasem siarkowym, wodór wydziela się na miedzi. Dążąc do przejścia z powrotem w stan jonów wytwarza działania elektromotoryczne wsteczne. Ażeby zapobiec tej polaryzacji i uzyskać ogniwa stałe, których siły elektromotorycznej nie zmniejszałaby siła elektromotoryczna polaryzacji, stosuje się środki chemiczne utleniające wodór, które nazywamy depolaryzatorami. Znanym depolaryzatorem jest np. dwuchromian potasowy $K_2Cr_2O_7$. W ogniwie Leclanchégo depolaryzatorem jest dwutlenek manganu MnO_2, który zmieszany z grafitem umieszczony jest zwykle w woreczku otaczającym elektrodę węglową. MnO_2 z łatwością oddaje tlen utleniając wydzielający się na elektrodzie węglowej wodór. Ponieważ jednak depolaryzator ten jest stały, działa stosunkowo powoli i przy czerpaniu dość silnego prądu powstaje siła elektromotoryczna polaryzacji zmniejszając siłę elektromotoryczną ogniwa. Po dłuższym „odpoczynku" bez prądu siła elektromotoryczna wraca do poprzedniej wartości. Dlatego ogniwa te nadają się bardzo dobrze do takich celów, jak dzwonki elektryczne, latarki kieszonkowe, tj., gdy nie muszą dawać długotrwałego prądu.

Zadania

15.1. Jaki ładunek przenosi w czasie pół minuty prąd stały o natężeniu $i = 2A$?
Odpowiedź: $Q = 60$ C.

15.2. Jaki ładunek przenosi w czasie $t = 10$ sec prąd, którego natężenie rośnie proporcjonalnie do czasu od zera do 5 A?
Odpowiedź: 25 C.

15.3. Jakie natężenie ma prąd płynący w żarówce o oporze 1930 Ω przyłączonej do napięcia 220 V?
Odpowiedź: 0,114 A.

15.4. Drut o pewnym oporze przyłączono do zacisków akumulatora o napięciu 2 V. Amperomierz włączony w obwód wykazał prąd o natężeniu 0,12 A. Jaki był opór drutu?
Odpowiedź: 16,67 Ω.

15.5. Jaki opór R będzie miał drut żelazny średnicy 0,2 mm, długości 20 m (opór właściwy żelaza $10 \cdot 10^{-6}$ Ω cm)?

Odpowiedź: $R = 63{,}7\ \Omega$.

15.6. Jaki opór R będzie miał drut miedziany (opór właściwy $\varrho = 1{,}692 \cdot 10^{-6}$ Ω cm) średnicy 1,5 mm, długości 100 m?

Odpowiedź: $R = 0{,}96\ \Omega$.

15.7. Jaką długość powinien mieć drut manganinowy (opór właściwy manganinu $\varrho = 38{,}8 \cdot 10^{-6}$ Ω cm) o średnicy 1 mm, aby jego opór $R = 1\ \Omega$?

Odpowiedź: 182,6 cm.

15.8. Opór żarówki wolframowej w temperaturze 0°C wynosi 193,6 Ω. Jaki będzie miała ona opór przy temperaturze 2200°C, przy której się żarzy normalnie, skoro współczynnik temperaturowy oporu wolframu jest 0,0045 stop^{-1}?

Odpowiedź: 1936 Ω.

15.9. Jeden koniec potencjometru o oporze 10 000 Ω połączony jest z ziemią, drugi — z napięciem 800 V. W jakim punkcie powinien być ustawiony suwak potencjometru, aby uzyskać napięcie 250 V?

Odpowiedź: Tak, aby między suwakiem i uziemionym końcem był opór 3125 Ω.

15.10. Między dwa grube miedziane przewody włączono 10 żarówek, z których każda ma opór 570 Ω. Jaki będzie całkowity opór załączony między te dwa przewody?

Odpowiedź: 57 Ω.

15.11. Jeden z oporów w oporniku wynosi 10,07 Ω. Jaki równoległy opór należy doń dołączyć, aby poprawić ten opór na równe 10 Ω?

Odpowiedź: 1438,57 Ω.

15.12. Dwa proste równoległe druty połączone są sześcioma poprzecznymi drutami na podobieństwo drabiny. Każdy odcinek między dwoma węzłami (tak pierwszych, jak i drugich) ma jednakowy opór r. Jaki jest opór między końcami równoległych drutów?

Odpowiedź: $\frac{571}{780}\, r$.

15.13. Przewód przewodzący prąd 1,2 A rozdziela się na dwie gałęzie o oporach 4,8 i 7,2 Ω. Jakie prądy płyną w poszczególnych gałęziach?

Odpowiedź: 0,72 A; 0,48 A.

15.14. Cewka amperomierza z cienkiego drutu ma 10 Ω oporu. Można przez nią przepuścić prąd co najwyżej 3 mA. Jaki bocznik R należy włączyć równolegle, aby amperomierz mógł mierzyć maksymalnie prąd 1,5 A?

Odpowiedź: $R \approx 0{,}02\ \Omega$.

15.15. Ogniwo Daniella o sile elektromotorycznej 1,08 V o oporze wewnętrznym 1,5 Ω zamknięto drutem o oporze 12 Ω. Jaki prąd dawało ogniwo i jakie było jego napięcie?

Odpowiedź: $i = 0{,}08$ A; $U = 0{,}96$ V.

15.16. Jaka jest siła elektromotoryczna ogniwa o oporze wewnętrznym 0,6 Ω, jeżeli podczas czerpania z niego prądu 0,2 A woltomierz przyłączony do jego zacisków wykazuje 1,8 V?

Odpowiedź: 1,92 V.

15.17. Ogniwo po włączeniu między jego bieguny oporu 2 Ω daje prąd o natężeniu 0,6 A. Po włączeniu zaś oporu 14,5 Ω daje prąd o natężeniu 0,1 A. Jaka jest jego siła elektromotoryczna i opór wewnętrzny?

Odpowiedź: $E_m = 1{,}5$ V; $R_w = 0{,}5\ \Omega$.

15.18. Bateria anodowa składa się z 80 ogniw Leclanchégo połączonych szeregowo. Każde ogniwo ma siłę elektromotoryczną 1,5 V i opór wewnętrzny 0,5 Ω. Jaki prąd popłynie po połączeniu biegunów oporem 1000Ω?

Odpowiedź: $i = 0{,}115$ A.

15.19. Domowa instalacja światła pobiera średnio prąd 2,5 A w przeciągu 6 godzin przy napięciu 220 V. Jaka jest moc pobierana i ile zużywa energii dziennie?

Odpowiedź: $P = 550$ W $= 0{,}55$ kW; $L = 3{,}3$ kWh.

15.20. Jaki prąd pobierają 1) żarówka 40-watowa; 2) żarówka 100-watowa przy napięciu 220 V? Jakie są ich opory w czasie żarzenia się?

Odpowiedź: 1) $i = 0{,}182$ A, $R = 1209$ Ω; 2) $i = 0{,}454$ A, $R = 484{,}5$ Ω.

15.21. Obliczyć pracę wydawaną w sekundzie przez ogniwo Daniella o sile elektromotorycznej 1,08 V i oporze wewnętrznym 2 Ω spiętego oporem 8 Ω.

Odpowiedź: $L = 0{,}117$ J.

15.22. Ile kilowatogodzin trzeba zużyć, aby 2 litry wody o temperaturze 16°C doprowadzić do wrzenia?

Odpowiedź: $0{,}195 \approx 0{,}2$ kWh.

√**15.23.** Niklowanie przedmiotu metalowego o powierzchni 120 cm² prądem 0,3 A trwało 5 godzin. Ciężar atomowy niklu = 58,69, wartościowość $w = 2$, masa właściwa = = 8,8. Jaka będzie grubość warstewki niklu?

Odpowiedź: 15,5 μ.

15.24. Jak długo będzie trwało pokrycie miedzią powierzchni 20 cm² na grubość 0,5 mm prądem 0,5 A? Ciężar atomowy miedzi = 63,57, masa właściwa = 8,9, wartościowość $w = 2$.

Odpowiedź: 15 godzin.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Na czym polega zjawisko prądu elektrycznego?
2. Jak określamy natężenie prądu elektrycznego? Jakie są jego jednostki? Jaki prąd nazywamy prądem stałym?
3. Jaka jest treść prawa Ohma? Jak określamy opór elektryczny? Jakie są jego jednostki?
4. Od jakich parametrów zależy opór drutu? Co nazywamy oporem właściwym danego materiału? Jaka jest zależność oporu właściwego od temperatury?
5. Jak się zmienia potencjał wzdłuż przewodnika, w którym płynie prąd?
6. Jak możemy łączyć opory? Jaki jest opór drutów połączonych szeregowo? równolegle?
7. W jaki sposób dzieli się prąd między dwa przewody połączone równolegle?
8. Od czego zależy natężenie prądu w obwodzie zamkniętym? Jak określamy siłę elektromotoryczną?
9. Jaki jest związek między siłą elektromotoryczną a napięciem ogniwa?
10. Jak obliczyć natężenie prądu czerpanego z baterii ogniw połączonych szeregowo? równolegle?
11. Jakich odmian oporników używamy?
12. Jaka jest treść reguł Kirchhoffa?
13. Jakie połączenie przewodów stanowi mostek Wheatstone'a i co można mierzyć za jego pomocą?
14. Opór jakiego metalu zależy w silnym stopniu od pola magnetycznego?

15. Czemu równa się praca wykonywana przez układ przy przepływie prądu elektrycznego?
16. Jaka jest ilość ciepła wydzielana przez prąd przepływający przez przewodnik?
17. Jaka jest ilość ciepła wydzielanego i ilość zużytej na to pracy w obwodzie zamkniętym?
18. Jaka jest moc układu dostarczającego prądu o natężeniu i przy napięciu U? Jakich jednostek mocy używamy w dziale elektryczności?
19. Kiedy powstaje siła termoelektryczna? Od czego ona zależy?
20. W jaki sposób za pomocą ogniwa termoelektrycznego można mierzyć temperaturę?
21. Co nazywamy przewodnością właściwą elektrolitu?
22. Jaka jest treść I prawa Faradaya? II prawa Faradaya?
23. Jakie znaczenie ma stała Faradaya?
24. Jak jednym równaniem ująć oba prawa Faradaya?
25. Jak się tłumaczy zachowanie się elektrolitów przy przepływie prądu elektrycznego?
26. Jak się objawiają zjawiska polaryzacji elektrycznej?
27. Jakie jest natężenie prądu w obwodzie, w którym działa siła elektromotoryczna polaryzacji?
28. Jakie własności mają ogniwa polaryzacyjne? Jakich ich odmian używamy w laboratorium?
29. Jakich używa się depolaryzatorów i w jakim celu?

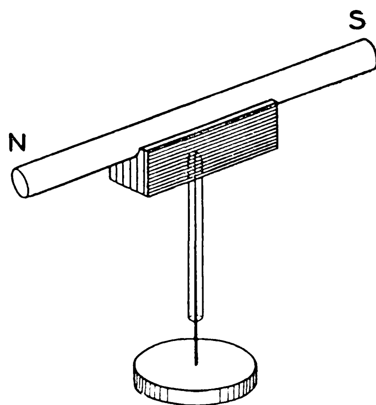
16. Własności magnetyczne ciał. Pole magnetyczne statyczne

16.1. Zjawiska magnetyczne. Już w starożytności znany był fakt, że pewna ruda żelazna (magnetyt Fe_3O_4) ma własność przyciągania małych cząstek żelaza. Ciała posiadające taką własność nazywamy m a g n e s a m i. Przez pocieranie sztabki stalowej takim magnesem naturalnym otrzymujemy magnes sztuczny, który również przyciąga kawałki żelaza. Proces zamiany stalowej sztaby czy pręta na magnes nazywamy magnesowaniem. Obecnie magnesowania dokonywa się za pomocą prądu elektrycznego, o czym będzie mowa później. Namagnesowana sztaba albo pręt objawiają własności przyciągania kawałków żelaza na końcach, które nazywamy biegunami (rys. 16.1). Pośrodku rozciąga się tzw. strefa neutralna. Ta część magnesu wykazuje bardzo słabe działania magnetyczne.



Rys. 16.1. Magnes objawia własności przyciągania cząstek żelaza na swych końcach zwanych biegunami

Magnes zawieszony tak, by mógł się swobodnie obracać w płaszczyźnie poziomej, ustawia się swą osią w kierunku mało różniącym się od kierunku północno-południowego. Ten biegun, który zwraca się ku północy, nazywamy północnym albo dodatnim i oznaczamy literą N albo znakiem $+$. Biegun zwracający się ku południowi nazywamy południowym albo ujemnym i oznaczamy literą S albo znakiem $-$.

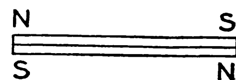


Rys. 16.2. Doświadczenie wykazujące przyciąganie się biegunów różnoimiennych a odpychanie jednoimiennych

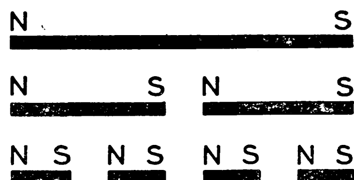
Jeżeli magnes sztabowy umieścimy na lekko obracającej się dokoła osi pionowej podstawce (rys. 16.2) i zbliżymy drugi magnes, to łatwo stwierdzimy, że dwa bieguny północne odpychają się. Również odpychają się dwa bieguny południowe. Natomiast biegun północny zawsze przyciąga biegun południowy i na odwrót. Te działania dynamiczne bieguny wywierają na siebie nawet wtedy, gdy je przedzie-

limy deską drewnianą, płytą szklaną, blachą miedzianą lub glinową. Natomiast blacha żelazna osłabia je silnie. Bieguny wywierają nawzajem na siebie siły i w próżni. Działania w próżni prawie zupełnie nie różnią się od działań w powietrzu.

Jeżeli dwa magnesy sztabowe równej siły złożymy przeciwnymi biegunami (rys. 16.3), wówczas końce przestają wykazywać działania magnetyczne. Zatem bieguny zachowują się podobnie do wielkości przeciwnych znaków, można je więc słusznie oznaczać znakami + i —. Gdy sztabkę żelaza lub stali zbliżymy do bieguna silnego magnesu, uzyskuje ona sama własności magnesu, przy czym koniec jej zbliżony do bieguna północnego uzyskuje własności bieguna południowego, przeciwny koniec — bieguna północnego. Tak zwane miękkie żelazo, tj. stal o bardzo małych domieszkach innych ciał, traci prawie całkowicie swoje własności magnetyczne po oddaleniu od magnesu, natomiast pewne gatunki stali pozostają już namagnesowane, zamieniają się na magnesy trwałe.

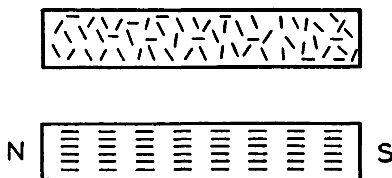


Rys. 16.3. Zetknięte ze sobą dwa bieguny różnoimienne przestają działać na zewnątrz



Rys. 16.4. Przy dzieleniu magnesu na części każda część jest kompletnym magnesem o dwóch biegunach

Opisane powyżej zjawisko nazywamy magnesowaniem przez indukcję. Przyciąganie kawałków żelaza przez magnes objaśnia się właśnie ich namagnesowaniem przez indukcję. Są one przyciągane, ponieważ na zbliżonym do bieguna końcu powstaje wskutek działania indukcyjnego biegun przeciwny. Prócz żelaza podobne własności mają jeszcze z pierwiastków metale, nikiel i kobalt. Gdy przełamiemy lub przetniemy na połowy drut stalowy namagnesowany, to okaże się, że każda połówka staje się magnesem o dwóch biegunach (rys. 16.4). Przy złożeniu z powrotem tych części bieguny przeciwne zetknięte ze sobą przestają działać na zewnątrz, jak gdyby znikają. Przy dalszym dzieleniu połówek na mniejsze części stale otrzymujemy coraz mniejsze magnesy, każdy o dwóch biegunach. Nie możemy oddzielić pojedynczego bieguna. Mamy tu zasadniczo odmienną własność niż przy elektryzowaniu indukcyjnym ciał. Tam mogliśmy rozdzielać ładunki powstające na końcach pręta metalowego wskutek działania indukcyjnego.



Rys. 16.5. W sztabie nienamagnesowanej kierunki elementarnych magnesów są chaotycznie rozrzucone we wszystkie strony. W namagnesowanej—są zwrócone jednoimiennymi biegunami w tę samą stronę

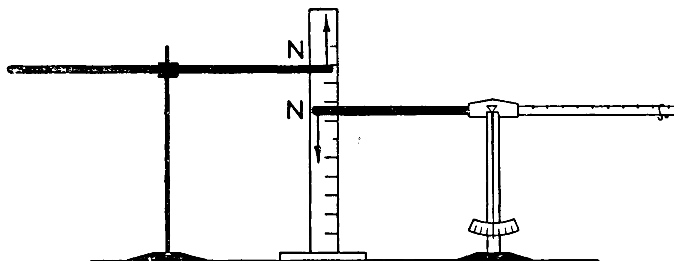
Tutaj jesteśmy niejako zmuszeni do przyjęcia założenia, że każda, nawet najmniejsza cząstka magnesu jest małym magnesem. W stali nienamagnesowanej wszystkie te elementarne magnesy są nieuporządkowane (rys. 16.5). Rozrzucone w rozmaitych kierunkach bieguny różnych znaków znoszą się w swych działaniach

na zewnątrz. Namagnesowanie polega na uporządkowaniu elementarnych magnesów przez zwrócenie biegunów jednego znaku w jedną stronę, znaku przeciwnego — w przeciwną.

Ze względu na niemożliwość oddzielenia biegunów nie mamy w dziedzinie magnetyzmu zjawiska podobnego do przewodzonego prądu elektrycznego, który polega na ciągłym ruchu ładunków w jednym kierunku.

16.2. Prawo Coulomba. Jeżeli cienki drut stalowy namagnesujemy silnie podłużnie, to bieguny jego ograniczają się zwykle do niewielkich obszarów na końcach. Przy znacznej długości takich długich, liniowych magnesów można badać działania jednego ich bieguna zaniedbując działania drugiego.

Aby zbadać, czy dwa magnesy są równie silne, używamy trzeciego do porównania. Jeżeli biegun A pierwszego magnesu działa z danej odległości siłą F_1 na biegun C magnesu użytego do porównania, zaś biegun drugiego B wywiera na biegun C z tej samej odległości siłę F_2, to w przypadku, gdy te siły są równe, mówimy, że bieguny A i B mają równe natężenia. W przypadku, gdy siła $F_1 = nF_2$, powiemy, że biegun A ma natężenie n razy większe niż biegun B. Natę-



Rys. 16.6. Ważka magnetyczna

żenia biegunów uważamy zatem za proporcjonalne do sił wywieranych przez nie z tej samej odległości na jakiś biegun pomocniczy. By móc każdemu biegunowi przyporządkować pewną liczbę będącą miarą jego natężenia, musimy jeszcze przyjąć określony biegun za jednostkowy. Przyjęto, iż biegun magnetyczny działający na drugi taki sam biegun z odległości 1 cm siłą 1 dyny (w próżni) ma natężenie równe jednostce. Jednostka ta należy do tak zwanego bezwzględnego elektromagnetycznego CGS (w skrócie EM) układu jednostek. Nie posiada oddzielnej nazwy. Piszemy zwykle: jednostka EM natężenia bieguna.

Porównywać możemy bieguny magnetyczne za pomocą ważki magnetycznej — małej dźwigni dwuramiennej, której jednym ramieniem jest namagnesowany drut stalowy, drugim — pręcik mosiężny z podziałką (rys. 16.6). Zbliżając do końca ramienia ważki jednoimienny biegun innego magnesu umocowany na małym statywie, zakłócamy równowagę ważki. Aby przywrócić równowagę, musimy po drugiej stronie zawiesić małe ciężarki z drutu. Możemy w ten sposób ocenić siły występujące między biegunami. Odległość między nimi odczytujemy na ustawionej obok skali.

Za pomocą ważki magnetycznej możemy również stwierdzić zależność sił działających między biegunami od odległości, co pierwszy wykrył Coulomb za pomocą tzw. wagi skręceń, w której o siłach wnioskuje się z wielkości skręcenia drucika, na końcu którego jest zawieszony magnes. Stwierdził on mianowicie, że siły przyciągające lub odpychające, jakie dwa bieguny na siebie nawzajem wywierają, są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu ich odległości. Można zatem działania biegunów wyrazić wzorem analogicznym do wzoru wyrażającego wzajemne działania ładunków elektrycznych:

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{16.1}$$

gdzie m_1 i m_2 oznaczają natężenia biegunów, a r — ich wzajemną odległość.

Zakładając, że bieguny mają równe natężenia $m_1 = m_2 = m$ otrzymamy

$$F = \frac{m^2}{r^2}, \qquad \text{skąd} \qquad m = r\sqrt{F},$$

stąd zaś otrzymamy na wymiar wielkości m

$$[\mathrm{m}] = [\mathrm{l}]\,[\mathrm{m\,l\,t^{-2}}]^{1/2} = [\mathrm{m^{1/2}\,l^{3/2}\,t^{-1}}].$$

Jak widać, wymiar natężenia bieguna w układzie EM jest taki sam, jak wymiar ilości elektryczności w układzie ES jednostek. Jednakże są to wielkości zupełnie odmienne. Trzeba tu wziąć pod uwagę okoliczność, że układy ES i EM jednostek są to układy oparte na innych zasadach. Później będziemy mogli stwierdzić związek między tymi układami.

Prawo Coulomba dla biegunów znajdujących się w jakiejś substancji, w środowisku płynnym takim, jak woda, nafta, wyrazi się wzorem

$$F = \frac{m_1 m_2}{\mu r^2}, \tag{16.2}$$

gdzie μ oznacza tzw. przenikalność magnetyczną danego środowiska, która później będzie dokładniej określona. To samo równanie możemy również stosować w przypadku środowiska stałego. Współczynnik μ jest zresztą w większości wypadków tak mało różny od jedności, że doświadczenie Coulomba nie mogłoby dać wyników. Wyznaczamy ten współczynnik za pomocą innych, czulszych metod.

Dla próżni moglibyśmy napisać wzór identyczny do wzoru (16.2):

$$F = \frac{m_1 m_2}{\mu_0 r^2}, \tag{16.3}$$

gdzie μ_0 oznacza przenikalność magnetyczną próżni. Równanie w tej postaci napisane byłoby prawdziwe w każdym układzie jednostek. W układzie EM przyjmuje się $\mu_0 = 1$.

W zracjonalizowanym układzie MKSA piszemy prawo Coulomba dla biegunów magnetycznych analogicznie do wzoru (14.4) w elektrostatyce. Dla próżni

$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{16.4}$$

Dla środowiska dowolnego

$$F = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{16.5}$$

Ze względu jednak na związek istniejący między przenikalnością elektryczną próżni i jej przenikalnością magnetyczną wyprowadzony z praw indukcji elektromagnetycznej przez Maxwella:

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2 = \left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{\sec}\right)^2, \tag{16.6}$$

gdzie c oznacza prędkość fal elektromagnetycznych w próżni, nie możemy przyjąć dowolnej jednostki na natężenie bieguna. Ponieważ mieliśmy poprzednio

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9},$$

to możemy napisać ze związku Maxwella

$$\frac{36\pi \cdot 10^9}{\mu_0} = 9 \cdot 10^{16},$$

skąd otrzymujemy

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} = 4\pi \cdot 10^{-7}. \tag{16.7}$$

Po wprowadzeniu tej wartości na μ_0 do prawa Coulomba otrzymamy wzór

$$F = \frac{1}{16\pi^2\, 10^{-7}} \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

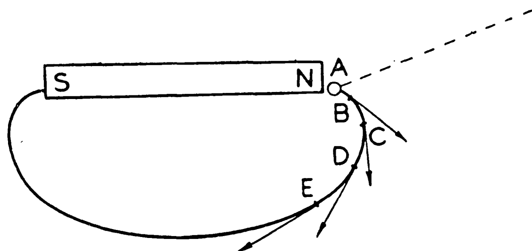
Kładąc teraz $m_1 = m_2 = 1$, $r = 1$ otrzymujemy

$$F = \frac{1}{16\pi^2 \cdot 10^{-7}} = \frac{10^7}{16\pi^2}\ \mathrm{N}.$$

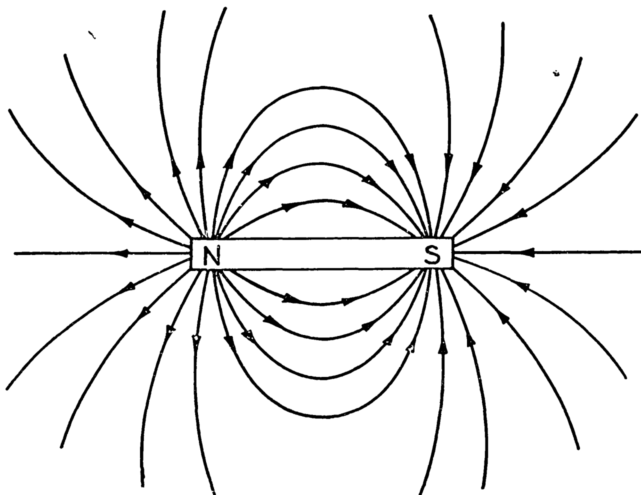
Zatem w układzie MKSA jednostkę natężenia będzie miał biegun, który na równy sobie z odległości 1 metra wywiera w próżni siłę $\frac{10^7}{16\pi^2}$ niutonów. Biegun jednostkowy w układzie MKSA będzie znacznie silniejszy niż biegun jednostkowy w układzie EM. Skoro biegun jednostkowy w układzie MKSA odpycha lub przyciąga drugi taki sam biegun z siłą $\frac{10^7}{16\pi^2}$ N, czyli $\frac{10^{12}}{16\pi^2}$ dyn z odległości 1 metra,

to z odległości 1 cm będzie go odpychać z siłą 10 000 razy większą, czyli $\frac{10^{16}}{16\pi^2}$ dyn. Stąd wynika, że biegun jednostkowy układu MKSA jest $\frac{10^8}{4\pi} = 7{,}958 \cdot 10^6$, czyli blisko 8 milionów razy silniejszy od bieguna jednostkowego układu EM. A więc 1 jednostkę natężenia w układzie MKSA ma biegun = biegunowi o $\frac{10^8}{4\pi}$ jednostkach natężenia w układzie EM.

16.3. Pole magnetyczne magnesu stałego. W otoczeniu magnesu stwierdzamy dwojakiego rodzaju działania: 1) dynamiczne (wywieranie sił na inne magnesy) i 2) indukcyjne (magnesowanie kawałków żelaza lub stali). Przestrzeń, w której występują te działania, nazywamy polem magnetycznym. Ustrój pola wyobrażamy sobie za pomocą linii natężenia pola. Wyobraźmy sobie, że mamy malutki, punktowy biegun magnetyczny dodatni należący do bardzo długiego liniowego magnesu. Zbliżmy go do bieguna północnego magnesu sztabowego. Oczywiście będzie na ten biegun próbny działać pewna siła. Prowadźmy biegun powoli stale w kierunku działającej na niego siły (rys. 16.7). Biegun poruszający się w powyżej opisany sposób zakreśli linię krzywą *ABCDE*, którą nazywamy linią natężenia pola magnetycznego. Również możemy wykreślić linię natężenia pola prowadząc mały magnesik w kierunku ustawiania się jego osi. Rysunek linii pola możemy otrzymać, kładąc na magnes szybę szklaną i posypując ją opiłkami żelaznymi. Opiłki wskutek działania indukcyjnego zamieniają się na małe magnesiki i układają się w łańcuchy wzdłuż linii pola. Liniom tym przypisujemy kierunek od bieguna dodatniego do



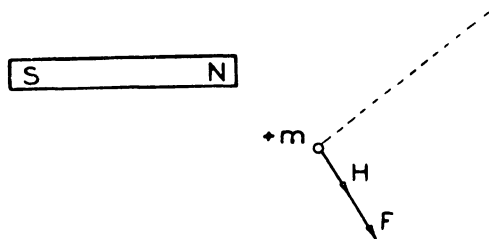
Rys. 16.7. Wyznaczenie linii natężenia pola magnetycznego



Rys. 16.8. Linie natężenia pola magnetycznego

ujemnego. Zaczynają się one zawsze na biegunie północnym, a kończą na biegunie południowym (rys. 16.8). Można wykazać, że pole jest silniejsze, a siły wywierane na bieguny większe tam, gdzie linie są bardziej zgęszczone, gdzie się skupiają. Tam, gdzie rozchodzą się szeroko, pole jest słabsze.

16.4. Natężenie pola magnetycznego. Na biegun próbny dodatni o natężeniu m działa w każdym punkcie pola magnesu siła $\vec{F}$ (rys. 16.9). Siła ta, jak wiemy, jest proporcjonalna do m. Zatem stosunek $\frac{F}{m}$ będzie jedynie zależał od miejsca w polu. Nazywamy go natężeniem pola magnetycznego w danym punkcie. Będzie to wektor o kierunku siły wywieranej na biegun północny. Oznaczamy go zwykle literą $\vec{H}$:



Rys. 16.9. Natężenie pola magnetycznego $H = \frac{F}{m}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{16.8}$$

Natężenie pola jest wektorem równym co do wielkości i kierunku sile działającej na jednostkowy biegun magnetyczny dodatni. Natężenie pola H nazywają często wprost wektorem magnetycznym.

Jednostką natężenia pola magnetycznego jest ersted, nazwa pochodząca od nazwiska duńskiego fizyka Oerstedta. Dlatego w skrócie ersted pisze się Oe. Ersted jest to natężenie pola magnetycznego w takim punkcie, w którym na biegun magnetyczny jednostkowy wywierana jest siła równa 1 dynie. Ersted do roku 1935 nazywano gausem i jeszcze można się spotkać z tą nazwą w starszych książkach. Obecnie gaus jest nazwą jednostki indukcji magnetycznej, o której będzie mowa później.

Pola magnetyczne, z którymi mamy do czynienia, mają różne natężenia w granicach od ułamka ersteda aż do kilkudziesięciu tysięcy erstedów. Tak np. natężenie pola magnetycznego ziemskiego w Polsce wynosi średnio 0,4 ersteda. Między biegunami niedużego elektromagnesu H wynosi od 5000 do 10 000 erstedów. Między biegunami najsilniejszych, jakie potrafimy budować, elektromagnesów H równe jest 50 000 Oe. Fizykowi radzieckiemu, Kapicy, udało się wytwarzać krótkotrwałe pola magnetyczne, w których natężenie dochodziło do kilkuset tysięcy erstedów.

W układzie MKSA równanie (16.8) również musi być prawdziwe. Ponieważ jednak jednostki tak siły F jak i natężenia bieguna są inne, to i jednostka natężenia pola będzie inna. W takim punkcie pola natężenie będzie równe jednostce, w którym na biegun jednostkowy w układzie MKSA wywierana jest siła jednostkowa

układu MKSA, czyli 1 niuton. Jednostce tej dotychczas nie nadano nazwy. Jeżeli ją przeliczymy na jednostki układu EM:

$$1 \text{ jednostka natężenia pola układu MKSA} = \frac{1\text{ N}}{1 \text{ natężenia bieguna}} =$$

$$= \frac{10^5 \text{ dyn}}{\frac{10^8}{4\pi}} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Oe},$$

to widać, że jednostka układu MKSA jest znacznie mniejsza od jednostki układu EM, równa jest 4π milierstedów, czyli koło 12 milierstedów.

Pole magnetyczne, w którym wektor magnetyczny jest stały co do kierunku i wielkości, nazywamy jednostajnym albo jednorodnym. Pole magnetyczne jednorodne nie może wprawić w ruch postępowy krótkiego magnesu sztabowego, może go tylko obrócić, tak aby przyjął położenie równoległe do linii pola. W polach niejednorodnych magnes jest wciągany do miejsc, gdzie skupiają się linie pola, gdyż siły działające na jego bieguny nie są równe. Siła działająca na dany biegun jest zawsze określona wzorem

$$\vec{F} = m\vec{H}, \tag{16.9}$$

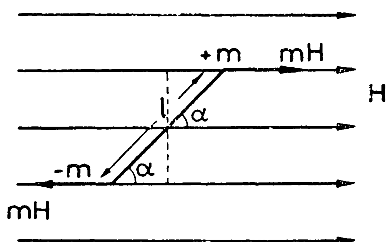
gdzie m jest skalarem, a $\vec{H}$ — wektorem, który jest funkcją tylko współrzędnych.

Pole magnetyczne, którego natężenie jest niezmienne w czasie i posiadające tę własność, że praca wykonana przez siły pola przy ruchu bieguna magnetycznego po dowolnym obwodzie zamkniętym równa się zeru, nazywa się polem magnetycznym statycznym albo polem magnetostatycznym. Pola pochodzące od magnesów trwałych nieruchomych są polami magnetycznymi statycznymi.

Przy przemieszczaniu bieguna magnetycznego w polu siły pola wykonują pracę. Jednakże podobnie jak w polu elektrostatycznym praca przy okrążeniu obwodu zamkniętego w polu magnesu stałego równa się zeru.

16.5. Moment magnesu. Przypuśćmy, że potrafimy wytworzyć idealny magnes liniowy, posiadający dwa bieguny punktowe, każdy o ilości magnetyzmu m. Taki zespół dwóch biegunów magnetycznych nazywamy dipolem magnetycznym. Momentem magnetycznym M_m dipola nazywamy wektor skierowany od bieguna $-m$ do $+m$ o wartości określonej wzorem

$$M_m = ml, \tag{16.10}$$



Rys. 16.10. Działanie sił na magnes w polu jednorodnym

gdzie l oznacza odległość między biegunami. Gdybyśmy taki dipol umieścili w polu jednorodnym w taki sposób, żeby kierunek jego momentu magnetycznego tworzył kąt α z kierunkiem wektora H w danym punkcie, to działałaby nań para sił o momencie $mH \cdot l \sin \alpha$ (rys. 16.10). Ponieważ iloczyn $ml = M_m$ według równa-

nia (16.10), zatem moment tej pary sił, który oznaczymy M_p, będzie określony wzorem

$$M_p = M_m H \sin \alpha. \tag{16.11}$$

Największy moment pary będzie działać przy ustawieniu dipola osią prostopadle do linij pola. Będzie on wtedy

$$M_p = M_m H. \tag{16.12}$$

W rzeczywistości nie potrafimy zbudować dipola magnetycznego, ale mimo to możemy się posługiwać pojęciem momentu magnetycznego. Gdy magnes sztabowy umieścimy w polu jednorodnym osią prostopadle do kierunku pola, to będą nań działać siły, które możemy sprowadzić do pary o momencie

$$M_p = M_m H. \tag{16.13}$$

Jeżeli zmierzymy moment pary M_p i znamy natężenie pola H, to możemy obliczyć moment magnetyczny danego magnesu:

$$M_m = \frac{M_p}{H}. \tag{16.14}$$

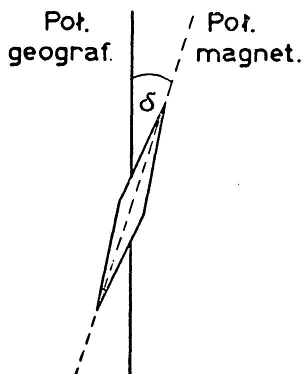
Odwrotnie, znając moment magnetyczny M_m magnesu i moment sił nań działających w polu magnetycznym, możemy wyznaczyć natężenie pola H. Istnieje metoda doświadczalna (Gaussa), która pozwala z kilku pomiarów wyznaczyć jednocześnie nieznany moment magnesu i nieznane natężenie pola.

Jak wiemy, każdy magnes ma dwa bieguny. Bieguny te mają jednakowe natężenie. Jeżeli podzielimy magnes na dowolną liczbę części, to każda część będzie miała również dwa bieguny równego natężenia. Dawniej zamiast natężenia bieguna wprowadzano termin masa magnetyczna albo ilość magnetyzmu. Przypisywano biegunowi magnetycznemu północnemu pewną ilość magnetyzmu dodatniego, biegunowi południowemu — taką samą ilość magnetyzmu ujemnego. Ponieważ jednak każda, nawet najmniejsza cząstka zawiera zawsze dwa bieguny o jednakowym natężeniu, czyli, jakbyśmy dawniej powiedzieli, o jednakowych ilościach magnetyzmu dodatniego i ujemnego, wobec tego całkowita ilość magnetyzmu tak całego magnesu, jak i każdej jego części jest równa zeru. Ilość magnetyzmu jest zatem fikcją, magnetyzm podobny do substancji nie istnieje — w przeciwieństwie do elektryczności, którą można uważać za gaz elektronowy. Natomiast każda część czy cząstka magnesu posiada moment magnetyczny. *Moment magnetyczny jednostki objętości magnesu nazywamy jego namagnesowaniem.*

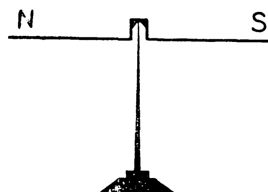
16.6. Pole magnetyczne ziemskie. Wokół Ziemi rozciąga się pole magnetyczne. Na małej przestrzeni pole to można uważać za jednorodne. Magnes umieszczony na korku i puszczony na wodę zwraca się swą osią w przybliżeniu w kierunku północno-południowym, lecz nie jest poruszany w żadnym kierunku przez pole, co dowodzi jego jednorodności. Na magnes w polu ziemskim działa jedynie para sił. Gdy igłę magnetyczną zawiesimy na osi pionowej, oś zaś na nieskręconej

cienkiej nitce jedwabnej, ustawi się ona stycznie do linii magnetycznej w danym punkcie. Płaszczyznę pionową przechodzącą przez igłę nazywamy południkiem magnetycznym. Płaszczyzna południka magnetycznego w ogólności tworzy pewien kąt z płaszczyzną południka geograficznego; kąt ten nazywamy zboczeniem magnetycznym albo deklinacją i oznaczamy literą δ (rys. 16.11). Znak — umieszczony przed liczbą oznacza zboczenie wschodnie, znak + zboczenie zachodnie.

Zboczenie wyznaczamy zwykle za pomocą igły deklinacyjnej, którą przedstawia rys. 16.12. Igła ta obracać się może w płaszczyźnie poziomej. Do dokładnego wyznaczania zboczenia używa się teodolitu magnetycznego.

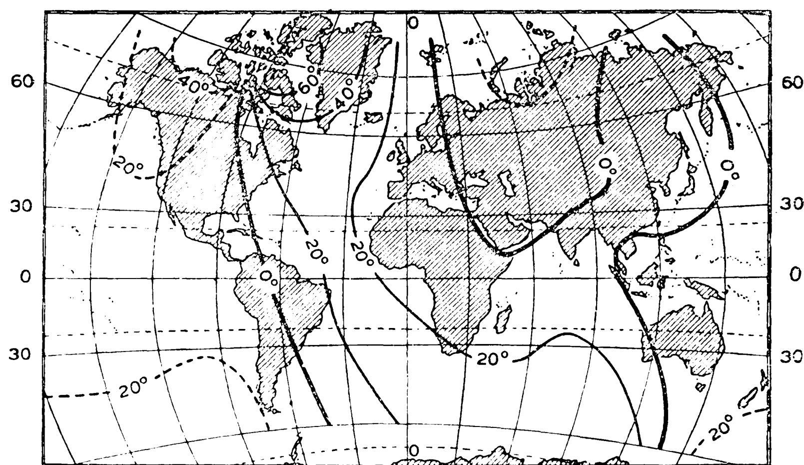


Rys. 16.11. Zboczenie magnetyczne



Rys. 16.12. Igła deklinacyjna

Linie łączące punkty na powierzchni Ziemi o jednakowym zboczeniu nazywamy izogonami. Przebieg ich wskazuje mapka na rys. 16.13. Nachyleniem



Rys. 16.13. Mapka izogon

magnetycznym albo inklinacją nazywamy kąt φ, który linie magnetyczne tworzą z poziomem danego miejsca. Inklinację mierzy się za pomocą igły magnetycznej obracającej się dokoła osi poziomej możliwie dokładnie przechodzącej przez

środek ciężkości igły. Gdy ustawimy igłę inklinacyjną w płaszczyźnie południka magnetycznego, nachylenie jej do poziomu wyznacza inklinację. Znając inklinację φ możemy natężenie pola H rozłożyć na dwie składowe:

$$\text{poziomą} \quad H_0 = H \cos \varphi, \tag{16.15}$$

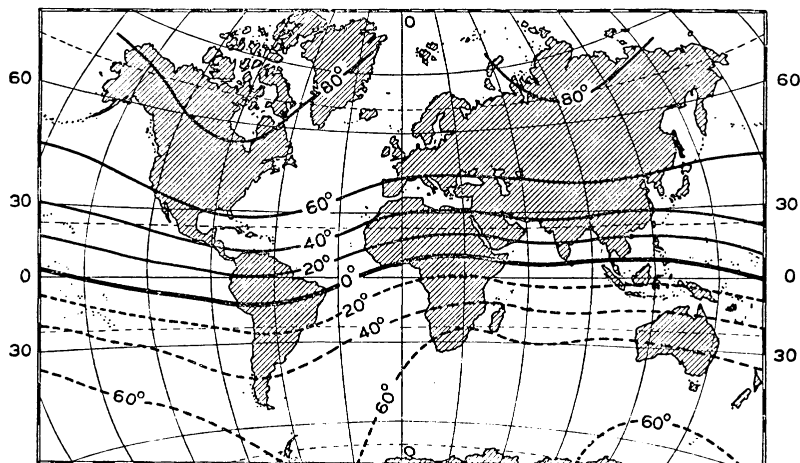
$$\text{pionową} \quad H_v = H \sin \varphi. \tag{16.16}$$

Jeżeli wyznaczymy składową poziomą, to znając ją i inklinację możemy wyznaczyć natężenie pola

$$H = \frac{H_0}{\cos \varphi}. \tag{16.17}$$

Istnieją metody doświadczalne wyznaczania składowej poziomej H_0.

Linie łączące na powierzchni Ziemi punkty o jednakowym nachyleniu magnetycznym nazywamy izoklinami. Izokliny przebiegają w ogólności z zachodu na wschód ze znacznymi odchyleniami od kierunku zachodnio wschodniego (rys.



Rys. 16.14. Mapka izoklin

16.14). Linię, wzdłuż której inklinacja $\varphi = 0$, nazywamy równikiem magnetycznym. Punkty $\varphi = 90°$ nazywamy biegunami magnetycznymi. Nie schodzą się one z biegunami geograficznymi.

Natężenie pola magnetycznego ziemskiego wyrażają zwykle w jednostkach

$$\gamma \text{ (gamma)} = 10^{-5} \text{ ersteda.}$$

Deklinację, inklinację i składową poziomą nazywamy elementami pola magnetycznego ziemskiego. Dla Warszawy w roku 1944 elementy te były następujące:

$$\delta = +0°12', \quad \varphi = 67°36', \quad H_0 = 0{,}183 \text{ Oe}.$$

Elementy magnetyczne ulegają powolnym zmianom zwanym wiekowymi. Prócz tych powolnych zmian obserwuje się zmiany elementów pola periodyczne, np. dzienne oraz nieokresowe, szybkie, zwane burzami magnetycznymi. Burze magnetyczne związane są z silnymi polami magnetycznymi Słońca oraz ze strumieniami elektronów pochodzenia słonecznego dosięgających naszej atmosfery.

Elementy magnetyczne mierzy się w specjalnie do tego celu urządzonych laboratoriach zwanych obserwatoriami magnetycznymi. Polska posiada obserwatorium magnetyczne w Świdrze pod Warszawą.

Tabela 16.1

Przykład zmiany deklinacji dla Warszawy

Rok	Deklinacja
1911	+5° 6′
1913	+4° 53′
1925	+2° 51′
1944	+0° 12′

Zadania

16.1. Dwa liniowe magnesy długości 15 cm każdy o natężeniu biegunów po 100 j. EM ustawiono wzdłuż jednej prostej tak, iż zwrócone są jednoimiennymi biegunami ku sobie. Z jaką siłą się odpychają?

Odpowiedź: 74,25 dyn.

16.2. Dwa magnesy liniowe długości l każdy leżą na jednej prostej zwrócone różnoimiennymi biegunami ku sobie. Moment magnetyczny każdego z magnesów jest M_m, odległość zaś ich środków 20 l. Z jaką siłą się przyciągają?

Odpowiedź: $F = 3{,}8 \cdot 10^{-5} \left(\frac{M}{l^2}\right)^2$.

16.3. Magnes liniowy długości 10 cm ma natężenie każdego bieguna = 15 j. EM. Jakie jest natężenie pola magnetycznego w powietrzu w punkcie leżącym na przedłużeniu jego osi w odległości 30 cm od jego środka?

Odpowiedź: 0,01176 Oe.

16.4. Jakie jest natężenie pola w punkcie odległym również o 30 cm od środka tego magnesu, lecz w płaszczyźnie prostopadłej do jego osi przechodzącej przez jego środek?

Odpowiedź: 0,005333 Oe.

16.5. Pręt stalowy namagnesowany długości 50 cm o przekroju kwadratowym = 1cm² ma moment magnetyczny 15 000 jedn. EM. Jakie jest jego namagnesowanie?

Odpowiedź: Namagnesowanie = momentowi magnetycznemu jednostki objętości = 300 jedn. EM.

16.6. Jaki moment dynamiczny ma para sił działająca na magnes o momencie magnetycznym $M_m = 600$ jedn. EM, ustawiony w polu magnetycznym ziemskim tak, że jego oś tworzy z kierunkiem pola kąt 30° (natężenie pola magnetycznego ziemskiego = = 0,48 Oe)?

Odpowiedź: $M_p = M_m H \sin 30° = 144$ dyn · cm.

16.7. Jaki będzie okres wahań T igły magnetycznej o momencie magnetycznym M_m długości l i masie m w polu magnetycznym ziemskim? Igła może się obracać około osi w płaszczyźnie poziomej. Składowa pozioma pola magnetycznego ziemskiego jest H_0

(moment bezwładności pręta długości l względem osi przechodzącej przez jego środek jest $\frac{ml^2}{12}\Big)$.

Odpowiedź: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = \pi l\sqrt{\frac{m}{3M_m H_0}}$.

16.8. Igła magnetyczna o momencie magnetycznym M_m znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o natężeniu H tworząc z jego kierunkiem kąt α. Jaka będzie jej energia potencjalna?

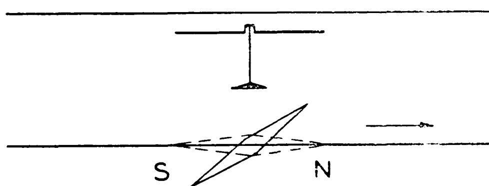
Odpowiedź: $E_p = \int M_m H \sin\alpha\, d\alpha = -M_m H \cos\alpha + C$.

Pytania do powtórzenia materiału

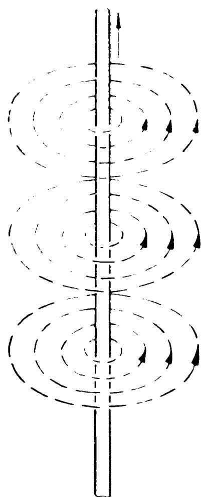
1. Jakie są zasadnicze zjawiska magnetyczne?
2. Jak się wyraża prawo Coulomba dla biegunów magnetycznych w układzie EM i MKSA?
3. Jakie są jednostki natężenia bieguna magnetycznego?
4. Co nazywamy polem magnetycznym? Jak się określa natężenie pola magnetycznego?
5. Jakie są jednostki pola magnetycznego?
6. Co nazywamy momentem magnesu? Jakie siły działają na magnes o danym momencie magnetycznym w polu jednorodnym?
7. Co nazywamy południkiem magnetycznym? zboczeniem? nachyleniem?
8. Co to są izogony? izokliny?

17. Pole magnetyczne prądu

17.1. Pole magnetyczne prądu prostoliniowego. Igła magnetyczna ustawiona w pobliżu drutu, np. równolegle do niego, zmienia natychmiast kierunek ustawienia, gdy tylko przez drut przepuścimy prąd elektryczny (rys. 17.1). W otoczeniu przewodu prądu najwidoczniej powstaje pole magnetyczne. Możemy je unaocznić za pomocą opiłek żelaznych, posypując nimi kartkę papieru lub szybę szklaną, przez którą przechodzi drut. Linie pola magnetycznego wokół przewodnika prostoliniowego bardzo długiego są kołami współśrodkowymi, których środki leżą na osi drutu (rys. 17.2). Kierunek linij jest zgodny z kierunkiem obrotu prawoskrętnej śruby posuwającej się przy wkręcaniu w kierunku prądu.

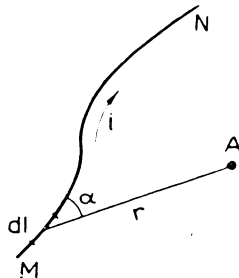


Rys. 17.1. Prąd przepuszczony przez drut odchyla blisko umieszczoną igłę magnetyczną



Rys. 17.2. Linie magnetyczne wokół prądu płynącego w przewodniku bardzo długim

17.2. Prawo Biota i Savarta. W przypadku przewodników innych kształtów niż linia prosta pola są w ogólności skomplikowane i często trudne jest albo nawet niemożliwe obliczenie natężenia pola w różnych miejscach. W wielu wypadkach możemy obliczyć natężenie pola posługując się prawem Biota i Savarta, które działania magnetyczne prądu rozpatruje jako sumę działań pochodzących od poszczególnych elementów przewodnika (rys. 17.3). Według tego prawa siła pochodząca od elementu dl przewodnika jest umiejscowiona w prostej prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez element dl i przez punkt A, w którym umieszczamy biegun magnetyczny. Zwrot zaś wektora dF na prostej



Rys. 17.3. Ujęcie działań magnetycznych prądu za pomocą prawa Biota i Savarta

określa tzw. reguła pływaka: pływak płynący wzdłuż przewodnika prądu głową naprzód w kierunku tego prądu, zwrócony twarzą do bieguna dodatniego $+m$, lewą ręką wskazuje zwrot wektora dF. Siła wywierana przez element prądu na biegun magnetyczny jest:

1) proporcjonalna do natężenia m bieguna;
2) proporcjonalna do natężenia prądu i płynącego w przewodniku;
3) proporcjonalna do długości dl elementu prądu;
4) proporcjonalna do sinusa kąta α, jaki element dl tworzy z prostą łączącą go z biegunem;
5) odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości r^2 bieguna od elementu dl.

Wszystkie te zależności możemy ująć za pomocą jednego wzoru:

$$dF = C\frac{m\,i\,dl\sin\alpha}{r^2}. \tag{17.1}$$

Prawo Biota i Savarta jest ważne tylko wtedy, gdy przewodnik i biegun magnetyczny znajdują się w środowisku jednorodnym (magnetycznie) i nieograniczonym.

Aby obliczyć siłę wywieraną na biegun przez prąd płynący w określonej części MN przewodnika, trzeba dodać geometrycznie wszystkie siły elementarne pochodzące od poszczególnych elementów drutu, na które dzielimy odcinek MN. Zadanie to jest w ogólności trudne, a często niewykonalne. Prościej przedstawia się przypadek, gdy drut leży w jednej płaszczyźnie; wtedy siły pochodzące od poszczególnych elementów mają taki sam kierunek i można je dodać algebraicznie. Siłę wypadkową da nam w tym przypadku wzór

$$F = \int\limits_M^N C\frac{m\,i\,dl\sin\alpha}{r^2}. \tag{17.2}$$

Współczynnik proporcjonalności C zależy od wyboru jednostek. Gdybyśmy natężenie prądu i wyrazili w jednostkach elektrostatycznych, musielibyśmy wyznaczyć współczynnik C doświadczalnie. Można jednak postąpić inaczej: można dobrać tak jednostkę natężenia prądu, aby ten współczynnik równał się jedności. Daje to początek nowemu układowi jednostek elektrycznych, zwanemu układem elektromagnetycznym. Jednostkę elektromagnetyczną natężenia prądu określimy później. Na razie zadowolimy się stwierdzeniem, że gdy natężenie prądu i jest wyrażone w jednostkach elektromagnetycznych (w skrócie EM), to $C = 1$, gdy zaś natężenie prądu wyrazimy w amperach, to $C = {}^1/_{10}$. A więc powyższe wzory przybiorą postać:

Gdy i jest wyrażone w jednostkach EM,

$$dF = \frac{m\,i\,dl\sin\alpha}{r^2}, \tag{17.3}$$

$$F = m\,i\int\frac{dl\sin\alpha}{r^2}. \tag{17.4}$$

Gdy i jest wyrażone w A
$$\begin{cases} dF = \dfrac{1}{10} \dfrac{m\,i\,dl \sin\alpha}{r^2}, & (17.5) \\ F = \dfrac{1}{10} m\,i \displaystyle\int \dfrac{dl \sin\alpha}{r^2}. & (17.6) \end{cases}$$

Natężenie pola magnetycznego w punkcie, w którym znajduje się biegun, będzie określone wzorami:

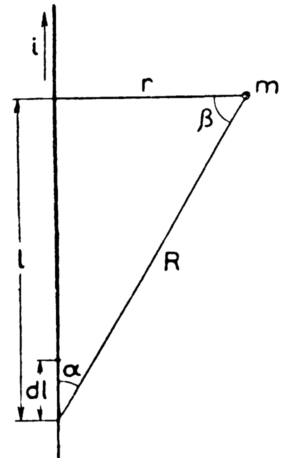
Gdy i jest wyrażone w jednostkach EM,
$$\begin{cases} dH = \dfrac{i\,dl \sin\alpha}{r^2}, & (17.7) \\ H = i \displaystyle\int \dfrac{dl \sin\alpha}{r^2}. & (17.8) \end{cases}$$

Gdy i jest wyrażone w amperach
$$\begin{cases} dH = \dfrac{1}{10} \dfrac{i\,dl \sin\alpha}{r^2}, & (17.9) \\ H = \dfrac{1}{10} i \displaystyle\int \dfrac{dl \sin\alpha}{r^2}. & (17.10) \end{cases}$$

We wszystkich powyższych wzorach należy wyrazić dl i r w cm; siłę otrzymamy w dynach, natężenie pola w erstedach.

17.3. Pole przewodnika prostoliniowego nieskończenie długiego. Zastosujemy otrzymany wzór (17.4) do przewodnika prostoliniowego nieskończenie długiego umieszczonego w środowisku jednorodnym nieograniczonym. Oznaczmy najkrótszą odległość punktu m od przewodnika przez r, odległość tegoż punktu od elementu dl — przez R, długość rzutu liczoną od spodka prostopadłej r — przez l (rys. 17.4). Na siłę wywieraną przez cały drut na biegun zawierający m jednostek magnetyzmu możemy napisać wzór

$$F = mi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dl \sin\alpha}{R^2}. \qquad (17.11)$$



Rys. 17.4. Pole magnetyczne przewodnika nieskończenie długiego, w którym płynie prąd elektryczny

Aby scałkować to wyrażenie, trzeba wszystkie wielkości zmienne wyrazić jako funkcje jednej zmiennej niezależnej. Wyraźmy wszystkie zmienne w zależności od kąta β zawartego między r a R. Kąt $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta$, zatem będziemy mieli

$$\sin\alpha = \cos\beta. \qquad (17.12)$$

Z trójkąta, jaki się utworzy, mamy

$$l = r \operatorname{tg} \beta.$$

Za tem

$$dl = \frac{r\,d\beta}{\cos^2\beta}, \tag{17.13}$$

zaś

$$R = \frac{r}{\cos\beta}. \tag{17.14}$$

Podstawiając wartości (17.12), (17.13), (17.14) do wyrażenia (17.11) otrzymamy

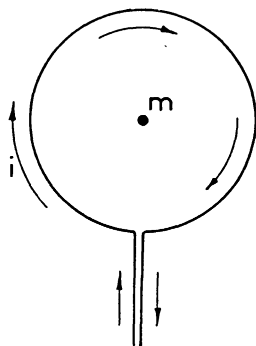
$$F = \frac{mi}{r}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\beta\,d\beta = \frac{mi}{r}\sin\beta\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{mi}{r}(1+1) = \frac{2mi}{r}. \tag{17.15}$$

Zatem natężenie pola magnetycznego w odległości r od przewodnika wyrazi się wzorem

$$H = \frac{2i}{r}. \tag{17.16}$$

Gdy i wyrazimy w amperach, wówczas $H = \dfrac{2i}{10r}$.

17.4. Pole przewodnika kołowego. W przypadku, gdy prąd płynie po drucie kształtu koła, na biegun magnetyczny umieszczony w środku tego koła (rys. 17.5), jak łatwo sprawdzić, musi działać siła umiejscowiona w prostej prostopadłej do płaszczyzny koła. Zwrot tej siły określa reguła pływaka. Przy kierunku prądu zaznaczonym na rysunku siła będzie skierowana od czytelnika za płaszczyznę rysunku w dół. Wartość tej siły otrzymamy ze wzoru Biota i Savarta:



Rys. 17.5. Pole przewodu kołowego, w którym płynie prąd

$$F = Cmi \oint \frac{dl \sin a}{r^2}.$$

Pozostawiamy współczynik proporcjonalności, aby nie krępować się wyborem jednostek.

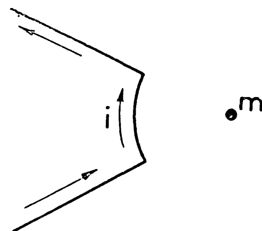
Ponieważ w rozważanym przypadku $r = \text{const}$, $a = 90°$, a $\oint dl = 2\pi r$ (obwód koła), zatem otrzymamy

$$F = \frac{2\pi\,Cmi}{r}, \tag{17.17}$$

$$H = \frac{F}{m} = \frac{2\pi Ci}{r}. \tag{17.18}$$

17.5. Elektromagnetyczny układ jednostek CGS. Jeżeli we wzorze (17.18) dobierzemy tak nową jednostkę natężenia prądu, aby współczynnik $C = 1$, wówczas gdy $r = 1$ cm oraz $i = 1$, to $H = 2\pi$ erstedów. Jednostka tak dobrana nazywa się jednostką bezwzględną elektromagnetyczną natężenia prądu i stanowi

podstawę elektromagnetycznego (EM) układu jednostek elektrycznych. Zatem definicja jednostki EM natężenia prądu będzie następująca: jednostkę EM natężenia ma prąd, który płynąc po obwodzie koła o promieniu $r = 1$ cm wytwarza w jego środku natężenie pola $H = 2\pi$ erstedów albo, co na jedno wyjdzie, działa na biegun jednostkowy, umieszczony w środku, siłą 2π dyn. Jeżeli weźmiemy pod uwagę łuk tego koła o długości 1 cm, to pole wytwarzane przez ten sam prąd będzie się równać 1 ersted. Moglibyśmy więc również dobrze określić prąd jednostkowy jako prąd, który płynąc po łuku długości 1 cm zatoczonym promieniem 1 cm wytwarza w środku krzywizny pole 1 ersted albo też działa na biegun jednostkowy siłą 1 dyny. Rysunek 17.6 wskazuje, w jaki sposób prowadzić doprowadzenie prądu, aby pole było wytwarzane jedynie przez łuk i aby doprowadzenia nie grały roli.



Rys. 17.6. Działanie magnetyczne prądu płynącego po łuku koła

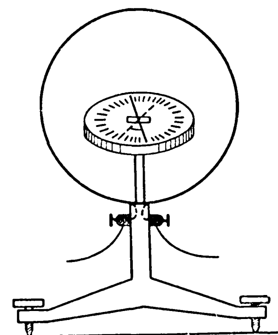
Z równania (17.16) możemy obliczyć wymiar natężenia prądu w układzie elektromagnetycznym:

$$[i] = [H]\,[r] = [m^{1/2}\,l^{-1/2}\,t^{-1} \cdot l] = [m^{1/2}\,l^{1/2}\,t^{-1}].$$

Jednostką elektromagnetyczną ładunku będzie ładunek przenoszony w każdej sekundzie przez prąd o natężeniu równym jednostce EM. Wymiar tej wielkości zgodnie z równaniem $Q = it$ będzie

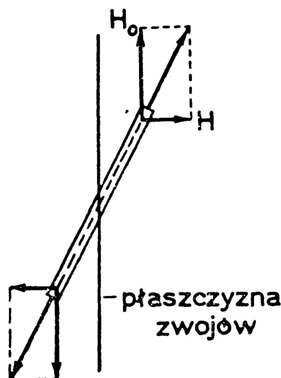
$$[Q] = [i]\,[t] = [m^{1/2}\,l^{1/2}\,t^{-1}] \cdot [t] = [m^{1/2}\,l^{1/2}].$$

17.6. Busola stycznych. Busola stycznych pozwala wykonać bezwzględny pomiar natężenia prądu, wyznaczyć natężenie danego prądu w jednostkach elektromagnetycznych względnie w amperach. Składa się z jednego lub kilku obwodów drutu izolowanego w kształcie koła o promieniu *r*. W środku tych obwodów znajduje się bardzo krótka igła magnetyczna, do której przymocowana jest długa wskazówka (rys. 17.7). Pozioma podziałka kątowa służy do odczytania kątów obrotu igły. Busolę stycznych ustawia się tak, aby płaszczyzna zwojów leżała w płaszczyźnie południka magnetycznego. Wtedy wskazówka ustawia się na zerze. Gdy przepuścimy prąd, wówczas w środku obwodów powstaje pole magnetyczne *H* prostopadłe do płaszczyzny południka magnetycznego. Jeżeli w przyrządzie mamy *n* zwojów, to pole to będzie miało natężenie


Rys. 17.7. Busola stycznych

$$H = \frac{2\pi n i}{r}. \tag{17.19}$$

Prócz tego pola działa na igłę składowa pozioma pola magnetycznego H_0. Pole wypadkowe, wzdłuż którego linii ustawi się igła (rys. 17.8), będzie tworzyć z południkiem magnetycznym kąt φ taki, iż



Rys. 17.8. Pole prądu jest prostopadłe do składowej poziomej pola ziemskiego. Igła ustawia się w kierunku wypadkowej

$$\frac{H}{H_0} = \operatorname{tg}\varphi, \tag{17.20}$$

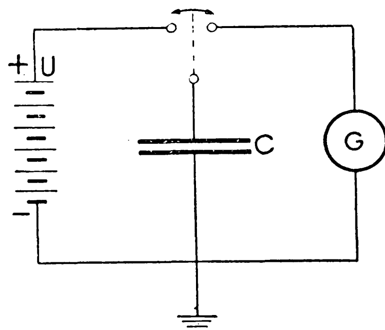
skąd otrzymamy

$$i = \frac{rH_0}{2\pi n}\operatorname{tg}\varphi \text{ w jednostkach EM} \tag{17.21}$$

lub

$$i = \frac{10rH_0}{2\pi n}\operatorname{tg}\varphi \text{ w amperach.} \tag{17.22}$$

17.7. Układy jednostek elektrycznych. Definicja jednostki EM natężenia prądu opiera się na jego działaniach magnetycznych, natomiast definicja jednostki ES jest oparta na ilości przepływającego ładunku mierzonego metodami elektrostatyki. Nie wiemy właściwie nawet, czy prąd określony jednym i drugim sposobem jest tą samą wielkością. Aby się o tym przekonać, musielibyśmy wykazać, że natężenie prądu zmierzone za pomocą metody opartej na działaniach magnetycznych prądu jest zawsze dokładnie proporcjonalne do natężenia prądu wyznaczonego za pomocą metody mierzącej przepływające ładunki. Można to zrobić np. w sposób następujący: kondensator o znanej pojemności C (którą możemy np. wyliczyć z jego rozmiarów) ładujemy do znanego potencjału U dajmy na to n razy w czasie t i rozbrajamy przez galwanometr G albo jakiś inny przyrząd (np. busolę stycznych), który mierzy natężenie prądu w jednostkach EM, a więc oparty na zasadzie działań magnetycznych prądu (rys. 17.9). Szybko następujące po sobie rozbrojenia kondensatora będą równoważne stałemu prądowi przenoszącemu $nQ = nCU$ jednostek elektrostatycznych w czasie t. Zatem natężenie prądu



Rys. 17.9. Porównanie jednostki elektrostatycznej z jednostką elektromagnetyczną natężenia prądu

$$i = \frac{nCU}{t} \text{ j. ES.} \tag{17.23}$$

Galwanometr natomiast wskaże nam natężenie prądu i' w jednostkach elektromagnetycznych. Należałoby się przekonać za pomocą takich pomiarów, że liczby

i i i' są zawsze proporcjonalne i, gdyby się okazało, że tak jest, znaleźć stały stosunek między nimi. Istotnie, takie doświadczenia zostały wykonane po raz pierwszy przez Kohlrauscha i Webera w r. 1856 i dały na stosunek $\frac{i}{i'}$ liczbę $3 \cdot 10^{10}$, to znaczy że prąd, którego natężenie zmierzone metodą elektrostatyczną wyraziłoby się liczbą $3 \cdot 10^{10}$ ES, w j. EM wyraża się liczbą 1. A więc jednostka elektromagnetyczna natężenia prądu jest $3 \cdot 10^{10}$ razy większa od jednostki elektrostatycznej.

Sprobujmy teraz znaleźć wymiar stosunku tych wielkości. Nie możemy jednak posłużyć się tu znalezionymi poprzednio wymiarami tych wielkości. Poprzednio bowiem w układzie ES przyjmowaliśmy, że ε_0 jest równe jedności i jest liczbą bezwymiarową, zaś w układzie EM przyjmowaliśmy, że μ_0 jest liczbą bezwymiarową i że μ_0 równa się jednostce. Nie możemy tego zrobić, jeżeli używamy obu układów. Zostawiamy obie te wielkości na razie jako nieoznaczone. Aby określić wymiar natężenia prądu w układzie ES weźmiemy najpierw prawo Coulomba dla próżni:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{\varepsilon_0 r^2};$$

gdy $Q_1 = Q_2 = Q$, wówczas $F = \frac{Q^2}{\varepsilon_0 r^2}$, skąd $Q = r\sqrt{\varepsilon_0 F}$.

Na wymiar ładunku otrzymamy

$$[Q] = [r]\,[\sqrt{\varepsilon_0 F}] = [1\, \varepsilon_0^{1/2}\, l^{1/2}\, m^{1/2}\, t^{-1}] = [\varepsilon_0^{1/2}\, l^{3/2}\, m^{1/2}\, t^{-1}].$$

Wobec tego na wymiar natężenia prądu w układzie ES otrzymamy

$$[i] = \frac{[Q]}{[t]} = [\varepsilon_0^{1/2}\, l^{3/2}\, m^{1/2}\, t^{-2}].$$

Obliczmy teraz wymiar natężenia prądu w układzie EM. W tym celu weźmy jakieś najprostsze równanie, np. wzór wyrażający natężenie pola magnetycznego w sąsiedztwie nieskończenie długiego prostoliniowego przewodnika:

$$H = \frac{2i}{r}, \quad \text{lecz} \quad H = \frac{F}{m}, \quad \text{zatem} \quad \frac{2i}{r} = \frac{F}{m},$$

skąd

$$[i] = \frac{[rF]}{[m]}.$$

Wymiar wielkości m zaś wyznaczymy z prawa Coulomba

$$F = \frac{m_1 m_2}{\mu_0 r^2}.$$

Zakładając $m_1 = m_2 = m$ otrzymamy $F = \frac{m^2}{\mu_0 r^2}$, skąd $m = r\sqrt{\mu_0 F}$.

Stąd obliczymy wymiar wielkości *m*:

$$[\mathrm{m}] = [\mathrm{r}]\,[\sqrt{\mu_0 \mathrm{F}}].$$

W takim razie na wymiar natężenia prądu i' otrzymamy

$$[\mathrm{i}'] = \frac{[\mathrm{r\,F}]}{[\mathrm{r}\sqrt{\mathrm{F}}]\,[\sqrt{\mu_0}]} = \frac{[\sqrt{\mathrm{F}}]}{[\sqrt{\mu_0}]} = [\mu^{-1/2}\,\mathrm{l}^{1/2}\,\mathrm{m}^{1/2}\,\mathrm{t}^{-1}].$$

Na stosunek zatem tych dwóch wielkości otrzymamy

$$\frac{[\mu_0^{-1/2}\,\mathrm{l}^{1/2}\,\mathrm{m}^{1/2}\,\mathrm{t}^{-1}]}{[\varepsilon_0^{1/2}\,\mathrm{l}^{3/2}\,\mathrm{m}^{1/2}\,\mathrm{t}^{-2}]} = \left[\frac{1}{\varepsilon_0^{1/2}\,\mu_0^{1/2}}\right]\frac{[\mathrm{t}]}{[\mathrm{l}]} = 3 \cdot 10^{10}$$

albo inaczej

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\,\frac{\mathrm{sec}}{\mathrm{cm}} = 3 \cdot 10^{10},$$

skąd

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}. \tag{17.24}$$

A więc po pierwsze, doświadczalnie stwierdzono, że jednostka EM jest $3 \cdot 10^{10}$ razy większa od jednostki elektrostatycznej, po drugie zaś otrzymaliśmy, że wymiar stosunku natężenia prądu w układzie ES do natężenia prądu w układzie EM równy $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ ma wymiar prędkości. Otóż liczba $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec jest prawie dokładnie równa prędkości światła w próżni. Maxwell na drodze czysto teoretycznej z praw indukcji elektromagnetycznej wyprowadził, że fale elektromagnetyczne rozchodzą się w przestrzeni pustej z prędkością równą $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. Według jego teorii fale świetlne są falami elektromagnetycznymi krótkimi, zatem rozchodzą się z tą samą prędkością. Teoria Maxwella została najzupełniej potwierdzona przez doświadczenie. Możemy więc przyjąć, że stosunek jednostki EM do jednostki ES natężenia prądu równa się prędkości światła c.

$$1 \text{ j. EM natężenia prądu} = c \cdot \text{j. ES natężenia prądu.}$$

Według ostatnich pomiarów prędkość światła w próżni wynosi

$$c = 2{,}99793 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/sec}.$$

A więc j. EM jest nie $3 \cdot 10^{10}$ razy większa od j. ES tylko $2{,}99793 \cdot 10^{10}$ razy większa.

Ponieważ liczba wyrażająca wartość danej wielkości jest odwrotnie proporcjonalna do wielkości jednostki, zatem natężenie prądu i w j. ES $= ci'$, gdzie i' jest liczbą wyrażającą ten sam prąd w j. EM.

Otrzymaliśmy poprzednio związek

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} = c, \qquad \text{skąd} \qquad \varepsilon_0\,\mu_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Stąd wynika, że jeżeli przyjmiemy, tak jak to robimy w układzie elektrostatycznym, $\varepsilon_0 = 1$, w takim razie w tym układzie

$$\mu_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Jeżeli natomiast przyjmiemy $\mu_0 = 1$, tak jak to robimy w układzie elektromagnetycznym, to w tym układzie musi być $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$. Korzystając z tych związków możemy otrzymać wszystkie stosunki między jednostkami układu elektromagnetycznego i elektrostatycznego.

Ładunek. Skoro w układzie EM $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, to elektrostatyczne prawo Coulomba będziemy musieli napisać w postaci

$$F = \frac{c^2 Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Jeżeli podstawimy do tego wzoru $Q_1 = Q_2 = 1$ oraz $r = 1$, to otrzymamy $F = c^2$ dyn. Zatem jednostka EM ładunku jest $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ razy większa od jednostki ES.

Napięcie. Według definicji $U = \frac{L}{Q}$. Podstawiając $L = 1$, $Q = 1$, otrzymujemy $U = 1$. Obliczamy na tej podstawie wielkość jednostki EM.

$$1\text{ j. EM} = \frac{1\text{ erg}}{1\text{ j. EM ładunku}} = \frac{1\text{ erg}}{c\text{ j. ES ładunku}} =$$

$$= \frac{1}{c}\text{ j. ES napięcia} \approx \frac{1}{3 \cdot 10^{10}}\text{ j. ES napięcia.}$$

Jednostka EM napięcia jest c razy mniejsza od jednostki ES.

Pojemność. Według definicji $C = \frac{Q}{U}$.

$$1\text{ j. EM pojemności} = \frac{1\text{ j. EM ładunku}}{1\text{ j. EM napięcia}} = \frac{c\text{ j. ES ładunku}}{\frac{1}{c}\text{ j. ES napięcia}} =$$

$$= c^2 \approx 9 \cdot 10^{20}\text{ j. ES pojemności.}$$

Opór elektryczny. Według definicji $R = \frac{U}{i}$, zatem

$$1\text{ j. EM oporu} = \frac{1\text{ j. EM napięcia}}{1\text{ j. EM natężenia prądu}} = \frac{\frac{1}{c}\text{ j. ES napięcia}}{c\text{ j. ES natężenia prądu}} =$$

$$= \frac{1}{c^2} \approx \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}\text{ j. ES oporu.}$$

W podobny sposób można znaleźć związki między pozostałymi jednostkami układu elektromagnetycznego i elektrostatycznego.

Układ MKSA. Jak już wiemy trzema jednostkami podstawowymi w tym układzie są metr, kilogram, sekunda. Wszystkie wielkości pochodne mają jednostki należące również do tego układu. Czwartą jednostką podstawową jest amper. Amper określono pierwotnie jako po prostu jedną dziesiątą część jednostki EM. W najnowszych czasach, aby określić amper niezależnie od jednostek innych układów wybrano dość skomplikowaną definicję*, tak jednak dobraną, żeby amper równał się dokładnie 1/10 j. EM. Zatem

$$1\,\mathrm{A} = \frac{1}{10}\,\text{j. EM} = \frac{c}{10}\,\text{j. ES} \approx 3 \cdot 10^9\,\text{j. ES}.$$

Ładunek. Ze związku $i = \frac{Q}{t}$ otrzymujemy $Q = it$. Gdy $i = 1$ A, $t = 1$ sec, to $Q =$ jednostce, 1 kulombowi. Stąd definicja: kulomb jest ładunkiem elektrycznym przenoszonym w ciągu jednej sekundy przez prąd o natężeniu jednego ampera.

$$1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A} \cdot 1\,\mathrm{sec} = \frac{1}{10}\,\text{j. EM natężenia prądu} \cdot 1\,\mathrm{sec} = \frac{1}{10}\,\text{j. EM ładunku} =$$

$$= \frac{c}{10}\,\text{j. ES ładunku} \approx 3 \cdot 10^9\,\text{j. ES}.$$

Jak stąd wynika, liczba, której używaliśmy poprzednio, $3 \cdot 10^9$, wyrażająca, ile razy kulomb jest większy od jednostki elektrostatycznej, jest tylko przybliżona. Dokładną liczbą jest

$$\frac{c}{10} = 2{,}99793 \cdot 10^9.$$

Liczba ta jest zaledwie o 0,06% mniejsza od liczby $3 \cdot 10^9$. Zatem we wszystkich rachunkach, w których nie jest wymagana wielka dokładność możemy się posługiwać tą ostatnią liczbą, $3 \cdot 10^9$.

Napięcie. Korzystamy znowu z wzoru $U = \frac{L}{q}$.

$$1\,\text{wolt} = \frac{1\,\text{dżul}}{1\,\text{kulomb}} = \frac{10^7\,\text{ergów}}{\frac{1}{10}\,\text{j. EM}} = 10^8\,\text{j. EM napięcia},$$

$$1\,\text{wolt} = \frac{10^7\,\text{ergów}}{\frac{c}{10}\,\text{j. ES ładunku}} = \frac{10^8}{c}\,\text{j. ES napięcia} \approx \frac{1}{300}\,\text{j. ES napięcia}.$$

---

* Amper jest natężeniem prądu elektrycznego nie ulegającego żadnym zmianom, który przepływając w dwóch przewodach równoległych prostoliniowych o długości nieskończonej, o przekroju okrągłym znikomo małym, umieszczonych w próżni w odległości jednego metra od siebie, wytwarza między tymi przewodami siłę równą $2 \cdot 10^{-7}$ niutonów na każdy metr długości przewodu.

Pojemność. Wychodząc z wzoru $C = \frac{Q}{U}$ otrzymamy

$$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ kulomb}}{1 \text{ wolt}} = \frac{\frac{1}{10} \text{ j. EM ładunku}}{10^8 \text{ j. EM napięia}} = 10^{-9} \text{ j. EM pojemności},$$

$$1 \text{ farad} = \frac{\frac{c}{10} \text{ j. ES ładunku}}{\frac{10^8}{c} \text{ j. ES napięcia}} = \frac{c^2}{10^9} \text{ j. ES pojemności} \approx$$

$$\approx 9 \cdot 10^{11} \text{ j. ES pojemności},$$

$$1\,\mu\text{F} = 9 \cdot 10^5 \text{ j. ES} \quad \left(\text{dokładnie } \frac{c^2}{10^{15}} \text{ j. ES}\right),$$

$$1 \text{ pF} = 0{,}9 \text{ j. ES} \quad \left(\text{dokładnie } \frac{c^2}{10^{21}} \text{ j. ES}\right).$$

Opór. Z definicji $R = \frac{U}{i}$ otrzymujemy

$$1 \text{ om} = \frac{1 \text{ wolt}}{1 \text{ amper}} = \frac{10^8 \text{ j. EM napięcia}}{\frac{1}{10} \text{ j. EM natężenia prądu}} = 10^9 \text{ j. EM oporu},$$

$$1 \text{ om} = \frac{\frac{10^8}{c} \text{ j. ES napięcia}}{\frac{c}{10} \text{ j. ES natężenia prądu}} = \frac{10^9}{c^2} \text{ j. ES oporu} \approx \frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \text{ j. ES oporu}.$$

Jak widać z powyższych liczb, jednostki układu MKSA są całkowitym wielokrotnościami lub podwielokrotnościami jednostek układu EM. Natomias stosunki tych jednostek do jednostek układu ES wyrażają się liczbami ułamkowymi i wszędzie do tych stosunków wchodzi prędkość światła c, która jest znana tylko z pewnym przybliżeniem.

Na zakończenie tego rozdziału zdajmy sobie jeszcze sprawę, czy wartość przyjęta poprzednio na $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$ była dokładna? Według elektrostatycznego prawa Coulomba

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

ładunek o wartości 1 kulomba będzie działał na drugi taki sam ładunek z odległości 1 metra siłą

$$F = \frac{\frac{c}{10} \text{ j. ES} \cdot \frac{c}{10} \text{ j. ES}}{10^4} = \frac{c^2}{10^6} \text{ dyn} = \frac{c^2}{10^{11}} \text{ N}.$$

Aby otrzymać ten sam rezultat, skorzystamy z wzoru Coulomba napisanego w tym układzie w formie

$$F = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{Q_1\,Q_2}{r^2}.$$

Po podstawieniu $Q_1 = 1$ C, $Q_2 = 1$ C, $r = 1$ m otrzymamy

$$F = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0} = \frac{c^2}{10^{11}},$$

skąd

$$\varepsilon_0 = \frac{10^{11}}{4\pi c^2} \approx \frac{10^{11}}{4\pi\cdot 9\cdot 10^{20}} = \frac{1}{36\pi\cdot 10^9}.$$

Widzimy zatem, że poprzednio przyjmowana przez nas wartość na ε_0 była tylko przybliżona. Po wykonaniu rachunku otrzymamy

$$\frac{1}{36\pi\cdot 10^9} = 8{,}842\cdot 10^{-12},$$

zaś

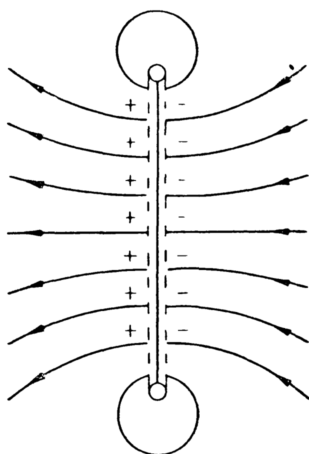
$$\varepsilon_0 = \frac{10^{11}}{4\pi\cdot c^2} = 8{,}854\cdot 10^{-12}.$$

Różnica wynosi około jednej tysiącznej całej wartości i w rachunkach nie wymagających najwyższej dokładności może być pominięta.

Na przenikalność magnetyczną próżni w układzie MKSA otrzymaliśmy poprzednio wartość

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}.$$

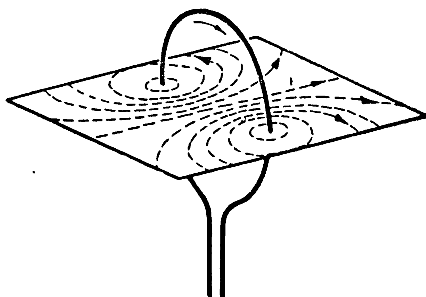
Wartość ta jest zupełnie dokładna.



Rys. 17.10. Podwójna warstwa magnetyczna

17.8. Pole magnetyczne przewodnika kołowego i solenoidu. Pole magnetyczne przewodnika kołowego prądu jest podobne do pola magnetycznego płytki stalowej namagnesowanej poprzecznie, jak na rys. 17.10. Taką bardzo cienką płytkę nazywamy podwójną warstwą magnetyczną. W rozważaniach teoretycznych często przewodnik kołowy prądu zastępujemy podwójną warstwą magnetyczną. Pole magnetyczne obwodu kołowego przedstawia rys. 17.11.

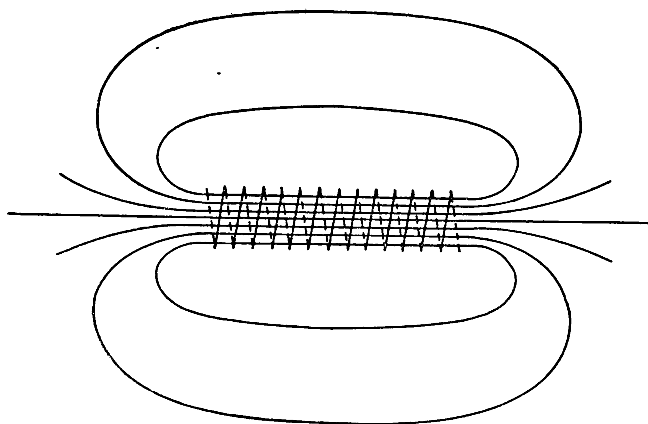
Solenoidem nazywamy przewodnik prądu zwinięty w linię śrubową. Jeżeli zwoje solenoidu są nawinięte gęsto, możemy go uważać za układ równoległych obwodów kołowych. Pole magnetyczne solenoidu jest podobne do pola magnetycznego magnesu


Rys. 17.11. Pole magnetyczne obwodu kołowego

sztabowego (rys. 17.12), różni się zaś od tego ostatniego tym, że linie tego pola są krzywymi zamkniętymi. Natomiast linie pola magnesu trwałego zaczynają się na biegunie północnym, a kończą na południowym. Solenoid w polu magnetycznym zachowuje się zupełnie jak magnes o biegunach znajdujących się przy końcach solenoidu.

Pole magnetyczne wewnątrz solenoidu jest w przybliżeniu jednorodne, jak to wykazuje przebieg linii magnetycznych na rys. 17.12. Natężenie tego pola jest proporcjonalne do iloczynu Ni, gdzie N oznacza liczbę zwojów na długości 1 cm, a i natężenie prądu w nim płynącego. Można to stwierdzić doświadczalnie. Moglibyśmy więc napisać

$$H = kNi. \tag{17.25}$$


Rys. 17.12. Pole magnetyczne solenoidu

Jak teoretycznie można wyliczyć, współczynnik $k = 4\pi$, jeżeli i wyrażamy w jednostkach EM, zaś $k = \frac{4}{10}\pi$, jeżeli i jest wyrażone w amperach. A więc na natężenie pola wewnątrz solenoidu będziemy mieli wzór

$$H = 4\pi Ni \text{ j. EM albo } H = \frac{4}{10}\pi Ni \text{ (} i \text{ w amperach).} \tag{17.26}$$

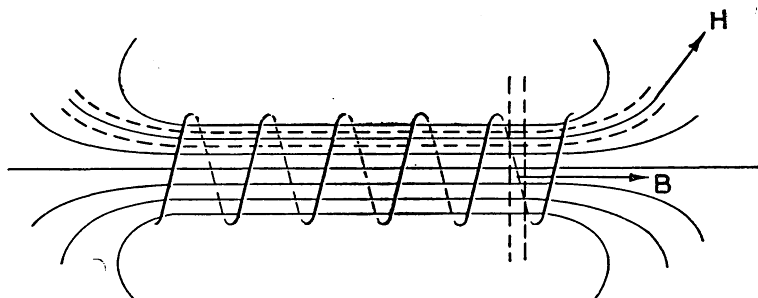
W obu wypadkach otrzymujemy H w erstedach.

17.9. Ciała w polu magnetycznym. Pole magnetyczne zmienia własności ciał, niektórych w stopniu słabym, innych — bardzo znacznie. Ażeby zdać sobie sprawę z tych zmian, wyobraźmy sobie solenoid zanurzony całkowicie w jakimś środowisku. Po przepuszczeniu przezeń prądu w środowisku tym wytwarza się pole magnetyczne. Wyobraźmy sobie teraz w tym środowisku wąski a długi kanalik tak wycięty, aby linia natężenia magnetycznego była jego osią. Siła działająca w tym kanaliku na biegun magnetyczny jednostkowy określi nam natę-

żenie pola magnetycznego (rys. 17.13). Możemy ten kanalik zwężać nieograniczenie, siła wskutek tego nie ulegnie zmianie. Natężenie pola będzie stale określone wzorem

$$H = 4\pi Ni. \tag{17.27}$$

Weźmy teraz pod uwagę szczelinę wyciętą w środowisku przez dwie bardzo bliskie siebie płaszczyzny poprowadzone normalnie do linii magnetycznego natężenia. Jak się okazuje, siła działająca w takiej szczelinie na biegun jednostkowy będzie nieco inna niż w kanaliku podłużnym. W większości ciał różnica



Rys. 17.13. Natężenie pola wyznaczone jest przez siłę działającą na biegun jednostkowy w kanaliku podłużnym, indukcja — przez siłę działającą na takiż biegun w szczelinie poprzecznej

ta jest niewielka, lecz w przypadku trzech metali: żelaza, niklu i kobaltu — bardzo duża. Oznaczamy wartość tej siły w szczelinie poprzecznej literą B. Jest to wektor, zwany indukcją magnetyczną. Linie styczne w każdym punkcie pola do kierunku tego wektora nazywamy liniami indukcji. W większości ciał wektor B ma ten sam kierunek co H, a jego wartość jest proporcjonalna do H. Możemy więc napisać

$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}.} \tag{17.28}$$

Współczynnik μ nazywamy przenikalnością magnetyczną danego środowiska. Dla próżni lub powietrza $\vec{B} = \vec{H}$, a więc przenikalność magnetyczna próżni, którą zwykle oznacza się μ_0, równa się jedności (w układzie EM).

Jednostką indukcji jest gaus (Gs). Jest to indukcja w takim punkcie środowiska, w którym siła wywierana na biegun jednostkowy w szczelinie normalnej do linii magnetycznego natężenia równa się jednej dynie.

Ciała, dla których μ jest większe od jedności (bardzo nieznacznie) i stałe nazywamy ciałami paramagnetycznymi. Ciała, dla których μ jest mniejsze od jedności, nazywamy ciałami diamagnetycznymi. Gdy pręcik AB z ciała paramagnetycznego zawiesimy między biegunami silnego magnesu, to ustawi się on osiowo,

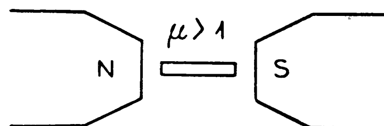
tak jak na rys. 17.14. Pręcik z ciała diamagnetycznego ustawi się równikowo jak na rys. 17.15. Poniższa tabela podaje wartości μ dla ciał paramagnetycznych i diamagnetycznych.

Tabela 17.1

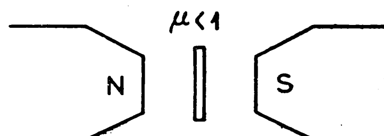
Przenikalność magnetyczna

Ciała paramagnetyczne	μ	Ciała diamagnetyczne	μ
Glin (18°C)	1,000 013	Bizmut (18°C)	0,999 824
Chrom (18°C)	1,000 315	Cynk (18°C)	0,999 986
Mangan (18°C)	1,001 021	Miedź (18°C)	0,999 991
Tlen ciekły	1,004 082	Woda (18°C)	0,999 999
Tlen (1 Atm, 15°C)	1,000 001	Argon (1 Atm, 0°C)	0,999 990

Istnieje kilka metali, które pod względem swego zachowania różnią się wybitnie tak od ciał paramagnetycznych, jak i od diamagnetycznych. Są to: żelazo, nikiel, kobalt. Najwybitniejszym przedstawicielem ich jest żelazo. Dla żelaza przenikalność magnetyczna μ nie ma w ogóle wartości stałej, jest zależna od natę-



Rys. 17.14. Ustawianie się pręcika z ciała paramagnetycznego w polu magnetycznym



Rys. 17.15. Ustawianie się pręcika z ciała diamagnetycznego w polu magnetycznym

żenia pola i osiąga bardzo wielkie wartości. Ilustruje to tabela 17.2. Zatem indukcja B nie jest proporcjonalna do H. Przy niewielkich wartościach H indukcja B rośnie szybko ze wzrostem H, lecz przy dalszym powiększaniu się H rośnie coraz wolniej dążąc do pewnej granicznej wartości.

Tabela 17.2

Wartości przenikalności magnetycznej μ oraz indukcji B dla żelaza elektrolitycznego

H w erstedach	0,5	1	5	50	100	500	1000	3000	4500
μ	15000	10240	2894	342	180,5	43,3	22,6	8,2	5,8
B w gausach	500	10240	14470	17100	18050	21670	22600	24630	26150

Ciała mające wymienione wyżej własności nazywamy ciałami ferromagnetycznymi.

Przenikalność magnetyczna tak ciał ferromagnetycznych, jak i paramagnetycznych zależy od temperatury.

Iloczyn BS, indukcji przez pole danej powierzchni S normalnej do linii indukcji, nazywamy strumieniem indukcji przez powierzchnię S. Oznacza się zwykle tę wielkość literą Φ. Zatem

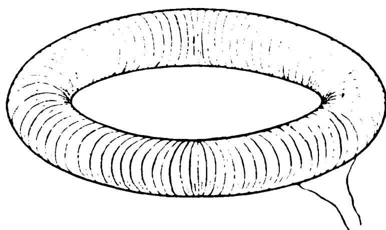
$$\Phi = BS. \tag{17.29}$$

Jednostką strumienia indukcji magnetycznej jest makswel (Mx). Jest to strumień indukcji magnetycznej przez powierzchnię o polu 1 cm^2, gdy indukcja normalna do tej powierzchni równa się 1 gausowi.

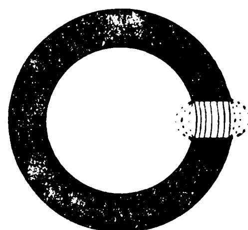
Gdy zrobimy z żelaza pierścień o przekroju S, nawiniemy nań drut izolowany i przepuścimy prąd (rys. 17.16), który wytworzy wewnątrz powstałego kołowego solenoidu pole magnetyczne o natężeniu H, wówczas w żelazie wytworzy się potężny strumień indukcji

$$BS = \mu HS. \tag{17.30}$$

Linie indukcji tworzą zawsze obwody zamknięte i strumień indukcji wzdłuż wiązki, której pobocznicę tworzą linie indukcji, jest stały. Jeżeli w zamkniętym



Rys. 17.16. Magnesowanie zamkniętego pierścienia żelaznego



Rys. 17.17. Strumień indukcji w szczelinie w pierścieniu żelaznym namagnesowanym

rdzeniu żelaznym zrobimy wąziutką poprzeczną szczelinę, to przez tę szczelinę będzie przechodził ten sam strumień indukcji (rys. 17.17). Możemy napisać w tym przypadku

$$\mu H_1 S = \mu_0 H_2 S, \tag{17.31}$$

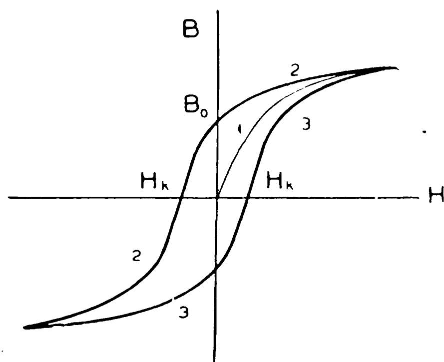
gdzie μ oznacza przenikalność magnetyczną żelaza, a μ_0 — przenikalność magnetyczną powietrza. Otrzymamy stąd

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{\mu}{\mu_0}. \tag{17.32}$$

Natężenia pola będą odwrotnie proporcjonalne do przenikalności magnetycznej środowisk. Ponieważ powietrze ma kilka tysięcy razy mniejszą przenikalność magnetyczną niż żelazo, zatem natężenie pola w powietrzu będzie tyleż razy większe niż w żelazie (w rzeczywistości przekrój wiązki w powietrzu jest większy niż w żelazie, a więc wzrost natężenia pola będzie nieco mniejszy, niż wskazuje równanie 17.32).

Taki obwód magnetyczny z żelaza, na którym nawinięty jest drut izolowany, z mniejszą lub większą szczeliną, stanowi tzw. elektromagnes, narzędzie używane w technice i praktyce nadzwyczaj często. Wytwarza on w szczelinie między swymi biegunami bardzo silne pole magnetyczne. Pole to znika po przerwaniu prądu.

Indukcja w żelazie zależy nie tylko od chwilowej wartości natężenia pola H, lecz również od tego, w jakim polu znajdowało się żelazo poprzednio. Jeżeli zrobimy z żelaza obwód zamknięty, nawiniemy na ten rdzeń pewną liczbę zwojów drutu i przepuścimy prąd, którego natężenie będziemy powiększali wytwarzając w taki sposób rosnące natężenie pola, to otrzymamy wzrost indukcji, którego przebieg przedstawia krzywa *1* na rys. 17. 18. Jeżeli po osiągnięciu stanu nasycenia zaczniemy osłabiać prąd, to indukcja zacznie się zmniejszać, lecz wolniej niż przedtem wzrastała. Przebieg zmniejszania się indukcji daje krzywa *2*. Gdy pole zniknie zupełnie, indukcja będzie jeszcze istnieć w dalszym ciągu. Wartość indukcji B_0 utrzymującej się w żelazie po sprowadzeniu pola H do zera nazywamy pozostałością magnetyczną. Pozostałość magnetyczna tzw. miękkiego żelaza jest niewielka, a pewnych gatunków stali bardzo duża. Dzięki niej to właśnie kawałek stali pozostaje trwałym magnesem.



Rys. 17.18. Zmiana indukcji w żelazie przy zmianie natężenia pola

Jeżeli teraz zmienimy kierunek prądu na przeciwny, a zatem i kierunek natężenia pola H, wówczas indukcja B zacznie się dalej zmniejszać i przy pewnej wartości $H = H_k$ jej wartość spadnie do zera. Tę wartość H_k potrzebną do zniszczenia indukcji nazywamy koercją żelaza. Przy dalszym wzroście natężenia pola H skierowanego w przeciwną stronę znowu żelazo dochodzi do stanu nasycenia. Przy polu magnetycznym zmiennym, zmieniającym swój kierunek i wielkość, przebieg indukcji dają krzywe *3* i *2* tworzące pętlę zamkniętą, tzw. pętlę histerezy. Pole zawarte wewnątrz pętli histerezy jest miarą energii zużytej na przemagnesowanie żelaza.

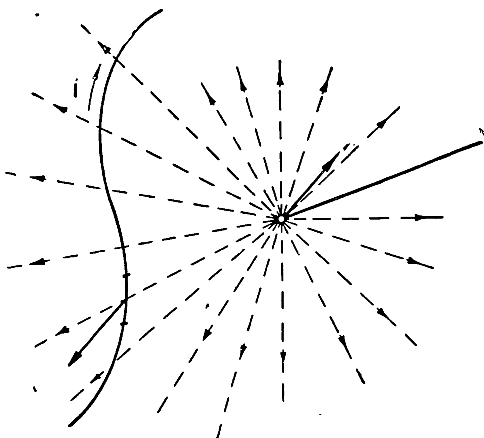
Zupełnie podobne właściwości jak żelazo wykazują również nikiel, kobalt oraz niektóre stopy metali niemagnetycznych, jak np. stopy Heuslera składające się z miedzi, manganu oraz pewnej niewielkiej ilości glinu względnie cyny lub antymonu. Stopy chromu z tellurem wykazują podobne właściwości.

Po przekroczeniu pewnej określonej temperatury wszystkie te metale przestają być ferromagnetyczne i stają się słabo paramagnetyczne. Dla żelaza ta temperatura wynosi 758°C, dla kobaltu — 1137°C, dla niklu — 360°C. Temperaturę tę nazywamy punktem Curie.

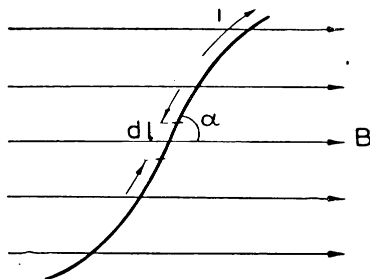
17.10. Siły wywierane w polu magnetycznym na przewodnik, w którym płynie prąd elektryczny. Jak o tym już poprzednio mówiliśmy, prąd płynący w przewodniku wywiera na biegun magnetyczny punktowy siłę, której wielkość daje wzór Biota i Savarta. Zgodnie z trzecią zasadą dynamiki na każdy element przewodnika musi działać skierowana przeciwnie siła tej samej wielkości (rys. 17.19):

$$dF = \frac{mi\,dl\sin\alpha}{r^2}. \tag{17.33}$$

Za przykładem Faradaya możemy uważać, że to pole magnetyczne wywiera na elementy prądu pewną siłę, że działanie bieguna na element prądu przenosi się



Rys. 17. 19. Siła wywierana przez biegun magnetyczny na element prądu



Rys. 17. 20. Siła wywierana na element prądu w polu magnetycznym

za pośrednictwem środowiska, w którym znajdują się te ciała. Natężenie pola magnetycznego w odległości r od bieguna ma wielkość

$$H = \frac{m}{\mu r^2}.$$

Zatem

$$\frac{m}{r^2} = \mu H.$$

Wstawiając tę wartość na $\frac{m}{r^2}$ do wzoru (17.33) na dF otrzymamy

$$dF = \mu Hi\,dl\sin\alpha.$$

Lecz $\mu H = B$, zatem możemy napisać

$$\boxed{dF = Bi\,dl\sin\alpha.} \tag{17.34}$$

Możemy więc powiedzieć, że zawsze ilekroć przewodnik przewodzący prąd znajduje się w polu magnetycznym, na każdy element długości dl tego przewodnika działa siła określona wzorem (17.34). Siła ta jest umiejscowiona w prostej prostopadłej do płaszczyzny przeprowadzonej przez dl i B. Zwrot zaś tej siły określa podobna do poprzedniej (patrz 17.2) reguła pływaka. Pływak płynący głową naprzód w kierunku prądu i patrzący w kierunku pola magnetycznego wskaże lewą ręką zwrot tej siły. W przypadku przedstawionym na rys. 17.20 zwrot siły będzie skierowany od czytelnika pod płaszczyznę rysunku.

Jeżeli natężenie prądu i wyrazimy w amperach, to

$$dF\,(\text{dyn}) = \frac{1}{10}\, Bi\, dl \sin a. \tag{17.35}$$

W powietrzu $B = H$, więc można wtedy napisać wzory:

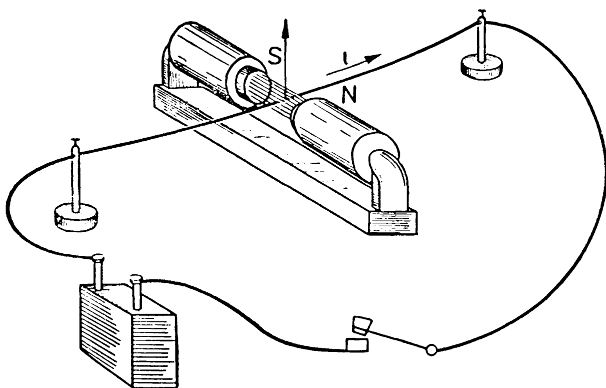
$$dF = Hi\, dl \sin \alpha \qquad (i \text{ w j. EM}), \tag{17.36}$$

względnie

$$dF = \frac{1}{10}\, Hi\, dl \sin a \qquad (i \text{ w amperach}). \tag{17.37}$$

W przypadku gdy przewodnik jest sztywny, można układ sił przyłożonych do poszczególnych jego elementów sprowadzić do jednej siły wypadkowej lub do pary sił.

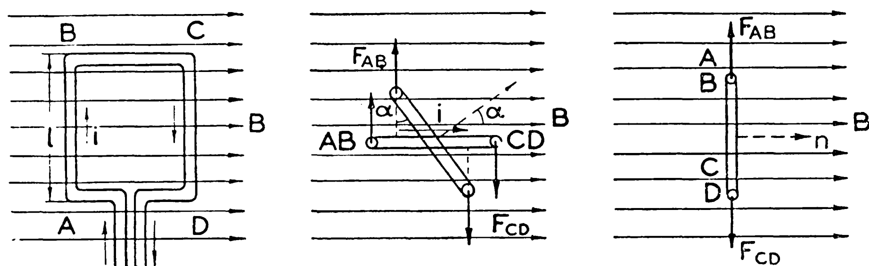
Łatwo doświadczeniem sprawdzić, że na przewodnik, w którym płynie prąd, działa w polu magnetycznym siła prostopadła do kierunku przewodnika i do kierunku linij pola. Umieśćmy wiotki drut między biegunami silnego elektromagnesu (rys. 17.21). Gdy przepuścimy przez ten drut prąd, zostanie on wyrzucony spomiędzy biegunów elektromagnesu w kierunku wskazanym strzałką, tj. w kierunku prostopadłym tak do kierunku prądu, jak i do kierunku linij pola magnetycznego.



Rys. 17.21. Drut przy przepuszczeniu prądu doznaje gwałtownego wychylenia w kierunku prostopadłym do kierunku pola i drutu

17.11. Siły wywierane w jednorodnym polu magnetycznym na przewodnik w kształcie sztywnego prostokąta. Weźmy pod uwagę sztywny prostokąt z drutu, w którym płynie prąd elektryczny o natężeniu i (rys. 17.22). Umieść-

my go w polu magnetycznym jednorodnym o natężeniu H w jakimkolwiek środowisku o przenikalności magnetycznej μ tak, aby płaszczyzna tego obwodu była



Rys. 17.22. Siły wywierane w polu magnetycznym na ramkę prostokątną, opływaną przez prąd

równoległa do linij natężenia pola. Według wzoru (17.34) na każdy element długości drutu dl działa siła

$$dF = Bi\, dl \sin \alpha.$$

Na boki AD i BC ramki nie będą działały żadne siły, ponieważ są one równoległe do linij pola, zatem $\sin \alpha = 0$. Siła działająca na każdy element boku AB będzie miała wartość

$$dF = Bi\, dl, \tag{17.38}$$

ponieważ $\alpha = 90°$, $\sin \alpha = 1$. Siły te będą równoległe, zatem dadzą wypadkową równą ich sumie, przyłożoną do środka tego boku. Jej wartość da wzór

$$F_{AB} = Bi\, dl_1 + Bi\, dl_2 + \ldots + Bi\, dl_n =$$

$$= Bi(dl_1 + dl_2 + \ldots + dl_n) = Bil$$

albo

$$F_{AB} = \mu Hil, \tag{17.39}$$

gdzie l oznacza długość boku AB. Zwrot jej łatwo stwierdzić za pomocą reguły kierunkowej.

Na bok CD będzie działać siła takiej samej wielkości, ale o zwrocie przeciwnym. Te dwie siły tworzą parę o momencie

$$M_p = \mu Hil \cdot BC. \tag{17.40}$$

Lecz iloczyn $l \cdot BC$ daje wielkość pola obwodu. Zatem na moment obrotowy pary sił możemy napisać wzór:

$$M_p = BiS. \tag{17.41}$$

Pod działaniem tej pary sił obwód zacznie się obracać. Gdy normalna do jego płaszczyzny tworzy z kierunkiem pola kąt α, wówczas moment pary będzie (rys. 17.22)

$$Bil \cdot BC \sin \alpha = BiS \sin \alpha. \tag{17.42}$$

W powietrzu

$$M_p = HiS \sin \alpha. \tag{17.43}$$

Jeżeli porównamy ten ostatni wzór ze wzorem na moment dynamiczny pary działającej na magnes o momencie magnetycznym M_m (wzór 16.11)

$$M_p = M_m H \sin \alpha, \tag{17.44}$$

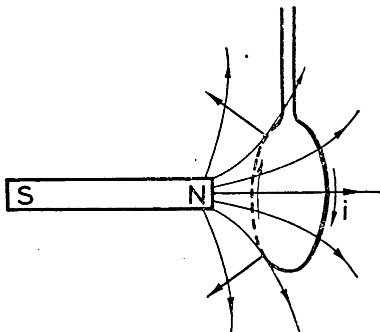
to widać, że obwód zachowuje się jak magnes o momencie magnetycznym

$$M_m = iS. \tag{17.45}$$

Moment magnetyczny jest skierowany prostopadle do płaszczyzny obwodu.

Gdy ramka ustawi się płaszczyzną prostopadle do linij pola, moment obrotowy pary M_p zniknie, gdyż wtedy $\sin \alpha = 0$. Lecz siły będą nadal działały i to wtedy nie tylko na boki AB i CD, ale również na BC i AD. Jak łatwo stwierdzić, siły te będą się starały rozciągnąć obwód. Jeżeli drut jest wiotki, to siły te istotnie go rozciągną. Pod ich działaniem przybierze on kształt koła.

Gdy obwód prądu np. kołowy znajduje się w polu niejednorodnym, np. w pobliżu bieguna magnesu stałego (rys. 17.23), to ponieważ siła działająca na każdy element obwodu jest normalna do linij pola, łatwo stwierdzić, że przy kierunku prądu wskazanym na rysunku będą działać siły wciągające obwód w pole silniejsze, tam gdzie linie przebiegają gęściej. Przy kierunku prądu przeciwnym obwód będzie odpychany od magnesu.



Rys. 17.23. Obwód opływany przez prąd jest wciągany do miejsca, gdzie pole magnetyczne jest silniejsze

Można we wszystkich przypadkach określić zachowanie się obwodu za pomocą reguły Maxwella: obwód prądu w polu magnetycznym stara się ustawić tak, żeby strumień indukcji objęty tym obwodem albo też liczba objętych linii pola stała się jak największa i przy tym, aby kierunek obiegu prądu był zgodny z obrotem prawoskrętnej śruby posuwającej się w kierunku pola.

Gdy zamiast pojedynczego obwodu weźmiemy cewkę prostokątną zawierającą N zwojów, na każdy z jej boków prostopadłych do linij pola będzie działać siła

$$F = NBil. \tag{17.46}$$

Moment obrotowy pary sił będzie

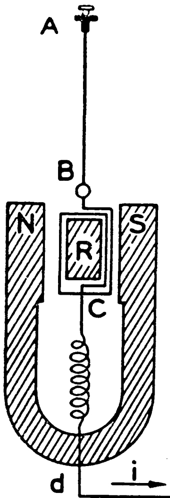
$$M_p = NBiS \sin \alpha. \tag{17.47}$$

Cewka będzie równoważna magnesowi o momencie magnetycznym

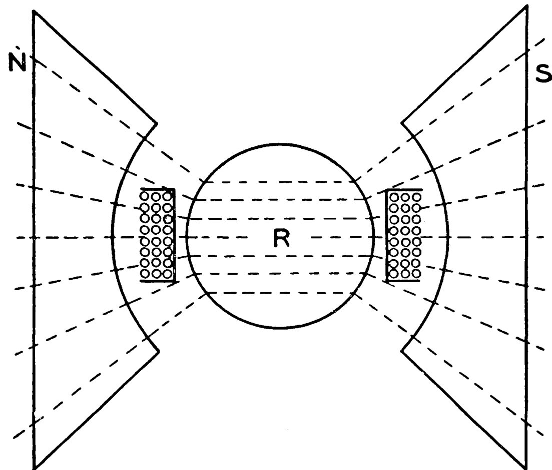
$$M_m = NiS. \tag{17.48}$$

We wszystkich tych wzorach należy używać jednostek elektromagnetycznych. Gdy się chce prąd wyrażać w amperach, należy dodać współczynnik $^1/_{10}$.

17.12. Galwanometr, amperomierz i woltomierz o ruchomej cewce. 1. G a l w a n o m e t r jest przyrządem do mierzenia natężenia bardzo słabych prądów elektrycznych. Ma on budowę następującą: pomiędzy biegunami silnego



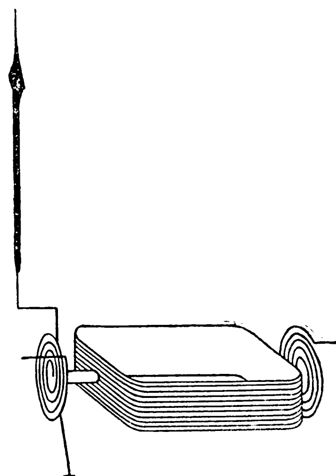
Rys. 17.24. Galwanometr zwierciadłowy



Rys. 17.25. Pole magnetyczne między biegunami magnesu i walcem żelaznym wewnątrz cewki

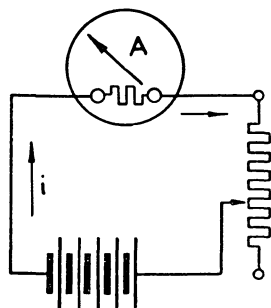
magnesu NS (rys. 17.24) o nasadkach biegunowych kształtu wskazanego na rys. 17.25. na cienkiej wstążeczce z brązu fosforowego AB wisi cewka z cienkiego drutu izolowanego nawinięta na lekką prostokątną ramkę. Wstążeczka ta doprowadza prąd do cewki. Odprowadzany jest on drugą taką samą wstążeczką idącą ku dołowi albo wiotką spiralką z bardzo cienkiego drutu. Wewnątrz cewki znajduje się rdzeń R w postaci walca sporządzonego z miękkiego żelaza. Jego obecność powoduje wzmocnienie pola magnetycznego oraz zmienia przebieg linij. W wąskiej szczelinie między biegunami magnesu a rdzeniem pole jest bardzo silne, a jego linie biegną prostopadle do powierzchni walca (rys. 17.25). Stąd wynika ważna zaleta przyrządu. Gdy cewka obróci się o pewien kąt, moment pary sił działających na cewkę nie ulega zmianie. Moment ten zależy tylko od natężenia prądu i jest do niego proporcjonalny. Z tego powodu kąt skręcenia cewki jest proporcjonalny do natężenia prądu.

Ze względu na delikatność urządzenia żadnej wskazówki nie można przyczepić do cewki. Aby odczytać kąt, o który się ona wykręca, umiszceza się na niej małe zwierciadełko, na które skierowuje się promień światła. Po odbiciu się promień daje znak świetlny na skali z matowego szkła lub celuloidu umieszczonej naprzeciwko. Z przesunięcia tego znaku wnioskujemy o kącie obrotu, a więc i o natężeniu prądu. Galwanometr trzeba zwykle cechować za pomocą prądu o znanym natężeniu.



Rys. 17.26. Cewka amperomierza z wskazówką utrzymywana jest w położeniu równowagi przez dwie delikatne sprężynki spiralne

2. Amperomierz tylko w szczegółach różni się od galwanometru. Obracająca się cewka jest umocowana na lekko obracającej się osi. Siły elektrodynamiczne działające na ramkę równoważą dwie spiralne włosowe sprężynki przymocowane do osi i jednocześnie doprowadzające prąd do cewki (rys. 17.26). Wskazówka metalowa połączona z ramką wskazuje na skali natężenie prądu w amperach lub innych jednostkach.



Rys. 17.27. Amperomierz jest zawsze bocznikowany

Amperomierz ma wykazać natężenie prądu płynącego w obwodzie, zatem całkowity prąd musi w zasadzie przepływać przez przyrząd (rys. 17.27). Ponieważ cewka jest z reguły z cienkiego drutu, któryby nie wytrzymał silnego prądu zawsze dołącza się równolegle do cewki bocznik, przewód o niewielkim, lecz stałym oporze. Zależnie od wartości oporu bocznika ten sam przyrząd może mieć różne czułości i różne zakresy. Przy kilku różnych bocznikach, które możemy włączać wedle naszej woli, ten sam przyrząd może służyć do pomiarów prądów o różnych natężeniach.

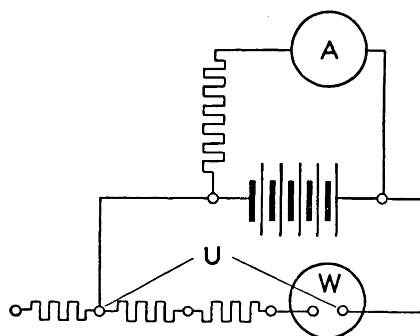
3. Woltomierz. Każdy galwanometr i każdy amperomierz można przystosować do pomiarów napięcia. Opieramy się tu na prawie Ohma: jeżeli zmierzymy natężenie prądu płynącego przez przewodnik o znanym oporze R, to napięcie panujące na końcach oporu wynosi

$$U = Ri. \tag{17.49}$$

Napięcie przy stałym oporze R jest proporcjonalne do natężenia prądu.

Chcąc zmierzyć napięcie nieznane np. między biegunami baterii, łączymy je bardzo dużym oporem R, włączając w szereg czuły przyrząd do mierzenia

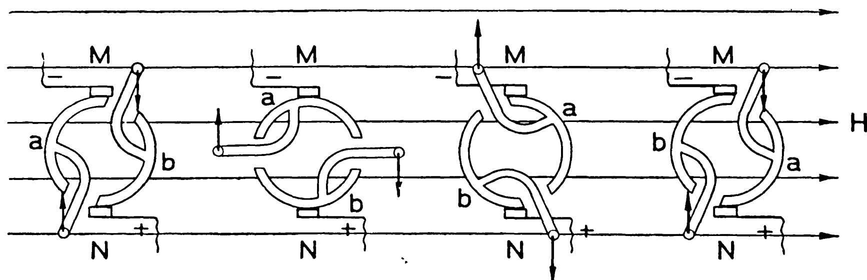
prądu (rys. 17. 28). Znając natężenie prądu i opór, możemy z równania (17.49) wyliczyć napięcie U (pod R należy rozumieć dołączony opór oraz opór samego przyrządu). Na skali można zrobić podziałkę w woltach. Woltomierz przyłączamy wprost do punktów, między którymi chcemy zmierzyć napięcie. Nie obniża on w sposób widoczny napięcia źródła prądu, gdyż jego opór jest zwykle bardzo duży. W dobrych przyrządach wynosi często kilkaset tysięcy omów. Oczywiście nie można go używać do pomiarów elektrostatycznych, gdyż musi on czerpać prąd, chociaż bardzo słaby.



Rys. 17.28. Woltomierz

Włączając w szereg z amperomierzem różne opory można używać go jako woltomierza do pomiaru rozmaitych napięć, tak niskich, jak i wysokich. Im wyższe napięcie, które chcemy zmierzyć, tym większy musi być opór. Woltomierze często bywają budowane na kilka lub więcej zakresów.

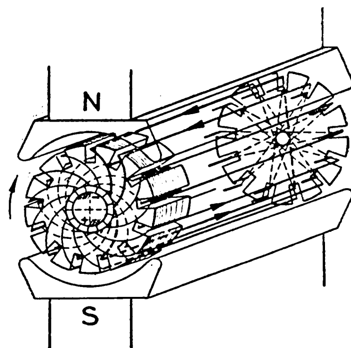
17.13. Zasada silnika elektrycznego. Jak wyjaśniliśmy poprzednio, na obwód lub cewkę znajdującą się w polu magnetycznym jednorodnym działa para sił wywołująca ich obrót. Nie trudno jest zrobić urządzenie powodujące trwały obrót obwodu w polu magnetycznym. Połączmy końce obwodu lub cewki z osadzonymi na osi połówkami *a* i *b* pierścienia metalowego odizolowanymi jedna



Rys. 17.29. Trwały obrót w polu magnetycznym

od drugiej. Tworzą one tzw. komutator prądu (rys. 17.29). Dwie sprężynki metalowe M i N zwane szczotkami doprowadzają prąd z jakiegokolwiek źródła np. z baterii galwanicznej. Na obwód czy też cewkę działać będzie para sił, jak wskazano na rys. 17.29. Spowoduje ona obrót cewki prawie o 180°. Rozpędzona cewka obróci się nieco dalej, lecz wtedy sprężynka M zetknie się z połówką b pierścienia, a N z a. Prąd w cewce zmieni kierunek na przeciwny, ale względem pola magne-

tycznego będzie miał ten sam kierunek jak na początku. Para sił będzie powodować dalszy obrót cewki. Cewka zacznie szybko wirować dzięki automatycznemu przełączaniu w niej kierunku prądu przez przełącznik przy każdym obrocie o 180°. Mamy tu zasadę silnika elektrycznego.

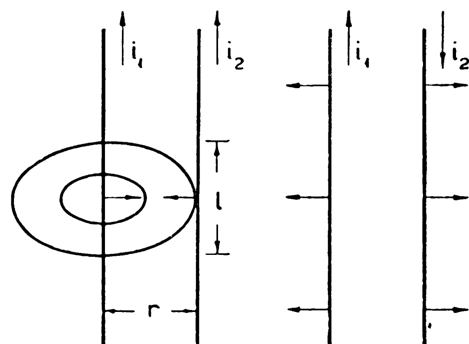


Rys. 17.30. Silnik elektryczny

W silnikach używanych w technice układa się zwykle wiele cewek na powierzchni walca żelaznego znajdującego się między biegunami silnego elektromagnesu (rys. 17.30). Połączone są one tak, iż prądy w drutach znajdujących się naprzeciwko biegunów płyną w przeciwnych kierunkach. Na przewody działają siły elektrodynamiczne dające wypadkową parę sił powodującą obrót drutów wraz z bębnem. Komutator składający się z wielu sektorów, przedzielonych nawzajem izolacją, zwany również kolektorem, wciąż przełącza prąd, tak że płynie on stale jednakowo skierowany względem pola magnetycznego.

17.14. Siły wywierane przez przewodniki prądu na przewodniki prądu. Gdy przez drut prostoliniowy nieskończenie długi przepuścimy prąd o natężeniu i_1, to wokół powstanie pole magnetyczne o natężeniu

$$H = \frac{2i_1}{r}. \qquad (17.50)$$



Rys. 17.31. Przyciąganie się względnie odpychanie drutów, w których płyną prądy elektryczne

Gdy w odległości r umieścimy drugi drut równoległy prostoliniowy, w którym płynie prąd i_2, to jak łatwo obliczyć, na część tego drutu długości l będzie działać siła

$$F_1 = \mu H i_2 l. \qquad (17.51)$$

Podstawiając wartość (17.50) na H otrzymamy

$$F_1 = \frac{2\mu i_1 i_2}{r}\, l. \qquad (17.52)$$

Oczywiście taka sama siła działać będzie na każdy odcinek pierwszego drutu o długości l. Przy prądach płynących w tym samym kierunku, jak łatwo stwierdzić z reguły kierunkowej, siły te będą przyciągać druty ku sobie. Przy prądach skierowanych przeciwnie druty będą się odpychać (rys. 17.31).

Podobnie dwie cewki przewodzące prąd w tym samym kierunku przyciągają się, przewodzące prąd w kierunkach przeciwnych — odpychają się.

Zadania

17.1. Pod bardzo długim prostym drutem przeciągniętym w płaszczyźnie południka magnetycznego ustawiono małą igiełkę magnetyczną w odległości r od drutu. O jaki kąt α odchyli się igiełka po przepuszczeniu prądu i amperów, jeżeli składowa pozioma pola magnetycznego ziemskiego jest H_0?

O d p o w i e d ź: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{0{,}2i}{rH_0}$.

17.2. Ile amperów wynosi natężenie prądu i, jeżeli igła ta odchyli się o 45°?

O d p o w i e d ź: $i = 5rH_0$.

17.3. Jakie jest natężenie pola magnetycznego w środku obwodu kołowego o promieniu 10 cm, przewodzącego prąd 5 amperów?

O d p o w i e d ź: 0,314 Oe.

17.4. W obwodzie kołowym o promieniu R płynie prąd i A. Jakie jest natężenie pola H na osi tego obwodu w odległości x od jego płaszczyzny?

O d p o w i e d ź: $H = \frac{0{,}2\pi R^2 i}{\sqrt{(R^2+x^2)^3}}$.

17.5. Obwód prostokątny o bokach a i b jest opływany przez prąd o natężeniu i A. Jakie jest natężenie pola magnetycznego w środku tego prostokąta?

O d p o w i e d ź: $H = 0{,}8i \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$.

√ **17.6.** Na obręczy busoli stycznych o promieniu 15 cm nawiniętych jest 10 zwojów drutu. Jakie jest natężenie prądu, który przepuszczony przez uzwojenie busoli daje odchylenie igły o 40°25′ (składowa pozioma natężenia pola ziemskiego $H_0 = 0{,}18$ Oe)?

O d p o w i e d ź: 0,366 A.

17.7. Jakie jest natężenie pola magnetycznego w środku prostego solenoidu długości 80 cm zawierającego 1600 zwojów drutu, przez który przepuszczono prąd 3 A?

O d p o w i e d ź: 75,26 Oe.

17.8. Pręt sztywny długości 10 cm umieszczony jest w powietrzu w polu magnetycznym 10 000 Oe prostopadle do linij pola. Jaka siła będzie nań działać, gdy przepuścimy przezeń prąd 20 A?

O d p o w i e d ź: $F = 2\cdot 10^5$ dyn = 2N = 0,204 kG.

17.9. Ramka prostokątna z drutu o rozmiarach 10 cm × 20 cm ustawiona jest w polu magnetycznym o natężeniu 5000 Oe, tak że jej płaszczyzna jest równoległa do linij pola. Jaki moment dynamiczny będzie na nią działał, gdy przepuścimy przez nią prąd 10 A?

O d p o w i e d ź: $M_p = 10^6$ dyn · cm.

17.10. Jaki moment musiałby mieć magnes równoważny temu obwodowi?

O d p o w i e d ź: Magnes o momencie $M_m = 200$ j. EM.

√ **17.11.** Cewka amperomierza nawinięta jest na ramce o wymiarach 2 cm × 3 cm. Zawiera 200 zwojów cienkiego drutu i znajduje się w polu magnetycznym o natężeniu 1000 Oe. Linie pola biegną prostopadle do dwóch dłuższych boków ramki. Jakie siły działają na każdy z dwóch dłuższych boków cewki przy przepuszczeniu przez nią prądu 10 mA i jaki jest moment dynamiczny starający się ją obrócić?

O d p o w i e d ź: $F = 600$ dyn; $M_p = 1200$ dyn · cm.

17.12. Woltomierz razem z oporem włączonym w szereg z cewką ma opór 50 000 Ω i skalę do 150 V. Jaki trzeba by dołączyć opór, aby jego skalę powiększyć do 300 V (tzn. aby największe wychylenie jego odpowiadało napięciu 300 V)?

Odpowiedź: Cewka przy całkowitym wychyleniu przepuszcza prąd 3 mA. Należy dołączyć taki opór, aby woltomierz przepuszczał przy napięciu 300 V taki sam prąd. Zatem całkowity opór powinien spełniać warunek $\frac{300}{R} = 0{,}003$ A. Skąd $R = 100\,000$ Ω. Należy dołączyć szeregowo opór 50 000 Ω.

17.13. Z jaką siłą przyciągany będzie 1 metr bieżący każdego z dwóch drutów równoległych w powietrzu znajdujących się w odległości 1 m, w których płyną zgodnie skierowane prądy, każdy o natężeniu 1 A.

Odpowiedź: $F = 0{,}02$ dyny $= 2 \cdot 10^{-7}$ N.

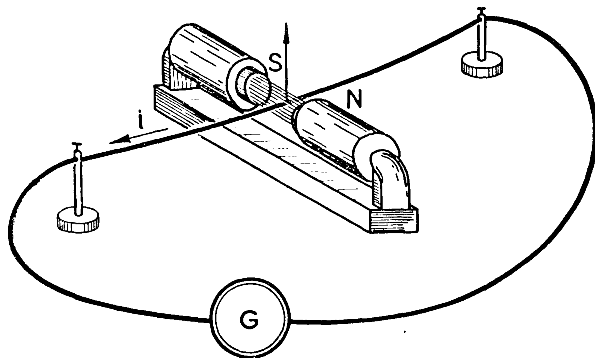
Pytania do powtórzenia materiału

1. Jaka jest treść prawa Biota i Savarta?
2. Jakie jest natężenie pola w sąsiedztwie przewodnika nieskończenie długiego, w którym płynie prąd?
3. Jaka jest siła działająca na biegun magnetyczny w środku przewodnika kołowego opływanego przez prąd? Jakie jest natężenie pola?
4. Na czym oparty jest elektromagnetyczny układ jednostek elektrycznych?
5. W jaki sposób można wyznaczyć natężenie prądu za pomocą busoli stycznych?
6. Jakie są elektromagnetyczne jednostki natężenia prądu, ładunku, napięcia, oporu?
7. Jaki jest stosunek praktycznych i elektrostatycznych jednostek do elektromagnetycznych?
8. Jakie jest natężenie pola magnetycznego wewnątrz solenoidu?
9. Jak się określa natężenie pola i indukcję magnetyczną w środowisku materialnym? Jaki jest związek między tymi wektorami?
10. Jakie własności mają ciała para, dia- i ferromagnetyczne?
11. Jaki jest stosunek natężenia pola magnetycznego w szczelinie powietrznej do natężenia pola w rdzeniu żelaznym w obwodzie magnetycznym?
12. Co nazywamy strumieniem indukcji magnetycznej przez daną powierzchnię? Jaka jest jednostka strumienia indukcji magnetycznej?
13. Jakie siły działają na odcinek przewodnika, w którym płynie prąd, w polu magnetycznym?
14. Jakie działanie wywiera pole magnetyczne jednorodne na przewodnik w kształcie prostokąta, w którym płynie prąd o danym natężeniu? pole niejednorodne?
15. Jaki moment magnetyczny ma obwód, w którym płynie prąd i? Jaki moment magnetyczny ma cewka o N zwojach przy prądzie i?
16. Jaka jest zasada budowy galwanometru, amperomierza, woltomierza?
17. Jaka jest zasada silnika elektrycznego?
18. Jakie są siły wywierane wzajemnie przez przewodniki, gdy w nich płynie prąd?

18. Indukcja elektromagnetyczna

18.1. Prądy indukcyjne. Siła elektromotoryczna indukcyjna. W poprzednim rozdziale zajmowaliśmy się działaniami magnetycznymi prądu elektrycznego. Wiemy już, że prąd elektryczny wywołuje powstanie pola magnetycznego. Faraday przez 9 lat myślał o odwróceniu tego zagadnienia: czy za pomocą pola magnetycznego można wytworzyć prąd elektryczny? W roku 1831 udało mu się odkryć zjawisko indukcji elektromagnetycznej.

W rozdziale 17.9 opisane było doświadczenie, w którym giętki drut umieszczony między biegunami silnego elektromagnesu w chwili przepuszczenia przez niego prądu zostaje wyrzucony w kierunku prostopadłym do linij pola i do kierunku prądu. Odwróćmy to doświadczenie: usuńmy baterię i zamiast niej włączmy do obwodu galwanometr. Poruszmy następnie drutem w kierunku poprzecznym do linij pola, np. ku górze (rys. 18.1). Galwanometr odchyli się. Przy ruchu drutu w przeciwnym kierunku galwanometr również się odchyli w przeciwnym kierunku. Najwidoczniej przy poruszaniu drutu w polu magnetycznym powstaje w drucie prąd. Nazywamy go prądem indukcyjnym. Musi więc podczas poruszania drutem powstawać w nim siła elektromotoryczna (będziemy ją dla skrócenia w dalszym ciągu oznaczać SEM), którą nazywamy podobnie siłą elektromotoryczną indukcyjną.



Rys. 18.1. Powstawanie prądu indukcyjnego przy ruchu drutu w polu magnetycznym

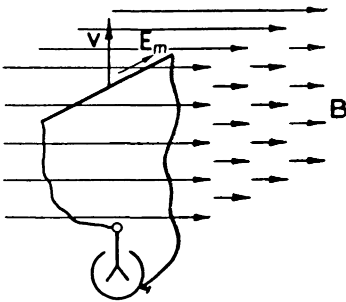
Nie trudno jest stwierdzić kierunek siły elektromotorycznej związanej z kierunkiem ruchu drutu i kierunkiem pola i ułożyć odpowiednią regułę kierunkową. Można ją sformułować w sposób następujący: jeżeli wyobrazimy sobie pływaka płynącego w kierunku r u c h u d r u t u (a więc w kierunku jego pręd-

kości v) i patrzącego w kierunku pola magnetycznego, to jego lewa ręka wskaże zwrot siły elektromotorycznej. Łącząc w szereg z czułym galwanometrem duży opór, otrzymamy bardzo czuły woltomierz, którego odchylenia będą wskazywać wielkość siły elektromotorycznej działającej w drucie. Jeszcze dokładniej zmierzylibyśmy siłę elektromotoryczną za pomocą czułego elektroskopu albo elektrometru. Oczywiście wykazałby on napięcie między końcami drutu (rys. 18.2). To właśnie napięcie wytworzone między końcami obwodu otwartego jest miarą siły elektromotorycznej pędzącej ładunki w drucie. Za pomocą tego rodzaju doświadczeń można by się przekonac, że wielkość SEM indukcyjnej powstającej przy ruchach drutu w polu magnetycznym w powietrzu jest proporcjonalna do indukcji B (względnie natężenia pola w tym przypadku, ponieważ $\mu = 1$), do długości drutu l i do prędkości v:

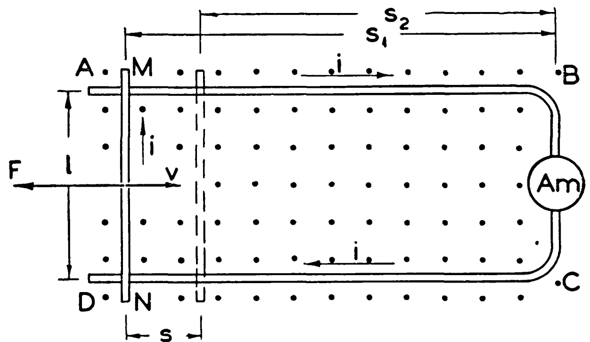
$$E_m \backsim Blv. \tag{18.1}$$

Trzeba by tylko wyznaczyć jeszcze współczynnik proporcjonalności.

Opierając się na zasadzie zachowania energii można wyprowadzić dokładny związek między wymienionymi wyżej wielkościami. Wykonajmy następujące



Rys. 18.2. Powstająca w poruszającym się prostopadle do linij pola magnetycznego drucie siła elektromagnetyczna indukcyjna wywołuje napięcie między końcami drutu



Rys. 18.3. Wzbudzona w poruszającym się drucie MN siła elektromagnetyczna wywołuje przepływ prądu

doświadczenie: umieśćmy prostokątną, otwartą z jednej strony ramkę z grubego drutu $ABCD$ (rys.18.3) w silnym jednostajnym polu magnetycznym o indukcji B, w jakimkolwiek środowisku o przenikalności magnetycznej μ, tak aby linie pola magnetycznego były prostopadłe do płaszczyzny tej ramki. Na rysunku więc będą one prostopadłe do płaszczyzny rysunku i skierowane poza płaszczyznę rysunku, a więc od czytelnika w dół. Amperomierz Am włączony w obwód wskazuje natężenie prądu. Poprzeczny drut MN o długości l ślizga się po bokach AB i DC poruszając się ruchem jednostajnym w prawo z prędkością v. Podczas jego ruchu amperomierz wykazuje prąd o natężeniu i. Skoro płynie prąd, to musi w drucie

powstawać siła elektromotoryczna indukcyjna E_m pędząc ładunki. Wykona ona w czasie Δt pracę, którą obliczyliśmy w 15. 11, wzór (15.56):

$$L = E_m \, i \, \Delta t. \tag{18.2}$$

Zamieni się ona w tym przypadku na ciepło. Według zasady zachowania energii praca ta musi być dostarczona układowi. Zastanowiwszy się nad tą sprawą nie trudno dojść do wniosku, że skoro w drucie MN płynie prąd, to pole magnetyczne musi nań wywierać siłę, której wielkość określa wzór

$$F = Bil. \tag{18.3}$$

Siła ta jest skierowana w lewo, a zatem przeciwdziała ruchowi drutu. Aby utrzymać ruch jednostajny odcinka MN, musimy tę siłę zrównoważyć siłą zewnętrzną tej samej wielkości (przy zaniedbaniu tarcia). Ta siła zewnętrzna wykona przy przesunięciu drutu o odcinek s pracę

$$L = Fs = Bilv \, \Delta t \tag{18.4}$$

(gdyż $s = v \, \Delta t$). Praca ta idzie w całości na pracę siły elektromotorycznej. Prace te muszą więc być równe

$$E_m \, i \, \Delta t = Bilv \, \Delta t. \tag{18.5}$$

Stąd otrzymujemy

$$E_m = Blv. \tag{18.6}$$

A więc współczynnik proporcjonalności równa się jedności, gdy indukcja jest wyrażona w gausach, l w cm i v w cm/sec. Otrzymujemy E_m w jednostkach elektromagnetycznych. Gdybyśmy chcieli wyrazić E_m w woltach, to ponieważ 1 j. EM napięcia $= 10^{-8}$ wolta, musielibyśmy napisać wzór

$$E_m = 10^{-8} Blv. \tag{18.7}$$

Gdy drut porusza się w kierunku tworzącym z kierunkiem linij magnetycznych kąt α, wówczas

$$E_m = Blv \sin \alpha. \tag{18.8}$$

Gdy przenikalność magnetyczna środowiska $\mu = 1$, wówczas otrzymamy wzory:

$$E_m(\text{j. EM}) = Hlv \text{ in } \alpha, \qquad E_m(\text{woltów}) = 10^{-8} \, Hlv \sin \alpha. \tag{18.9}$$

Możemy w inny sposób wyrazić zależności siły elektromotorycznej od występujących tu wielkości. Jeżeli odległość drutu MN od boku BC w pewnej chwili oznaczymy przez s_1, a w chwili późniejszej o Δt — przez s_2, to na prędkość możemy napisać

$$v = \frac{s_1 - s_2}{\Delta t}. \tag{18.10}$$

Zatem

$$E_m = B\frac{l(s_1 - s_2)}{\Delta t}. \tag{18.11}$$

Lecz iloczyn $ls_1 = S_1$ jest to pole obejmowane na początku przez drut $MNBC$, zaś iloczyn $ls_2 = S_2$ — takież pole w chwili o Δt późniejszej. Możemy więc napisać

$$E_m = \frac{BS_1 - BS_2}{\Delta t}. \tag{18.12}$$

BS_1 stanowi iloczyn strumienia indukcji przez powierzchnię S_1, a BS_2 — iloczyn strumienia indukcji przez powierzchnię S_2. Oznaczając

$$BS_1 = \Phi_1, \quad BS_2 = \Phi_2 \tag{18.13}$$

możemy napisać

$$E_m = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{18.14}$$

Gdy czas $\Delta t \to 0$, otrzymamy w granicy

$$E_m = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{18.15}$$

lub w woltach

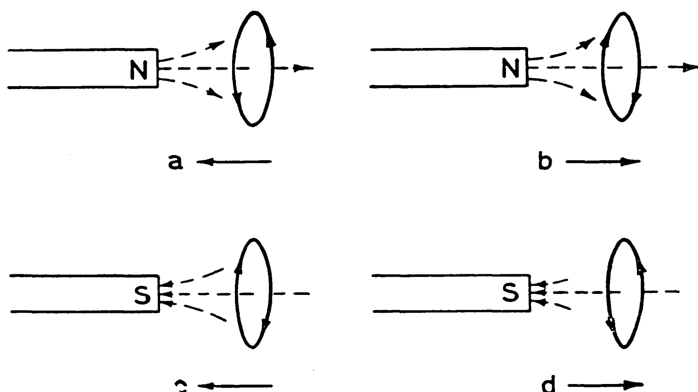
$$E_m = -10^{-8}\frac{d\Phi}{dt}. \tag{18.16}$$

Trzeba tu zwrócić uwagę, że przy takim kierunku SEM, jak w rozważanym przypadku, prąd krąży w obwodzie w kierunku zgodnym z obrotem wskazówek zegara dla obserwatora patrzącego w kierunku pola. Obrót w tym kierunku uważamy za dodatni, w przeciwną stronę — za ujemny. Wzór (18.15) daje nam od razu kierunek siły elektromotorycznej, zależnie od tego, czy przyrost strumienia indukcji jest dodatni, czy ujemny. W przypadku takim jak na rys. 18.3 objęty przez drut strumień indukcji zmniejsza się, przyrost jest ujemny, zatem E_m — dodatnie. Gdyby strumień indukcji powiększał się, $d\Phi$ byłoby dodatnie, E_m — ujemne, siła elektromotoryczna wywoływałaby ruch ładunków dodatnich w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

W opisanym wyżej doświadczeniu strumień indukcji Φ zmieniał się wskutek zmiany wielkości pola opasanego drutem. Lecz już Faraday stwierdził, że SEM indukcyjna powstaje również wtedy, gdy strumień indukcji objęty przez obwód zmienia się wskutek zmiany natężenia pola. Łatwo wykazać, że jeżeli do obwodu np. kołowego z drutu zbliżamy lub od niego oddalamy magnes sztabowy albo, na odwrót, obwód poruszamy względem magnesu, to podczas ruchu powstają w nim zawsze prądy indukcyjne. Można udowodnić, że we wszystkich przypadkach jest ważny wzór

$$E_m = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Rysunek 18.4 przedstawia możliwe tu przypadki: a) strumień indukcji wzrasta, $d\Phi > 0$, prąd indukcyjny okrąża linie indukcji w kierunku ujemnym; b) strumień



Rys. 18.4. Prądy indukcyjne powstające w obwodzie przy zmianie obejmowanego przezeń strumienia indukcji

indukcji maleje, $d\Phi < 0$, prąd okrąża linie indukcji w kierunku dodatnim. Na rysunku 18.4 c i d strzałki wskazują kierunki ruchu i odpowiednie kierunku prądu indukcyjnego.

Gdy zamiast pojedynczego obwodu zbliżamy cewkę złożoną z N jednakowych obwodów drutu izolowanego położonych bardzo blisko siebie, wtedy siły elektromotoryczne poszczególnych obwodów dodają się. Wypadkowa SEM będzie określona wzorem

$$E_m\,(\text{j. EM}) = -N\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{albo} \quad E_m\,(\text{woltów}) = -10^{-8}N\frac{d\Phi}{dt}. \tag{18.17}$$

Siła elektromotoryczna indukcyjna powstaje zawsze w obwodzie przy zmianie obejmowanego przez niego strumienia indukcji bez względu na to, czy obwód jest zamknięty, czy otwarty. Gdy obwód jest zamknięty, wywołuje ona prąd o natężeniu

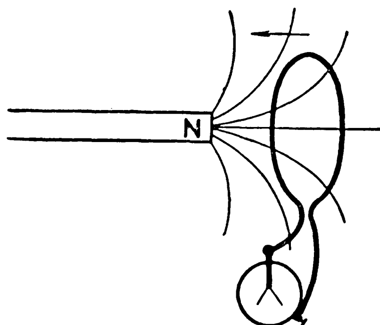
$$i = \frac{E_m}{R}, \tag{18.18}$$

gdzie R jest oporem obwodu. W przypadku, gdy obwód jest otwarty (rys. 18.5), wywołuje ona napięcie między jego końcami

$$U = E_m. \tag{18.19}$$

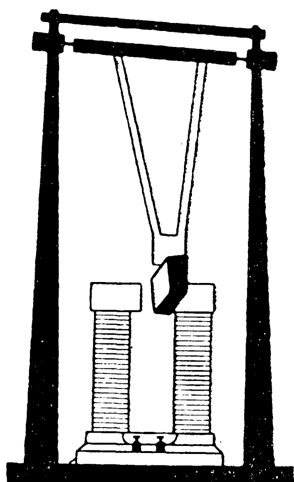
Mierząc to napięcie, jak to już omawialiśmy, znajdujemy wielkość siły elektromotorycznej.

Jak już poprzednio wyjaśniono, do wywołania prądu indukcyjnego konieczne jest wykonanie pewnej pracy dodatniej przeciwko siłom elektrodynamicznym. Siły te przeciwdziałają ruchowi, który powoduje powstanie prądu indukcyjnego. Regułę tę sformułował fizyk rosyjski Lenz w r. 1833. Można tę regułę, która wynika z zasady zachowania energii, uogólnić i wypowiedzieć w sposób następujący: kierunek prądu indukcyjnego jest zawsze taki, iż oddziaływanie między polem i wywołanym prądem indukcyjnym przeciwdziała zmianie, która ten prąd wywołała. W przypadku ruchu przewodnika oddziaływania te starają się zahamować ruch, w przypadku słabnięcia pola prąd indukcyjny stara się to pole podtrzymać, w przypadku wzrostu natężenia pola — pole to osłabić.



Rys. 18.5. W obwodzie otwartym siła elektromotoryczna wywołuje napięcie między jego końcami

18.2. Pole elektryczne wirowe. Prądy wirowe. Gdy obwód z drutu obejmuje strumień indukcji, który zmienia się w czasie, powstaje w nim prąd indukcyjny, co świadczy o powstaniu pola elektrycznego okrężnego, wirowego, którego linie są zamknięte. Gdybyśmy wyobrazili sobie, że opór obwodu rośnie coraz więcej, prąd indukcyjny byłby coraz słabszy, lecz siła elektromotoryczna nie uległaby zmianie. Jest ona związana z istnieniem pola wirowego elektrycznego. Spotykamy tu po raz pierwszy pole elektryczne, którego linie są zamknięte. Pole wirowe powstaje tak w przewodnikach, jak i w dielektrykach i w próżni. Pole to trwa tylko tak długo, jak długo zmienia się pole magnetyczne i związany z nim strumień indukcji.

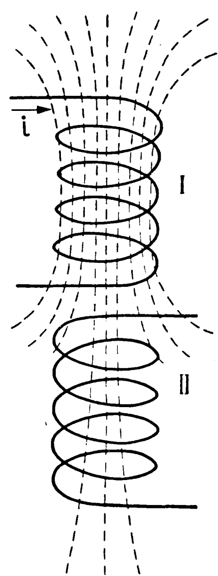

Rys. 18.6. Hamujące działanie prądów wirowych

Gdy tam, gdzie wytwarza się pole wirowe elektryczne, umieścimy jakiś przewodnik, np. blachę miedzianą, aluminiową, żelazną lub bryłę metalową, powstają w niej prądy zwane wirowymi, masowymi lub prądami Foucaulta. Oczywiście prądy te tak samo jak prądy w drutach podlegają regule Lenza. Gdy wywołuje je ruch przewodników, występują bardzo silne działania hamujące ten ruch. Na przykład wahadło zrobione z grubej na kilka mm blachy miedzianej waha się swobodnie między biegunami elektromagnesu, dopóki nie jest on wzbudzony (rys.18.6). Gdy przez jego uzwojenie przepuścimy prąd wzbudzający pole magnetyczne, wahadło zostanie natychmiast zahamowane, jak gdyby wpadło w jakąś lepką ciecz.

Blacha miedziana lub aluminiowa włożona między bieguny bardzo silnego elektromagnesu spada ku dołowi, lecz bardzo powoli, ruchem jednostajnym, hamowana przez działanie silnych prądów wirowych. Spadać zaczyna ruchem przyśpieszonym dopiero wtedy, gdy wydostanie się spomiędzy biegunów.

Ze względu na bardzo mały opór blach lub brył prądy wirowe mogą osiągnąć bardzo wielkie natężenie powodując powstawanie wielkich sił hamujących i wydzielając podczas wykonywania pracy przeciwko nim bardzo dużo ciepła. Dla uniknięcia hamowania elektromagnetycznego i strat energii wirniki silników sporządza się z blach izolowanych wzajemnie od siebie i ustawionych prostopadle do możliwych kierunków prądów wirowych.

18.3. Indukcja wzajemna. Zmieniający się strumień indukcji wywołuje prąd indukcyjny. Źródłem tego strumienia może być magnes, lecz również może nim być solenoid lub cewka, w których płynie prąd. Jeżeli w pobliżu cewki *I* ustawimy cewkę *II* o N zwojach i przez cewkę *I* przepuścimy prąd o natężeniu i (rys. 18.7), to w otoczeniu cewki *I* powstanie pole magnetyczne. Część linij obejmie cewka *II*. Strumień indukcji Φ objęty przez cewkę *II* jest proporcjonalny do natężenia prądu i w cewce *I*. Możemy więc napisać



Rys. 18.7. Indukcja wzajemna

$$N\Phi = Mi. \qquad (18.20)$$

Współczynnik proporcjonalności M, zależny od wzajemnego położenia cewek i ich własności geometrycznych, nazywamy indukcyjnością wzajemną cewek *I* i *II*. Siła elektromotoryczna indukcyjna powstającą w cewce *II* przy zmianie natężenia prądu w cewce *I* jest

$$E_m = -N\frac{d\Phi}{dt} = -M\frac{di}{dt}. \qquad (18.21)$$

Z powyższego wzoru wynika, że indukcyjność wzajemna $M = 1$, gdy zmiana prądu $\frac{di}{dt} = 1\,\frac{A}{\text{sec}}$ w cewce *I* wytworzy w cewce *II* siłę elektromotoryczną $E_m = 1$ wolt. Jednostka ta nazywa się henr, skrócony symbol H. Nazwa pochodzi od nazwiska zasłużonego w tej dziedzinie fizyka, Henry. Ponieważ henr jest bardzo dużą jednostką indukcyjności wzajemnej, używane są również jednostki mniejsze:

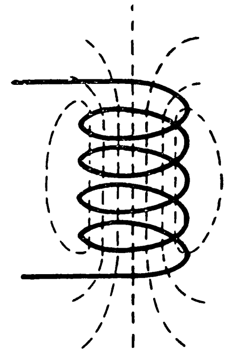
$$1 \text{ milihenr (mH)} = 0{,}001 \text{ H},$$

$$1 \text{ mikrohenr } (\mu\text{H}) = 10^{-6} \text{ H}.$$

Działanie indukcyjne, a zatem i indukcyjność wzajemna dwóch cewek wielokrotnie wzrasta, gdy umieścimy je na rdzeniu żelaznym, szczególnie gdy je tak umieścimy, aby cały strumień indukcji wywoływany przez cewkę *I* zwaną często pierwotną, był obejmowany przez cewkę *II*, zwaną wtórną.

18.4. Indukcja własna. Jeżeli w obwodzie lub cewce płynie prąd stały, to obwód ten znajduje się we własnym polu magnetycznym (rys. 18.8). Gdy spowodujemy w jakikolwiek sposób wzrost natężenia prądu, to wzrasta również objęty przez ten obwód strumień indukcji. Obejmowany przez obwód lub cewkę strumień indukcji jest proporcjonalny do natężenia płynącego w nim prądu

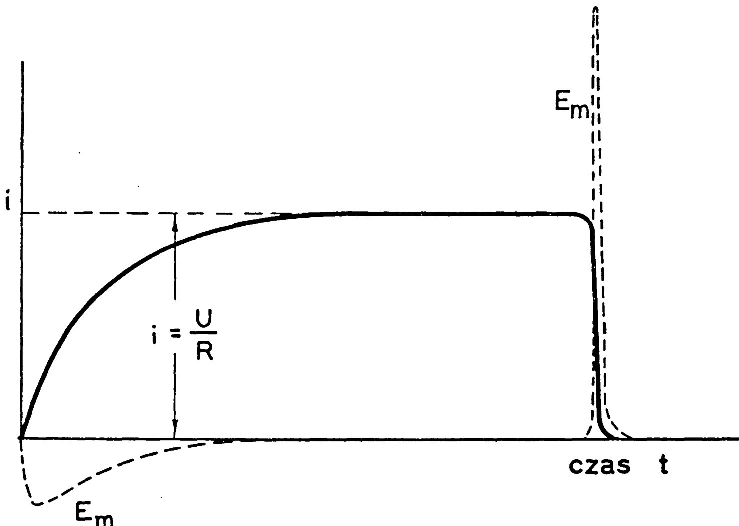
$$N\Phi = Li. \tag{18.22}$$



Rys. 18.8. Indukcja własna

Współczynnik proporcjonalności L, zależny od właściwości geometrycznych obwodu oraz od własności środowiska, w którym się ten obwód znajduje, nazywamy współczynnikiem indukcyjności własnej obwodu.

Gdy z jakichkolwiek przyczyn natężenie prądu w obwodzie wzrasta, wówczas wzrasta również strumień indukcji Φ, powstaje siła elektromotoryczna indukcji własnej, w tym przypadku o kierunku obiegu ujemnym, zatem przeciwdziałająca narastaniu prądu. Gdy natężenie prądu maleje, maleje również strumień indukcji $d\Phi < 0$, siła elektromotoryczna E_m ma kierunek dodatni, stara się więc podtrzymać płynięcie prądu. Siła elektromotoryczna indukcji własnej nadaje prądowi jakby cechę bezwładności, przeciwdziała wszelkim zmianom prądu w obwodzie. Toteż gdy w obwodzie o znacznej indukcyjności własnej włączamy prąd, jego natężenie wzrasta tym wolniej, im większa jest indukcyjność własna, dopiero po



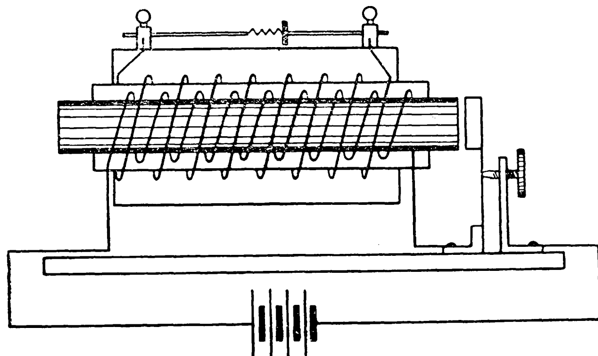
Rys. 18.9. Siła elektromotoryczna indukcji własnej powstająca przy włączaniu i wyłączaniu prądu w obwodzie

pewnym czasie osiągając wartość, jaką powinno mieć według prawa Ohma (rys.18.9). Wyłączenie prądu powoduje szczególnie gwałtowne zmniejszenie strumienia indukcji. Toteż wtedy SEM indukcji własnej osiągać może bardzo wielkie wartości. Z reguły wywołuje powstanie iskry między rozłączanymi końcami drutów czy też wyłącznika (rys. 18.9). Jej wielkość jest podobnie jak poprzednio określona wzorem

$$E_m = -N\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}. \tag{18.23}$$

Jak widać z tego wzoru, jednostkę indukcyjności własnej będzie miała taka cewka, w której zmiana natężenia prądu o 1 A/sec wywołuje powstanie SEM indukcji własnej równej 1 wolt. Jednostka ta, tego samego rodzaju, jak indukcyjność wzajemna, również nosi nazwę henr (H). Tak samo używamy często jednostek mniejszych: milihenra i mikrohenra.

18.5. Induktor Ruhmkorffa. Induktor Ruhmkorffa jest przyrządem do otrzymywania chwilowych wysokich napięć. Składa się z dwóch cewek umieszczonych jedna wewnątrz drugiej (rys. 18.10). Cewka wewnętrzna, zwana uzwojeniem pierwotnym induktora, składa się z niewielu zwojów grubego drutu miedzianego nawiniętego na rdzeniu żelaznym. Rdzeń składa się z izolowanych drutów żelaznych w celu uniknięcia w nim prądów wirowych. Na cewce pierwotnej znajduje się cewka wtórna składająca się z bardzo wielu zwojów cienkiego drutu izolowanego. Niewielka bateria o napięciu kilku woltów wystarcza zwykle, aby wywołać w cewce pierwotnej silny prąd. Gdy prąd ten przerwiemy, w cewce wtórnej powstaje SEM indukcyjna. Ze względu na wielką liczbę zwojów tej cewki i na rdzeń żelazny powiększający znacznie indukcyjność wzajemną obu uzwojeń jest ona bardzo duża, i jeżeli obwód tej cewki jest otwarty, powstają na końcach uzwojenia napięcia, które mogą sięgać nawet setek tysięcy woltów. Otrzymujemy silne iskry między końcami wtórnego uzwojenia. W obwodzie pierwotnym znajduje się jakikolwiek automatyczny przerywacz prądu, najczęściej młoteczkowy, który włącza i wyłącza prąd kilkanaście albo więcej razy w sekundzie.



Rys. 18.10. Induktor Ruhmkorffa

18.6. Obrót obwodu w kształcie prostokąta w polu magnetycznym. Prądnica. Zbadajmy najpierw, co zajdzie w obwodzie kształtu prostokąta, gdy umieścimy go w jednorodnym polu magnetycznym i będziemy go przesuwali

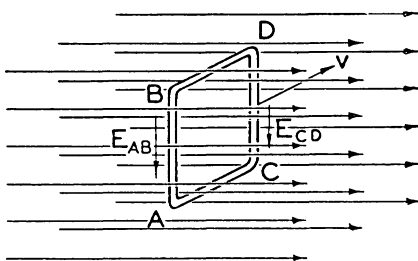
ruchem jednostajnym w kierunku prostopadłym do kierunku pola, ale tak, aby płaszczyzna tego obwodu była podczas ruchu stale równoległa do pierwotnego położenia (rys. 18. 11). Przy takim ruchu w boku AB powstanie SEM skierowana w dół, której wielkość określa wzór

$$E_{AB} = Blv. \tag{18.24}$$

W boku CD powstanie SEM

$$E_{CD} = Blv, \tag{18.25}$$

a więc takiej samej wielkości, również skierowana w dół. Widać, że jedna będzie wywoływać krążenie ładunków w obwodzie w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, druga — w kierunku zgodnym. W rezultacie działania ich się zniosą, prąd indukcyjny nie powstanie.



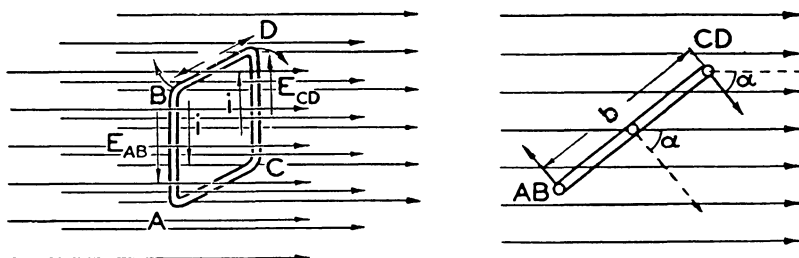
Rys. 18.11. Przy ruchu postępowym obwodu w polu magnetycznym jednorodnym nie powstaje prąd indukcyjny

Ten sam wniosek można wyprowadzić ze wzoru na siłę elektromotoryczną powstającą w całym obwodzie:

$$E_m = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Ponieważ przy ruchu postępowym prostokąta w polu jednostajnym strumień indukcji Φ obejmowany przez prostokąt nie ulega zmianie, $d\Phi = 0$, zatem i $E_m = 0$.

Łatwo wywnioskować, że aby siły elektromotoryczne w przeciwległych bokach mogły wywołać krążenie prądu, muszą być przeciwnie skierowane, a więc boki



Rys. 18.12. Wielkość siły elektromotorycznej powstającej podczas obrotu obwodu prostokątnego zależy od kąta α, jaki tworzy jego normalna z kierunkiem pola

te muszą się poruszać w przeciwnych kierunkach. Jest to możliwe tylko przy obrocie prostokąta około osi. Całkowita SEM powstająca w obwodzie (tylko w bokach AB i CD) w momencie, gdy normalna do płaszczyzny obwodu n tworzy z kierunkiem pola kąt α, będzie (rys. 18.12)

$$E_m = Blv \sin \alpha + Blv \sin \alpha, \tag{18.26}$$

$$E_m = 2Blv \sin \alpha. \tag{18.27}$$

Oznaczając szerokość prostokąta przez b możemy napisać

$$v = \frac{1}{2} b\omega, \tag{18.28}$$

gdzie ω jest prędkością kątową obrotu prostokąta.

Zatem

$$E_m = 2Bl\frac{1}{2} b\omega \sin\alpha = BS\,\omega \sin\alpha \tag{18.29}$$

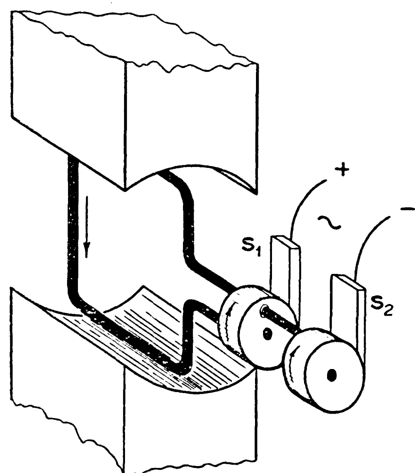
(S jest polem prostokąta). Lecz $\alpha = \omega t$, a więc

$$E_m = BS\omega \sin\omega t. \tag{18.30}$$

Oznaczając iloczyn wielkości $BS\omega = E_0$ możemy napisać

$$E_m = E_0 \sin\omega t. \tag{18.31}$$

Przy jednostajnym obrocie prostokąta w polu jednorodnym otrzymamy siłę elektromotoryczną sinusoidalnie zmienną. Także prąd płynący w obwodzie będzie sinusoidalnie zmienny. Możemy go pobierać za pomocą prostego urządzenia. Na oś nakłada się dwa pierścienie od niej izolowane. Stykając się z pierścieniami dwie szczotki s_1 i s_2 odprowadzają prąd (rys. 18.13). Prąd taki nazywają w elektrotechnice wprost prądem zmiennym.



Rys. 18.13. Zasada prądnicy prądu zmiennego

Na tym prostym przykładzie wyjaśniona jest zasada prądnicy prądu zmiennego.

Gdy zamiast pojedynczego obwodu wiruje w polu magnetycznym cewka zawierająca N zwojów, na wartość siły elektromotorycznej otrzymamy wzór:

$$E_m = NBS\omega \sin\omega t = E_0 \sin\omega t. \tag{18.32}$$

Amplituda siły elektromotorycznej będzie więc określona wzorem

$$E_0 = NBS\omega. \tag{18.33}$$

W prądnicy prądu zmiennego wiele zwojów drutu układa się na powierzchni walca żelaznego w odpowiednich wyżłobieniach. Walec ten wiruje między biegunami silnego elektromagnesu, zasilanego z prądnicy prądu stałego. Obecnie w używanych prawie wyłącznie w technice prądnicach prądu zmiennego role są zmienione. Zwoje drutu ułożone są na wewnętrznej powierzchni pustego wewnątrz walca żelaznego, zaś elektromagnesy, często o wielu biegunach, umieszczone wewnątrz, wirują wzbudzając w uzwo-

jeniu nieruchomym prąd zmienny. Częstość $f = \frac{\omega}{2\pi}$ używanego prawie wszędzie prądu zmiennego wynosi 50 Hz.

Prądnica prądu stałego ma budowę identyczną z silnikiem prądu stałego opisanym w 17.13. Wirnik przedstawiony na rys. 17.30 obraca się za pomocą zewnętrznej siły. Komutator przełącza stale kierunek prądu, tak że na zewnątrz prądnicy płynie stale prąd w jednym kierunku.

18.7. Prąd zmienny. Jak wyprowadziliśmy w poprzednim paragrafie, w cewce obracającej się ruchem jednostajnym w polu magnetycznym jednorodnym powstaje siła elektromotoryczna dana wzorem

$$E_m = E_0 \sin \omega t. \tag{18.34}$$

Wzór ten jest właściwie identyczny z wzorem (12.4 str. 284) na ruch harmoniczny, tylko oznaczenia są odmienne. Wychyleniu x odpowiada chwilowa wartość siły elektromotorycznej E_m, amplitudzie zaś — maksymalna wartość siły elektromotorycznej E_0. Okresem, tak samo jak tam, będzie

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

częstotliwością $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Argument ωt jest *fazą* funkcji E_m. Oczywiście wartość fazy zależy od tego, w jakiej chwili zaczęliśmy liczyć czas. Jeżeli w tym momencie normalna do płaszczyzny cewki tworzyła kąt φ z kierunkiem linii magnetycznych, wówczas otrzymamy na SEM wzór

$$E_m = E_0 \sin (\omega t + \varphi). \tag{18.35}$$

φ może być tak dodatnie jak i ujemne. Przy ruchu harmonicznym również występowała taka wielkość. Nazwaliśmy ją fazą początkową.

Gdy w obwodzie działa siła elektromotoryczna sinusoidalnie zmienna, płynie w nim prąd również sinusoidalnie zmienny zwany w elektrotechnice po prostu prądem zmiennym. Chwilowe natężenie prądu zmiennego dane jest takim samym wzorem jak SEM:

$$i = i_0 \sin \omega t. \tag{18.36}$$

Między SEM i natężeniem prądu w ogólności występuje różnica faz.

Skuteczną wartością prądu zmiennego nazywamy wartość natężenia prądu stałego wykonującego w takim samym czasie taką samą pracę (np. przy zamianie na ciepło), jak dany prąd zmienny. Na pracę wykonywaną przez prąd stały mieliśmy wzór 15.50 (str. 382)

$$L = Uit,$$

ponieważ $U = iR$, więc możemy napisać

$$L = i^2 Rt. \tag{18.37}$$

Lecz prąd zmienny wciąż zmienia swoje natężenie, zatem jego pracę w czasie t da wzór

$$L = \int_0^t i^2 R\, dt.$$

Obliczmy pracę wykonaną przez prąd zmienny w ciągu jednego okresu

$$L = \int_0^T i^2 R\, dt = \int_0^T i_0^2 \sin^2 \omega t\, R\, dt = i_0^2 R \int_0^T \sin^2 \omega t\, dt.$$

Przekształćmy ten wzór za pomocą znanego wzoru trygonometrycznego

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Całka

$$\int_0^T \sin^2 \omega t\, dt = \int_0^T \frac{(1 - \cos 2\omega t)\, dt}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos 2\omega t\, dt = \frac{1}{2} T - \frac{1}{2} \frac{\sin 2\omega T}{2\omega}.$$

Ponieważ $T = \frac{2\pi}{\omega}$, więc $\sin 2\omega T = \sin 4\pi = 0$.

Otrzymujemy więc na L wzór

$$L = \frac{1}{2} i_0^2 R T. \tag{18.38}$$

Jeżeli porównamy pracę prądu stałego (wzór 18.37) i zmiennego wykonaną w tym samym czasie T, to otrzymamy

$$\frac{1}{2} i_0^2 R T = i^2 R T, \qquad \text{skąd} \qquad i_0^2 = 2i^2,$$

$$i = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = 0{,}7\, i_0. \tag{18.39}$$

Tę wartość $\frac{i_0}{\sqrt{2}}$, czyli 0,7 maksymalnej wartości prądu zmiennego, nazywamy wartością skuteczną prądu zmiennego. W podobny sposób określamy wartość skuteczną napięcia zmiennego:

$$U = U_0 \sin \omega t,$$

$$U_{sk} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0{,}7\, U_0. \tag{18.40}$$

Gdy podają napięcie lub natężenie prądu zmiennego, to są to zawsze wartości skuteczne tych wielkości. Tak na przykład napięcie w sieci miejskiej prądu zmien-

nego, najczęściej 220 V, jest to napięcie skuteczne. Napięcie maksymalne chwilowe będzie

$$U_0 = U_{sk}\sqrt{2} \approx 311 \text{ V}.$$

Obliczmy jeszcze jedną wielkość mającą ważne znaczenie przy prądzie zmiennym. Chodzi mianowicie o m o c prądu zmiennego. Mieliśmy poprzednio wzór na moc prądu stałego (15.58 str. 383):

$$P = Ui.$$

Lecz w tym przypadku obie te wielkości są zmienne. Niech U i i będą wyrażone wzorami:

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{i} \quad i = i_0 \sin \omega t.$$

Między tymi wielkościami może istnieć różnica faz φ. Ponieważ tak U, jak i i są zmienne, więc moc chwilowa będzie się również wciąż zmieniać. Ważna dla nas jest moc wydawana średnio, tzw. moc czynna. Aby ją obliczyć, obliczmy pracę wykonaną w przeciągu jednego okresu T.

$$L = \int_0^T Ui\,dt = \int_0^T U_0 i_0 \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi)\,dt = U_0 i_0 \int_0^T \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi)\,dt.$$

Przekształćmy iloczyn sinusów pod całką na sumę

$$\sin (\omega t + \varphi) \sin \omega t = \frac{1}{2} \cos (\omega t + \varphi - \omega t) - \frac{1}{2} \cos (\omega t + \omega t + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \cos (2\omega t + \varphi).$$

Zatem powyższa całka przejdzie w sumę całek

$$\int_0^T \frac{1}{2} \cos \varphi\,dt - \int_0^T \frac{1}{2} \cos (2\omega t + \varphi)\,dt = \frac{T}{2} \cos \varphi + \frac{1}{4\omega} [\sin (4\pi + \varphi) - \sin \varphi].$$

Ponieważ $\sin(\varphi + 4\pi) = \sin \varphi$, zatem całka powyższa daje $\frac{T}{2} \cos \varphi$. Na moc czynną otrzymamy więc

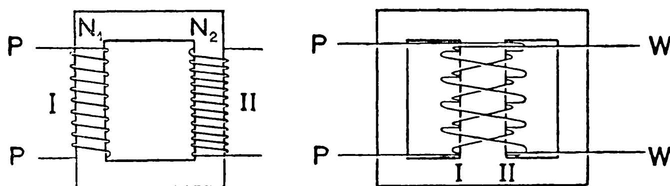
$$P = \frac{L}{T} = \frac{1}{2} U_0 i_0 \cos \varphi. \tag{18.41}$$

Ponieważ $U_0 = \sqrt{2}\, U$, $i_0 = \sqrt{2}\, i$, zatem wprowadzając te wartości (skuteczne) do powyższego wzoru otrzymamy

$$P = Ui \cos \varphi. \tag{18.42}$$

Jak widać, moc czynna prądu zmiennego zależy od różnicy faz φ między napięciem i natężeniem prądu. Gdy $\varphi = 0$, to $\cos \varphi = 1$, wtedy $P = Ui$, gdy $\varphi = \frac{\pi}{2}$, to $\cos \varphi = 0$, $P = 0$.

18. 8. Transformator. Nadzwyczaj często w dzisiejszej technice prądów zmiennych używanym przyrządem jest transformator, połączenie dwóch uzwojeń za pomocą pola magnetycznego. Zasadę objaśnia rys. 18.14. Na zamkniętym rdzeniu żelaznym nawinięte są dwa uzwojenia: *I* — tak zwane pierwotne, do którego włączamy prąd zmienny, oraz *II* — uzwojenie wtórne, z którego czer-



Rys. 18.14. Zasada transformatora

piemy prąd. Jeżeli do uzwojenia pierwotnego włączymy siłę elektromotoryczną dostarczaną np. przez prądnicę prądu zmiennego

$$E_1 = E_1^0 \sin \omega t, \tag{18.43}$$

to pod jej wpływem płynie w tym uzwojeniu prąd zmienny

$$i_1 = i_1^0 \sin(\omega t - \varphi) \tag{18.44}$$

o tej samej częstości, różniący się tylko w fazie od siły elektromotorycznej. Prąd ten wywołuje wewnątrz uzwojenia zmienne pole magnetyczne, którego natężenie zależy od liczby amperozwojów. Wskutek tego w rdzeniu będzie wzbudzony zmienny strumień indukcji

$$\Phi \backsim \sin(\omega t - \varphi), \tag{18.45}$$

który znów wywoła w uzwojeniu wtórnym zmienną siłę elektromotoryczną tej samej częstości kątowej, proporcjonalną do liczby N_2 zwojów uzwojenia wtórnego:

$$E_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = E_2^0 \sin(\omega t - \varphi). \tag{18.46}$$

Jak można obliczyć, amplitudy siły elektromotorycznej w uzwojeniu pierwotnym i wtórnym są proporcjonalne do liczby zwojów:

$$\frac{E_1^0}{E_2^0} = \frac{N_1}{N_2}. \tag{18.47}$$

Za pomocą transformatora możemy zatem przetwarzać dane napięcia pierwotne (zmienne) na napięcia (również zmienne) wyższe lub niższe tej samej częstości.

Moc, którą możemy czerpać z uzwojenia wtórnego, jest niewiele mniejsza od mocy dostarczanej do uzwojenia pierwotnego. Jeżeli zaniedbamy pewne, niewielkie zresztą, straty wskutek rozproszenia linij magnetycznych oraz zamiany energii elektrycznej na cieplną, to możemy napisać

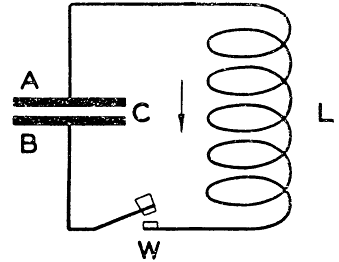
$$E_1^0 i_1^0 = E_2^0 i_2^0, \tag{18.48}$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{E_1^0}{E_2^0} = \frac{i_2^0}{i_1^0} = \frac{N_1}{N_2}. \tag{18.49}$$

Natężenia prądów są w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalne do sił elektromotorycznych i również odwrotnie proporcjonalne do liczby zwojów uzwojeń (E_1^0, E_2^0, i_1^0, i_2^0 są amplitudami wielkości sinusoidalnie zmiennych E_1, E_2, i_1, i_2). To samo równanie można napisać dla ich wartości skutecznych.

18.9. Drgania elektryczne. Prądy zmienne wielkiej częstości możemy otrzymać za pomocą oscylacyjnego rozbrajania się kondensatora. Zestawmy obwód z kondensatora o pojemności C, cewki o indukcyjności własnej L i oporze R oraz wyłącznika W (rys. 18.15). Naładujmy okładkę A kondensatora dodatnio do potencjału U_A, okładkę B ujemnie do potencjału U_B. Po zamknięciu wyłącznika w obwodzie popłynie prąd pod wpływem różnicy potencjałów od okładki A przez cewkę L do okładki B. Wskutek samoindukcji cewki prąd ten będzie narastał stopniowo. Kondensator się rozbroi. Lecz gdy już potencjały okładek się wyrównają, prąd nie przestanie płynąć. Siła elektromotoryczna samoindukcji powstająca w cewce L będzie podtrzymywać prąd ładując kondensator w przeciwnym kierunku. Okładka B uzyska teraz wyższy potencjał, okładka A — niższy. Wytworzone napięcie powstrzyma po pewnym czasie płynięcie prądu. Teraz zjawisko się odwróci. Prąd zacznie płynąć w przeciwnym kierunku, od B do A, znowu okładka A naładuje się do wyższego potencjału. Może się to powtórzyć wielokrotnie. Powstaną w obwodzie drgania elektryczne. Wobec stopniowej zamiany energii prądu na ciepło, wskutek oporu R obwodu, drgania te będą zanikające. Jak można obliczyć, prąd płynący w obwodzie wyrazi się wzorem



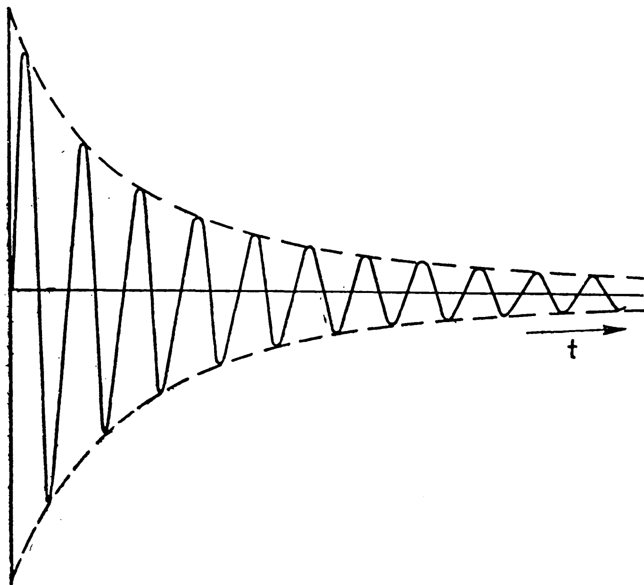
Rys. 18.15. Powstawanie drgań elektrycznych w obwodzie złożonym z cewki i kondensatora

$$i = i_0 e^{-\frac{R}{2L}} \sin 2\pi f t. \tag{18.50}$$

Przebieg drgań przedstawia rys.18.16. Częstość drgań zależy od pojemności kondensatora C i indukcyjności własnej obwodu L. Rozwiązując odpowiednie równanie różniczkowe otrzymujemy wzór na częstość, którego dość dobrym przybliżeniem (gdy opór obwodu jest niewielki) jest wzór, zwany wzorem Kelvina:

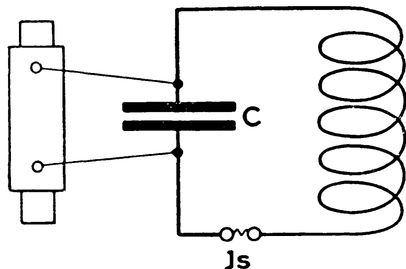
$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{18.51}$$

Dobierając odpowiedniej wielkości cewki i kondensatory można otrzymać drgania najrozmaitszej częstości od kilku do wielu milionów herców. By uzyskać wielokrotne wzbudzenie drgań w obwodzie, stosujemy urządzenie następujące: do biegunów wtórnej cewki induktora przyłączamy kondensator *C*. Do kondensatora



Rys. 18.16. Drgania tłumione elektryczne

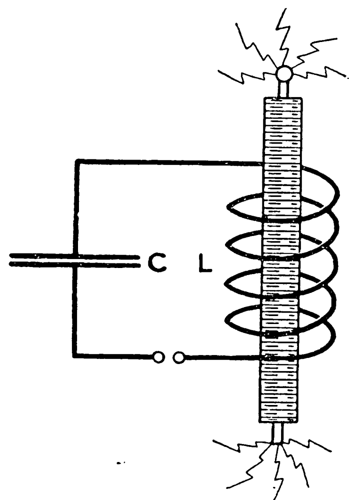
dołączamy cewkę *L* oraz iskiernik składający się np. z dwóch bliskich siebie kulek metalowych (rys. 18.17). Prąd indukcyjny powstający w uzwojeniu wtórnym induktora ładuje okładki kondensatora. Gdy różnica potencjałów okładek osiąga wartość dostatecznie wysoką, kondensator rozbraja się przez cewkę *L* i iskiernik *Is*. W iskierniku tworzy się iskra, która przez krótką chwilę udziela stosunkowo znacznej przewodności warstewce powietrza znajdującego się między kulkami iskiernika. Za pomocą szybko wirującego zwierciadła można obraz iskry rozciągnąć i przekonać się, że każda iskra składa się z szeregu wyładowań, iskierek bijących na przemian raz w jedną, drugi raz w drugą stronę.



Rys. 18.17. Pobudzanie obwodu do drgań za pomocą induktora

Gdy do wnętrza cewki *L* włoży się drugą cewkę (wtórną) o dużej liczbie zwojów (rys. 18.18), to wskutek wielkiej częstości drgań w cewce pierwotnej, a więc i wielkiej szybkości zmiany strumienia indukcji, powstaje w cewce wtórnej wielka siła elektromotoryczna zmienna, która może wytwarzać na biegunach cewki wtórnej napięcia bardzo

wysokie, wynoszące setki tysięcy i nawet miliony woltów. Szczególnie są one wysokie, gdy oba obwody są w rezonansie, o czym będzie mowa w następnym ustępie. Takie urządzenie nazywa się od nazwiska wynalazcy transformatorem Tesli.



Rys. 18.18. Transformator Tesli

18.10. Rezonans elektryczny. Zestawmy dwa tzw. sprzężone obwody, każdy złożony z kondensatora i cewki. Będą one sprzężone, gdy je tak ustawimy, że część przynajmniej strumienia indukcji magnetycznej, wytwarzanego przez cewkę L_1 podczas przepływu prądu, przechodzi przez cewkę L_2 (rys.18.19). Równolegle do C_2 włączamy lampę neonową lub jakiś inny wskaźnik napięcia. Obwód pierwotny pobudzamy do drgania za pomocą induktora. W obwodzie I zaczną płynąć prądy zmienne o częstości

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C_1}}. \tag{18.52}$$

Zaczynamy teraz zmieniać pojemność kondensatora C_2 w obwodzie II. Przy pewnej określonej pojemności tego kondensatora lampa neonowa jasno zaświeci. Jak można zbadać doświadczalnie, a również wyliczyć teoretycznie, nastąpi to wtedy, gdy częstotliwość drgań własnych obwodu II określona wzorem

$$f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C_2}} \tag{18.53}$$

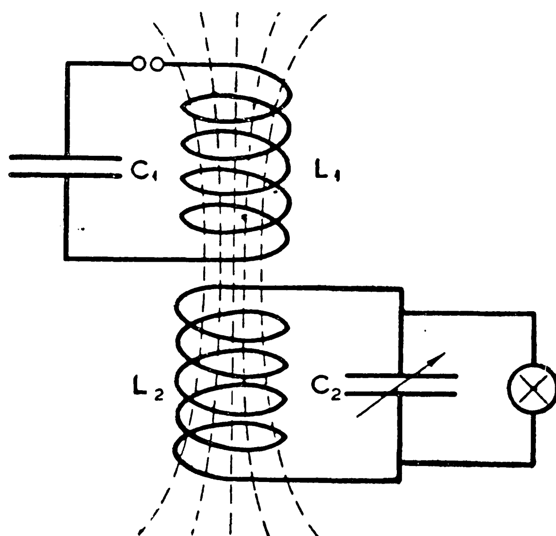
zrówna się z częstotliwością drgań własnych obwodu I:

$$f_1 = f_2. \tag{18.54}$$

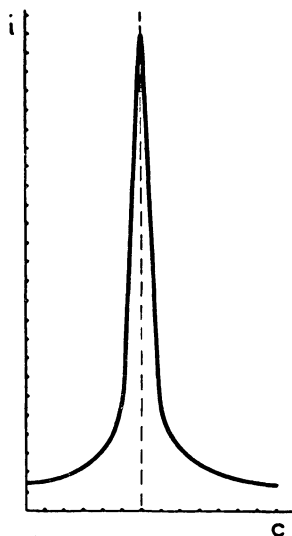
Z warunku tego łatwo wyliczyć, że nastąpi to wtedy, gdy:

$$L_1C_1 = L_2C_2. \tag{18.55}$$

Gdy związek ten jest spełniony, mówimy, że obwód drugi jest w rezonansie z pierwszym albo że został dostrojony do pierwszego. Tak natężenia prądów



Rys. 18.19. Rezonans obwodów drgających

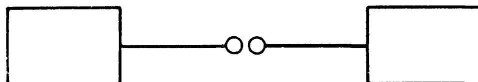


Rys. 18.20. Krzywa rezonansu

płynących w obwodzie *II*, jak i napięcia na okładkach kondensatora C_2 mogą być w przypadku rezonansu setki i tysiące razy wyższe, niż gdy obwody nie są dostrojone. Gdy na osi odciętych będziemy odkładać pojemność kondensatora C_2, a na osi rzędnych natężenia prądu płynącego w obwodzie *II*, otrzymamy krzywą przedstawioną na rys. 18.20. Nazywamy ją krzywą rezonansu.

18.11. Fale elektromagnetyczne. Na kilkadziesiąt lat przed tym, zanim się nauczono wytwarzać fale elektromagnetyczne, Maxwell przewidział ich powstawanie. Zasadnicze i przełomowe w tej dziedzinie było założenie Maxwella, że tak jak zmiana indukcji magnetycznej wywołuje wirowe pole elektryczne, tak samo zmiana strumienia indukcji elektrycznej wywołuje pole wirowe magnetyczne (indukcją elektryczną nazywamy wektor $D = \varepsilon E$, gdzie ε jest stałą dielektryczną środowiska, patrz 14.18. Dla powietrza lub próżni w układzie ES jest $\varepsilon = 1$).

W powietrzu możemy mówić po prostu o natężeniu pola magnetycznego i elektrycznego: zmiana strumienia wektora $\vec{H}$ wywołuje wirowe pole elektryczne, zmiana wektora $\vec{E}$ — wirowe pole magnetyczne. Zmienne prądy elektryczne płynące w przewodniku wywołują zmienne pole magnetyczne w otaczającej przestrzeni. Zmienne zaś pole magnetyczne wywołuje znowu w dalszej przestrzeni zmienne pola elektryczne itd. Wszystkie te zmiany, jak teoretycznie wykazał Maxwell, rozchodzą się w przestrzeni z szybkością światła *c*. Hertz za pomocą swoich słynnych doświadczeń stwierdził istotnie wysyłanie przez drgające obwody w przestrzeń fal elektromagnetycznych. Hertz posługiwał się nieco innymi obwodami niż te, o których poprzednio była mowa. Działania indukcyjne obwodów złożonych z kondensatora i cewki są słabe i na większych odległościach wykryć się nie dadzą. Pochodzi to stąd, że pola takich obwodów są skupione: pole elektryczne — między okładkami kondensatora, pole magnetyczne — wewnątrz cewki. Pola te słabną bardzo szybko z odległością. Hertz posługiwał się tzw. wibratorami otwartymi. Rozsunął mianowicie okładki kondensatora i wyprostował drut zwinięty w cewkę (rys. 18.21). Pola pochodzące od takiego obwodu o wiele wolniej zanikają z odległością. Przy tym przez zmniejszenie jednoczesne pojemności i indukcyjności własnej uzyskał bardzo dużą częstość drgań. Dzięki


Rys. 18.21. Wibrator Hertza

zastosowaniu wibratorów otwartych, za pomocą jeszcze kilku prostych przyrządów pomocniczych udało się mu stwierdzić rozchodzenie się fal elektromagnetycznych, odbijanie, załamanie, polaryzację — wszystkie te zjawiska, które wykazują fale świetlne.

Rosyjski fizyk, Popow, zastąpił wibrator Hertza wielkim wibratorem — anteną z uziemionym jednym jej końcem. W ten sposób udało mu się wzbudzać prądy indukcyjne w obwodzie odbiorczym znajdującym się w znacznej odległości i przesyłać sygnały za pomocą fal elektromagnetycznych.

Dzisiaj wytwarza się bardzo silne drgania tzw. niegasnące, to znaczy o stałej amplitudzie, za pomocą lamp elektronowych. Drgania te wytwarzane w antenie wywołują powstawanie fal elektromagnetycznych rozchodzących się w przestrzeni ponad ziemią. Dobiegając do anten odbiorników wzniecają one w nich drgania tej samej częstości. Za pomocą fal można przesyłać sygnały nawet na odległości setek i tysięcy kilometrów. Powstała cała nowa gałąź techniki — radiotechnika, która zajmuje się zagadnieniami przenoszenia sygnałów i dźwięków za pomocą fal elektromagnetycznych.

Zadania

18.1. Drut długości $l = 1$ m porusza się z prędkością $v = 10$ cm/sec w polu magnetycznym o indukcji $B = 1000$ Gs prostopadle do linii pola. Jaka zostanie w nim wzbudzona SEM?

Odpowiedź: $E_m = 10^6$ j. EM $= 0{,}01$ V.

18.2. Jaka SEM wzbudzi się w osi wozu kolejowego jadącego z prędkością 20 m/sec na północ, skoro nachylenie linii pola magnetycznego ziemskiego jest 67°, a natężenie pola $H = 0{,}48$ Oe. Oś ma długość 120 cm.

Odpowiedź: $E_m = 1{,}06 \cdot 10^5$ j. EM $= 1{,}06 \cdot 10^{-3}$ V.

18.3. Cewka o 100 zwojach obejmująca pole 100 cm² znajduje się w polu magnetycznym o natężeniu 5000 Oe. Linie pola są prostopadłe do płaszczyzny cewki. Jaka w niej powstanie SEM, gdy pole malejąc zniknie w przeciągu 0,01 sec?

Odpowiedź: $E_m = 5 \cdot 10^9$ j. EM $= 50$ V.

18.4. Na rdzeniu nawinięte są dwie cewki jedna na drugiej. Gdy w jednej z nich natężenie prądu zmienia się o 1 A w każde 1/10 sec, w drugiej powstaje SEM $= 0{,}06$ V. Jaka jest ich indukcyjność wzajemna?

Odpowiedź: $M = 0{,}006$ H.

18.5. Jakiej wartości chwilowa SEM powstanie w cewce o indukcyjności własnej $L = 0{,}5$ H przy nagłym przerwaniu w niej prądu 2 A, który wskutek tego zanika w czasie 0,001 sec?

Odpowiedź: $E_m = 1000$ V.

18.6. Prostokątna ramka z drutu obejmująca powierzchnię 100 cm² obraca się około osi przechodzącej przez środki dwóch przeciwległych boków w polu magnetycznym jednorodnym o natężeniu 500 Oe wykonując 360 obrotów w minucie. Jaka jest SEM działająca w ramce w chwilach, gdy normalna do jej powierzchni tworzy z kierunkiem linii magnetycznych kąt 0°, 30°, 45°, 90°, 210°, 225°?

Odpowiedź: 0; 0,0094 V; 0,0133 V; 0,0188 V; — 0,0094 V; — 0,0133 V.

18.7. Cewka prostokątna o powierzchni 10 cm × 20 cm zawierająca 500 zwojów drutu obraca się w polu magnetycznym jednorodnym o natężeniu 200 Oe wykonując 1200 obrotów na minutę. Napisać wzór na powstającą w niej siłę elektromotoryczną.

Odpowiedź: $E_m = 25{,}12 \sin 125{,}6\, t$ V.

18.8. Żarówka świeci się pełnym światłem przy prądzie stałym 0,1 Å, przy napięciu 220 V. Jaką amplitudę musiałby mieć prąd zmienny, aby zasilana nim żarówka równie jasno świeciła. Jaka byłaby wtedy amplituda napięcia na końcówkach żarówki?

Odpowiedź: 0,143 A; ≈ 310 V.

18.9. Uzwojenie pierwotne transformatora zawiera 500 zwojów. Po włączeniu go do napięcia zmiennego 220 V (skutecznego) płynie w nim prąd 2,5 Å. Uzwojenie wtórne zawiera 100 zwojów. Jakie otrzymamy napięcie na zaciskach uzwojenia wtórnego i jaki można będzie z niego prąd czerpać (bez uwzględnienia strat)?

Odpowiedź: $U = 44$ V; $i = 7{,}5$ Å.

18.10. Kondensator o pojemności 2000 pF rozbraja się przez cewkę o indukcyjności własnej $L = 0{,}0005$ H. Jaka będzie częstotliwość prądu zmiennego, który będzie płynął przez cewkę i jaka będzie długość fali wzbudzonej w przestrzeni otaczającej (prędkość fali elektromagnetycznej $c = 300\,000$ km/sec)

Odpowiedź: $f = 159\,200$ Hz; $\lambda = \frac{c}{f} = 1885$ m.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Jaka jest wielkość siły elektromotorycznej indukcyjnej powstającej w odcinku drutu długości l poruszającym się w polu magnetycznym? Jaki jest zwrot tej siły elektromotorycznej?
2. Jaka jest wielkość siły elektromotorycznej indukcyjnej powstającej w obwodzie zamkniętym? Jaka jest wartość natężenia prądu indukcyjnego?
3. Kiedy powstają prądy wirowe albo masowe?
4. Jak się określa indukcyjność wzajemną dwóch cewek? Jaka jest jednostka indukcyjności wzajemnej?
5. Na czym polega zjawisko indukcji własnej? Jak się określa indukcyjność własną obwodu? Jaka jest jednostka indukcyjności własnej?
6. Jak jest zbudowany induktor Ruhmkorffa?
7. W jakich przypadkach powstanie prąd indukcyjny w ramce prostokątnej poruszającej się w polu magnetycznym jednorodnym?
8. W jaki sposób można uzyskać prąd zmienny? Jaka jest zasada prądnicy prądu zmiennego? prądnicy prądu stałego?
9. Jaki jest wzór na siłę elektromotoryczną zmienną i prąd zmienny?
10. Co nazywamy wartością skuteczną prądu zmiennego, napięcia zmiennego?
11. Jaki jest wzór na moc czynną prądu zmiennego?
12. Jaka jest zasada transformatora? Jaki jest stosunek sił elektromotorycznych i natężeń prądów w uzwojeniu pierwotnym i wtórnym?
13. W jaki sposób można otrzymać drgania elektryczne? Jakim wzorem wyraża się prąd w obwodzie drgającym? Jaka jest jego częstotliwość?
14. Jak jest zbudowany, i jak działa transformator Tesli?
15. Kiedy występuje zjawisko rezonansu w obwodach elektrycznych?
16. W jaki sposób powstają fale elektromagnetyczne? Jakimi wibratorami posługiwał się Hertz?

19. Zasady optyki geometrycznej

19.1. Wstęp. W roku 1673 z obserwacji opóźnień zaćmień jednego z księżyców Jowisza podczas wędrówki Ziemi po jej orbicie Olaf Römer obliczył prędkość światła. Późniejsze pomiary wykonywane rozmaitymi metodami, powtarzane wielokrotnie, stwierdziły, że światło rozchodzi się z prędkością wprawdzie nadzwyczaj wielką, ale którą można dokładnie zmierzyć. Wynosi ona okrągło 300 000 km/sec.

Wiele doświadczeń, które częściowo będą opisane w dalszych rozdziałach, stwierdziło, że światło ma własności falowe i że fale te są poprzeczne.

Maxwell z założeń swoich, o których była mowa w poprzednim rozdziale wyliczył, iż prędkość fal elektromagnetycznych jest równa prędkości światła. Wypowiedział on śmiałą hipotezę, iż światło ma identyczną naturę z falami elektromagnetycznymi, zmiennymi polami elektrycznymi i magnetycznymi. Hertz doświadczeniami wykazał, że rzeczywiście wytworzone przez niego fale elektryczne mają wszelkie własności światła, ulegają tak samo odbiciu, załamaniu, wykazują zjawiska polaryzacji, interferencji itd.

Obecnie nie wątpimy, że to, co nazywamy światłem, są to fale elektromagnetyczne krótkie, których długość jest zawarta między 0,4 i 0,8 mikrona. W ostatnich kilku dziesiątkach lat poznaliśmy obszerne dziedziny fal elektromagnetycznych — tak krótszych, jak i dłuższych od fal zawartych w wyżej wymienionym przedziale — znanych pod różnymi nazwami. Tabela 19.1 podaje zakresy fal.

Tabela 19.1.

Przedziały fal elektromagnetycznych różnych długości

Fale radiowe długie	10 000 m — 1000 m
Fale radiowe średnie	1 000 m — 100 m
Fale radiowe krótkie	100 m — 10 m
Fale ultrakrótkie	10 m — 1 m
Mikrofale	1 m — 0,3 mm
Promieniowanie podczerwone	0,3 mm — 0,0008 mm $=0,8\ \mu$
Światło widzialne	0,000 8 mm — 0,0004 mm $=0,4\ \mu$
Promieniowanie nadfioletowe	$0,4\ \mu$ — $0,01\ \mu=100$ Å
Promieniowanie Röntgena i gamma	100 Å — ok. 0,0001 Å

Jednostką długości używaną najczęściej w optyce jest angstrem w skróceniu 1 Å, od nazwiska szwedzkiego fizyka Ångströma:

$$1\ \text{Å} = 10^{-8}\ \text{cm} = 10^{-4}\ \mu.$$

Fale świetlne niosą, tak jak wszystkie fale, energię, która może być zamieniana na inne rodzaje energii: ciepło, energię elektryczną, chemiczną, pracę mechaniczną itd. Maxwell przepowiedział, zaś w r. 1900 fizyk rosyjski Lebiediew doświadczeniem stwierdził, że światło wywiera ciśnienie na wszystkie ciała, na które pada.

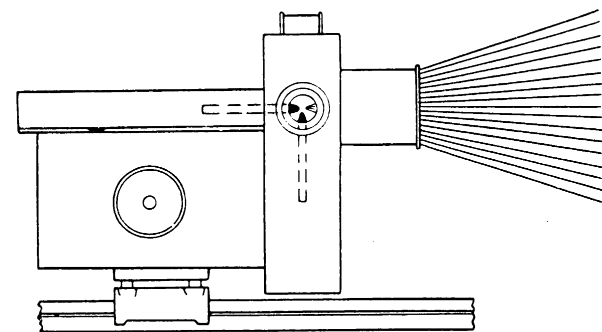
Powstawanie fal świetlnych związane jest z ruchem malutkich, lecz silnych ładunków elektrycznych, elektronów, które znajdują się w każdym atomie i drobinie.

Przy wielu zjawiskach optycznych będziemy używali pewnych uproszczonych pojęć, które pozwalają w sposób wprawdzie tylko przybliżony, ale za to łatwy zdać sobie z nich sprawę.

19.2. Pojęcia optyki geometrycznej. Ciało, które samodzielnie wysyła światło, nazywamy *źródłem światła*. Przykładami są: Słońce, żarówka elektryczna, paląca się świeca itp. Inne ciała są ciałami ciemnymi, które są widzialne tylko dzięki temu, że odbijają i rozpraszają światło.

Gdy źródło światła jest tak małe, że jego rozmiary przestrzenne możemy zaniedbywać wobec rozpatrywanych odległości, nazywamy je źródłem punktowym albo *punktem świecącym*. Istnieją lampy elektryczne zwane punktowymi, w których świeci bardzo mała kuleczka wolframowa rozpalona przez łuk elektryczny.

Łatwo sprawdzić, że w środowisku jednorodnym, np. w powietrzu, światło rozchodzi się prostoliniowo (przynajmniej na niewielkich przestrzeniach). Przez otworki w dwóch ekranach będziemy widzieli punkt świecący tylko wtedy, gdy ten punkt i oba otworki leżą na jednej linii prostej.

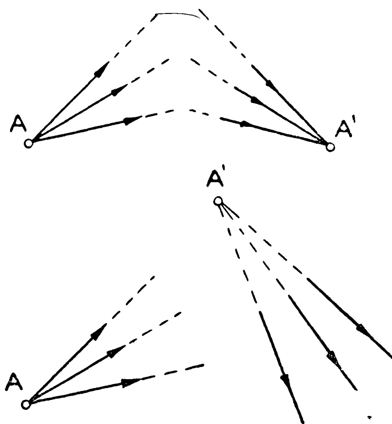


Rys. 19.1. Stożkowa wiązka promieni wychodzących z lampy łukowej

Punkt świecący, np. krater lampy łukowej, daje w powietrzu, w którym zawieszonych jest zawsze wiele pyłków, widoczny z boku stożek świetlny (rys. 19.1). Jeszcze lepiej jest on widoczny, gdy w powietrzu znajduje się np. dym z papierosa. Nazywamy go wiązką światła. W dużej odległości od źródła możemy wiązkę uważać za równoległą (np. wiązkę promieni słonecznych).

Kierunek, wzdłuż którego biegnie światło, będziemy nazywali promieniem światła. Dokładniej można by powiedzieć: będzie to kierunek, wzdłuż którego

przenosi się energia fali elektromagnetycznej. W środowisku jednorodnym promieniem będzie normalna do powierzchni fazowej (patrz 12.12). W życiu potocznym promieniem nazywamy zwykle węższą lub szerszą wiązkę promieni światła, którą widzimy w powietrzu, gdy np. wpuścimy przez mały otworek w okiennicy światło słoneczne do zaciemnionego pokoju.

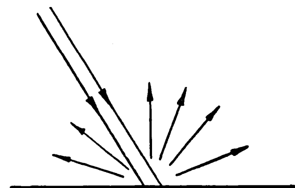


Rys. 19.2. U góry: obraz rzeczywisty A' punktu świecącego A. Na dole: Obraz pozorny A' punktu A

Gdy promień światła dochodzi do naszego oka, lokalizujemy źródło światła gdzieś na tym promieniu. Za pomocą jednego oka nie możemy jednak określić dokładnie położenia tego źródła. Gdy obserwujemy za pomocą obu oczu, dwie wiązki świetlne wchodzą do naszych oczu. Lokalizujemy wtedy źródło światła w miejscu, gdzie te wiązki się schodzą. Tory promieni światła mogą być zakrzywione lub załamane. Wtedy widzimy źródło światła tam, gdzie przecinają się styczne do promieni światła w punktach, w których wchodzą one do oczu.

Gdy promienie wychodzące z pewnego punktu A (rys. 19.2) przecinają się znowu w jednym punkcie A', mówimy, że punkt A' jest rzeczywistym obrazem punktu A. Gdy promienie te są rozbieżne, natomiast ich przedłużenia przecinają się w punkcie A', nazywamy ten punkt obrazem pozornym punktu A. Obraz rzeczywisty można otrzymać na białym ekranie, obrazu pozornego nie. Obraz pozorny widzimy bezpośrednio, gdy rozbieżne wiązki światła wchodzą do oczu.

19.3. Odbijanie się światła. Biały lub jasny przedmiot oświetlony np. światłem słonecznym jest widoczny ze wszystkich stron, wysyła zatem odbite promienie na wszystkie strony (rys. 19.3). Wiązka światła słonecznego wpuszczonego przez otworek w okiennicy na kartkę białego papieru rozświetla cały pokój. Będzie to odbicie rozproszone. Powierzchnie bardzo gładkie, polerowane, w szczególności polerowane powierzchnie metaliczne odbijają światło tylko w pewnym określonym kierunku. Gdy patrzymy na nie z innych kierunków, wydają się ciemne. Takie powierzchnie nazywamy zwierciadłami.


Rys. 19.3. Odbicie rozproszone

Rzućmy promień światła, uwidoczniony np. za pomocą dymu w powietrzu, na powierzchnię zwierciadła. Zauważymy natychmiast, że odbije się on w określonym kierunku. Poprowadźmy przez punkt, gdzie promień trafia zwierciadło, prostopadłą do jego powierzchni. Nazywa się ona prostopadłą padania. Kąt między prostopadłą

padania a promieniem padającym nazywamy kątem padania, kąt między prostopadłą padania a promieniem odbitym — kątem odbicia.

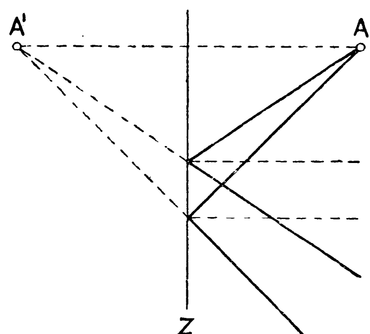
Łatwo doświadczalnie stwierdzić, że gdy promień światła pada na zwierciadło, odbija się w ten sposób, że:

1. Promień odbity, padający oraz prostopadła padania leżą w jednej płaszczyźnie.

2. Kąt odbicia równa się kątowi padania.

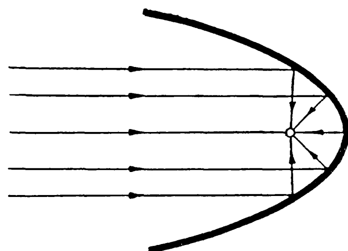
Jak mówiliśmy w rozdziale 12.17, fale odbijają się właśnie w taki sposób od ściany nieprzenikliwej.

19.4. Zwierciadło płaskie. Gdy przed zwierciadłem płaskim *Z* znajduje się punkt świecący *A*, część rozbieżnej wiązki promieni wychodzących z punktu *A* trafia powierzchnię zwierciadła odbijając się (rys. 19.4). Oko ustawione w tej wiązce promieni umiejscowi punkt świecący w punkcie *A'*, który będzie obrazem pozornym punktu *A*. Z geometrycznych stosunków na rysunku łatwo wykazać, że punkty *A'* i *A* leżą na wspólnej prostopadłej do powierzchni zwierciadła.



Rys. 19.4. Odbicie promieni od zwierciadła płaskiego

19.5. Zwierciadło paraboliczne. Prawa odbicia stosują się również do powierzchni krzywych. Prostopadłą padania jest wówczas normalna do powierzchni w punkcie, w którym promień padający przecina tę powierzchnię. W ogólności, gdy weźmiemy jakąkolwiek powierzchnię odbijającą wklęsłą i puścimy na nią wiązkę promieni równoległych, to promienie odbite od rozmaitych elementów tej powierzchni będą się przecinać w różnych punktach. Jednak, gdy rzucimy pęk promieni równoległych na zwierciadło paraboliczne (którego powierzchnia jest paraboloidą obrotową) równolegle do osi głównej paraboloidy, wówczas po odbiciu wszystkie promienie przejdą przez jeden punkt, mianowicie przez ognisko paraboloidy, gdyż jak wiadomo z geometrii, promień przechodzący przez ognisko oraz średnica paraboli tworzą z normalną równe kąty (rys. 19.5).

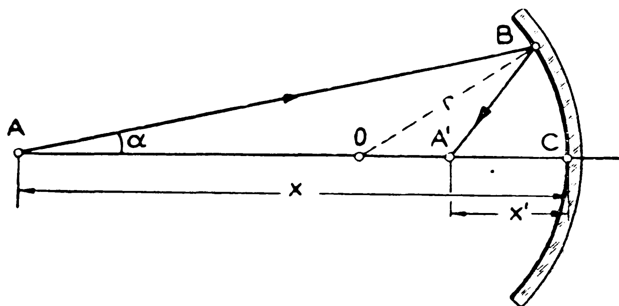

Rys. 19.5. Odbicie promieni od zwierciadła parabolicznego

Odwrotnie, gdy w ognisku zwierciadła parabolicznego umieścimy punkt świecący, promienie odbite od zwierciadła utworzą wiązkę promieni równoległych do osi zwierciadła. Promienie te niosą strumień światła, którego rozmiary poprzeczne nie zmieniają się. Gdyby wiązka ta znajdowała się w przestrzeni próżnej, dawałaby

oświetlenie powierzchni ustawionej na jej drodze wszędzie jednakowe, bez względu na odległość od zwierciadła. W rzeczywistości w powietrzu światło słabnie z powodu rozpraszania i pochłaniania światła przez powietrze.

Zwierciadła paraboliczne jako tzw. reflektory w połączeniu z silnym źródłem światła używane są do rzucania światła na dalekie odległości, oświetlania odległych przedmiotów.

19.6. Zwierciadła sferyczne. Zwierciadło w kształcie części powierzchni kulistej nazywamy zwierciadłem sferycznym. Koło ograniczone brzegiem zwierciadła nazywamy jego *aperturą*. Wielkość apertury jest wyznaczona przez jej średnicę. Prostą poprowadzoną przez środek krzywizny i przez środek apertury nazywamy *główną osią optyczną zwierciadła*. Punkt przecięcia się zwierciadła z osią główną nazywamy *wierzchołkiem* zwierciadła.



Rys. 19.6. Wytwarzanie obrazów punktów przez zwierciadło sferyczne

Jak można doświadczeniem stwierdzić, promienie przyosiowe, to znaczy tworzące bardzo małe kąty z osią, wychodzące z punktu świecącego A (rys. 19.6) znajdującego się na głównej osi i padające na zwierciadło sferyczne wklęsłe po odbiciu schodzą się również w jednym punkcie tworząc obraz rzeczywisty A' punktu świecącego A. To samo można wykazać rachunkiem.

Wprowadzamy następujące umowy co do znaków: będziemy zawsze brali pod uwagę światło padające od strony lewej na prawo. Wszystkie odległości rachujemy od wierzchołka zwierciadła C (rys. 19.6). Odległości punktów leżących na prawo od wierzchołka C uważamy za dodatnie, na lewo — za ujemne.

Oznaczmy odległość punktu świecącego A od wierzchołka C przez x (ujemna). Prostopadłą padania będzie promień powierzchni kulistej OB (także ujemny). Po odbiciu się wiązka promieni z rozbieżnej zamieni się w zbieżną tworząc obraz rzeczywisty A' punktu A. Weźmiemy pod uwagę jeden z promieni, np. AB tworzący z osią kąt α. Po odbiciu się promień ten BA' przetnie się z osią w punkcie A'. Odległość $A'C$ oznaczymy przez x' (ujemna). Powołując się na znane twierdzenie geometryczne, że dwusieczna (BO) kąta w trójkącie dzieli bok przeciwległy na odcinki proporcjonalne do przyległych boków, możemy napisać

$$|AO| : |OA'| = |AB| : |BA'| \tag{19.1}$$

(twierdzenie geometryczne odnosi się do długości odcinków, które są zawsze dodatnie), albo:

$$-(x-r):-(r-x')=|AB|:|BA'|. \qquad (19.2)$$

Gdy ograniczymy się do promieni przyosiowych, wówczas

$$|AB|\approx|AC|, \qquad |BA'|\approx|CA'|$$
$$\approx -x, \qquad \approx -x'.$$

Podstawiając to do równania (19.2) otrzymamy

$$\frac{-(x-r)}{-(r-x')}=\frac{-x}{-x'}, \qquad (19.3)$$

skąd otrzymamy

$$xx'-x'r=xr-xx', \qquad (19.4)$$

$$x'r+xr=2xx'. \qquad (19.5)$$

Dzieląc całe równanie przez iloczyn $xx'r$ otrzymamy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{2}{r}. \qquad (19.6)$$

Równanie to daje zależność między x' i x.

Jak widać, w tym równaniu wcale nie występuje kąt α, który tworzy promień z osią optyczną główną. Zatem wszystkie promienie wychodzące z punktu A zejdą się w punkcie A' leżącym w odległości x' od wierzchołka powierzchni kulistej.

Gdy punkt świecący odsuwa się od zwierciadła do nieskończoności, $x\to-\infty$. wówczas $\frac{1}{x}\to 0$. W granicy

$$x'=f=\frac{r}{2}. \qquad (19.7)$$

Wiązka promieni równoległych do osi optycznej po odbiciu się od zwierciadła zbiera się w jednym punkcie zwanym ogniskiem F zwierciadła. Odległość tego punktu $f=\frac{r}{2}$ od wierzchołka nazywamy odległością ogniskową zwierciadła.

Wprowadzając wartość $\frac{1}{f}$ zamiast $\frac{2}{r}$ do równania (19. 6) możemy dla zwierciadła sferycznego napisać równanie:

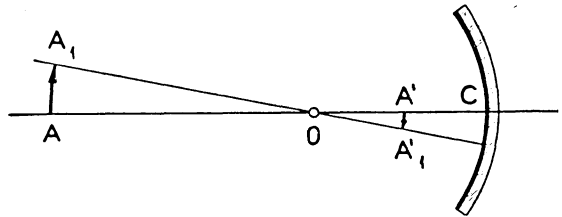
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f}. \qquad (19.8)$$

Z równania tego wynika, że gdy x maleje co do bezwzględnej wartości, to znaczy, gdy punkt A przysuwa się do zwierciadła, to x' musi rosnąć co do bezwzględnej wartości. Jeżeli bowiem $|x|$ maleje, to $\left|\frac{1}{x}\right|$ rośnie, zatem drugi składnik $\left|\frac{1}{x'}\right|$ musi

maleć, czyli $|x'|$ wzrastać. Punkt A' porusza się w przeciwnym kierunku niż punkt A. Gdy $x = r$, to i $x' = r$, punkt A' schodzi się z punktem A. Przy dalszym zbliżaniu się punktu A do zwierciadła punkt A' oddala się do $-\infty$. Gdy $|x| < |f|$, wówczas $\left|\frac{1}{x}\right| > \left|\frac{1}{f}\right|$, ponieważ zaś

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x}, \tag{19.9}$$

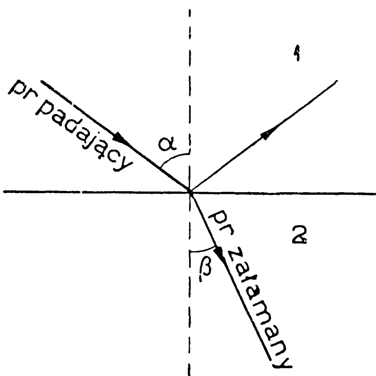
gdzie f i x są liczbami ujemnymi, lecz $\left|\frac{1}{x}\right| > \left|\frac{1}{f}\right|$, na $\frac{1}{x'}$ otrzymamy liczbę dodatnią, a więc i x' będzie dodatnie. Obraz A' będzie leżał wtedy po prawej stronie wierzchołka. Będzie on obrazem pozornym. Promienie wychodzące z punktu A po odbiciu od zwierciadła utworzą wiązkę rozbieżną.



Rys. 19.7. Wytwarzanie obrazów przedmiotów przez zwierciadło sferyczne

Gdy oś główną obrócimy koło punktu O, punkt A zatoczy łuk AA_1, obraz również zatoczy łuk $A'A_1$ (rys. 19.7). Przy bardzo małych łukach możemy je w przybliżeniu uważać za proste prostopadłe do osi optycznej.

Wyobrażając sobie obrót rysunku 19.7 około prostej AC łatwo dojdziemy do wniosku, iż przedmiot płaski prostopadły do osi AC odwzoruje się jako obraz również płaski. Zatem zwierciadło sferyczne może służyć do otrzymywania obrazów przedmiotów.



Rys. 19.8. Załamanie światła na granicy dwóch środowisk przezroczystych

19.7. Załamanie światła. Gdy światło pada na powierzchnię oddzielającą od siebie dwa środowiska przezroczyste, część odbija się od niej, część zaś przechodzi przez nią wchodząc do drugiego środowiska, przy tym kierunek promienia zmienia się nagle na powierzchni. Normalną wystawioną w punkcie, w którym promień padający przecina powierzchnię, nazywamy prostopadłą padania (rys. 19.8). Kąt α między promieniem padającym i prostopadłą padania nazywamy kątem padania. Kąt β między promieniem załamanym i prostopadłą padania nazywamy kątem załamania.

P r a w o z a ł a m a n i a. Promień padający, załamany i prostopadła padania leżą w jednej płaszczyźnie.

Dla danych dwóch środowisk sinusy kątów padania i załamania są do siebie proporcjonalne:

$$\sin\beta \backsim \sin\alpha. \tag{19.10}$$

Prawo to nazywamy prawem Snelliusa. Stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania, stały dla danych dwóch środowisk i dla danego promieniowania, ale posiadający rozmaite wartości dla różnych zespołów środowisk, nazywamy *względnym współczynnikiem załamania* środowiska drugiego względem pierwszego. Będziemy go zawsze oznaczać literą n_{12}:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{12}. \tag{19.11}$$

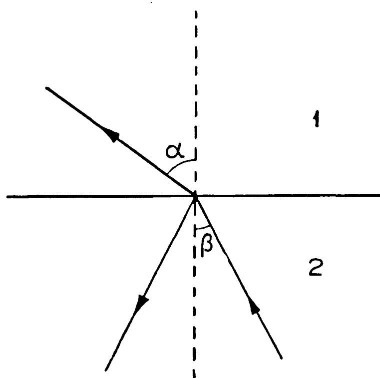
Wskaźniki przy n_{12} napisane w kolejności 1, 2 oznaczają, że światło najpierw przechodzi przez środowisko 1, a potem przez 2. Mówimy zaś w odwrotnej kolejności.

Według teorii ruchu falowego (ust. 12. 6) mamy również

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}, \tag{19.12}$$

gdzie v_1 i v_2 są prędkościami fazowymi w środowisku 1 i 2. Zatem współczynnik załamania $n_{12} = \frac{v_1}{v_2}$ równa się stosunkowi prędkości światła (fazy) w pierwszym środowisku do prędkości światła w drugim środowisku.

19.8. Odwracalność biegu światła. Jeżeli promień światła puścimy przez środowisko 1, światło biec będzie po linii prostej, załamie się na powierzchni granicznej, następnie znowu będzie biec po linii prostej w środowisku 2. Gdy odwrócimy bieg jego tak, aby światło przebiegało tę samą linię prostą w środowisku 2 w przeciwnym kierunku, to po przejściu przez powierzchnię graniczną pójdzie ono również po poprzedniej drodze w środowisku 1 w kierunku przeciwnym (rys. 19.9). Wykazał to już w XIII wieku polski optyk Witelo. Przy odwrotnym biegu światła zatem, jeżeli promień w środowisku 2 pada na powierzchnię graniczną pod kątem β, to załamie się on pod kątem α, stosunek $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ określi nam współczynnik załamania środowiska 1 względem 2, mianowicie n_{21}. Będziemy mieli oczywiście



Rys. 19.9. Odwracalność biegu światła

$$n_{21} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{n_{12}} = \frac{v_2}{v_1}. \tag{19.13}$$

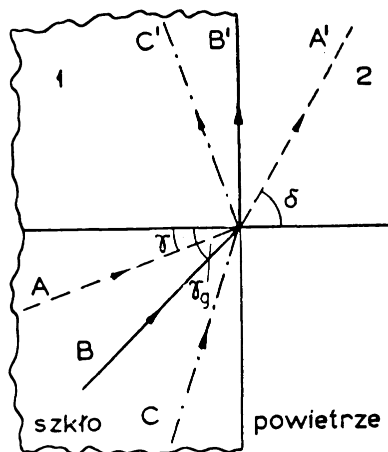
A więc, gdy np. współczynnik załamania szkła względem powietrza wynosi $^3/_2$, to współczynnik załamania powietrza względem szkła będzie wynosić $^2/_3$. Gdy współczynnik załamania tego środowiska, do którego promień wchodzi po załamaniu się na powierzchni granicznej, jest większy od jedności, to promień załamuje się ku prostopadłej padania, w przypadku zaś, gdy jest mniejszy od jedności — od prostopadłej.

19.9. Całkowite odbicie. Weźmy pod uwagę przypadek, gdy promień załamuje się od prostopadłej, to znaczy przebiega przez takie środowiska 1 i 2, iż współczynnik załamania n_{12} jest mniejszy od jedności, np. szkło (1) i powietrze (2). Oznaczając kąt padania przez γ, a załamania przez δ (rys. 19.10) będziemy mieli

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = n_{12} < 1,$$

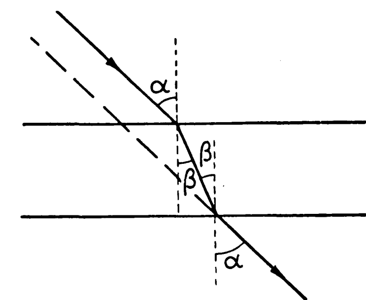
skąd

$$\frac{\sin\gamma}{n_{12}} = \sin\delta. \qquad (19.14)$$



Rys. 19.10. Całkowite wewnętrzne odbicie

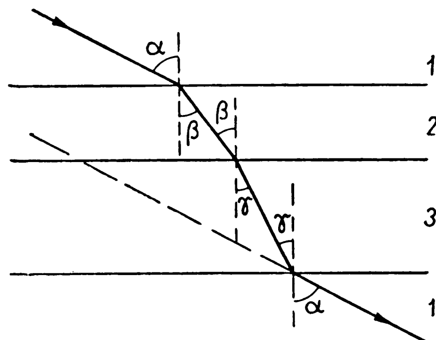
Gdy będziemy powiększać stopniowo kąt γ, musi również rosnąć kąt δ. Gdy $\sin\gamma$ osiągnie wartość równą n_{12}, wówczas $\sin\delta$ stanie się równy jedności. Gdy jeszcze powiększymy kąt γ, to z równania (19.14) wynikałoby, że $\sin\delta$ powinien by się jeszcze powiększyć, musiałby się więc stać większy od jedności. Jest to niemożliwe. Istotnie, doświadczenie wykazuje, że w tym przypadku promień załamany nie utworzy się wcale. Światło odbije się w całości od powierzchni granicznej (linia oznaczona kreskami i kropkami na rys. 19.10). Nazywamy to zjawisko całkowitym odbiciem. Kąt zaś γ_g, dla którego $\sin\delta = 1$, nazywamy kątem granicznym. Dla wszystkich kątów padania większych od kąta granicznego promień padający ulega całkowitemu odbiciu.



Rys. 19.11. Załamanie w płycie płaskorównoległej

19.10. Szyba płaskorównoległa. Bezwzględny współczynnik załamania. Gdy promień pada na szybę płaskorównoległą pod kątem α, załamuje się na pierwszej płaszczyźnie granicznej pod kątem β i pada następnie na drugą płaszczyznę równoległą również pod kątem β (rys. 19.11). Promień załamany na drugiej płaszczyźnie granicznej musi znowu utworzyć z prostopadłą padania kąt α. Po przejściu przez szybę musi zatem

biec w kierunku równoległym do kierunku, jaki miał przy padaniu na szybę. Promień ulegnie tylko równoległemu przesunięciu w bok. Promień nie zmieni kierunku także i wtenczas, gdy płyta jest złożona z kilku szyb płaskorównoległych, w ogóle, gdy mamy dowolną liczbę środowisk przezroczystych przedzielonych płaszczyznami równoległymi, byleby ostatnie środowisko było to samo, co pierwsze. Rozpatrzmy przypadek trzech środowisk 1, 2, 3, 1 (rys. 19.12). Możemy napisać dla nich równania:



Rys. 19.12. Bieg promieni światła przez kilka środowisk przezroczystych odgraniczonych płaszczyznami równoległymi

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{12} = \frac{v_1}{v_2}, \tag{19.15}$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = n_{23} = \frac{v_2}{v_3}. \tag{19.16}$$

Jeżeli grubość warstewki 2 będziemy zmniejszać, to jak widać, kąty β i γ nie będą się zmieniać, gdy tylko kąt α pozostanie stały. Kąt γ nie zmieni się zatem i wówczas, gdy grubość warstewki 2 zmaleje do zera, to znaczy gdy ona całkowicie zniknie. Otrzymamy dla tego przypadku

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{13} = \frac{v_1}{v_3}. \tag{19.17}$$

Z równań (19.15) i (19.16) mnożąc je stronami otrzymamy, że przy obecności warstewki 2

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{12}\,n_{23} = \frac{v_1}{v_2}\,\frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1}{v_3}. \tag{19.18}$$

Z równań (19.17) i (19.18) otrzymamy: $n_{13} = n_{12}\,n_{23}$, skąd

$$n_{23} = \frac{n_{13}}{n_{12}} = \frac{\dfrac{v_1}{v_3}}{\dfrac{v_1}{v_2}} = \frac{v_2}{v_3}. \tag{19.19}$$

Związek ten pozwala obliczyć współczynnik załamania dwóch środowisk 2, 3, gdy znamy ich współczynniki załamania względem jakiegoś trzeciego środowiska 1.

Bezwzględnym współczynnikiem załamania nazywamy współczynnik odnoszący się do przejścia światła z próżni do danego środowiska. Bezwzględny współczynnik załamania będziemy oznaczać jednym tylko wskaźnikiem. A więc bezwzględny współczynnik załamania środowiska 2 będzie n_2, środowiska 3 — n_3.

Prędkość światła w próżni oznaczamy zawsze literą c. Zatem bezwzględny współczynnik załamania

$$n_1 = \frac{c}{v_1}, \qquad n_2 = \frac{c}{v_2} \text{ itd.} \tag{19.20}$$

Wedle równania (19.19) możemy zatem napisać

$$n_{23} = \frac{n_3}{n_2} = \frac{\frac{c}{v_3}}{\frac{c}{v_2}} = \frac{v_2}{v_3}. \tag{19.21}$$

Względny współczynnik załamania równa się stosunkowi bezwzględnych współczynników załamania.

Wyobraźmy sobie środowisko odgraniczone od próżni płaszczyzną i mające taką własność, iż kąt załamania promienia będzie równy kątowi padania: $\sin\beta = \sin\alpha$. W takim razie bezwzględny współczynnik załamania tego środowiska będzie równy jedności:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = 1. \tag{19.22}$$

Stąd wynika, że współczynnik załamania próżni $n = 1$.

Współczynnik załamania powietrza jest tak mało różny od jedności, że w większości wypadków możemy uważać współczynnik załamania względem powietrza za bezwzględny współczynnik załamania.

Tabela 19.2 zawiera pewne średnie wartości współczynników bezwzględnych załamania, ponieważ wartość ich zależy, jak o tym później będzie mowa, od barwy światła padającego, czyli od długości fali.

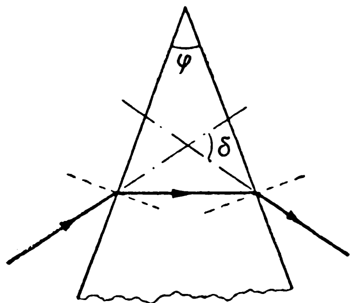
Tabela 19.2

Współczynniki załamania bezwzględne *n*

Ciało	*n*	Ciało	*n*
Woda	1,33	Dwusiarczek węgla	1,64
Alkohol	1,36	Szkło koronowe	1,5
Benzen	1,5	Szkło ołowiowe, tzw. flint	1,75
		Powietrze (20°C, 760 mmHg)	1,0003

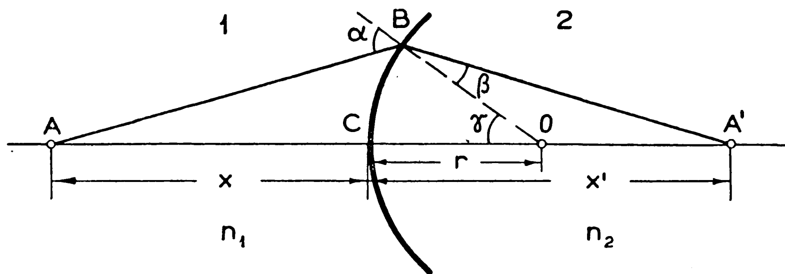
Szkło jest skomplikowanym związkiem kwasu krzemowego z tlenkami metali alkalicznych i ziem alkalicznych. Zawiera więc krzemionkę SiO_2 oraz tlenki Na_2O, K_2O, CaO itd. Szkło optyczne lekkie, tzw. koronowe, jest szkłem wapniowo-sodowym. Szkło ciężkie, ołowiowe, tzw. flint, jest szkłem potasowo-ołowiowym.

19.11. Załamanie w pryzmacie. Pryzmatem nazywamy ciało przezroczyste ograniczone dwiema płaszczyznami przecinającymi się wzdłuż prostej zwanej krawędzią pryzmatu. Z pozostałych stron pryzmat może być ograniczony jakkolwiek. Kąt dwuścienny φ, który tworzą te płaszczyzny, nazywamy kątem łamiącym pryzmatu. Płaszczyzna prostopadła do krawędzi łamiącej nazywa się przecięciem głównym. Promień padający na pryzmat załamuje się dwa razy, raz ku prostopadłej, drugi raz od prostopadłej (rys. 19.13). Po przejściu przez pryzmat jest odchylony od pierwotnego kierunku o pewien kąt δ. Można wykazać rachunkiem i doświadczeniem, że to odchylenie jest najmniejsze, gdy bieg promienia jest symetryczny, gdy promień padający i wychodzący z pryzmatu są jednakowo pochylone do ścian pryzmatu.



Rys. 19.13. Załamanie światła w pryzmacie

19.12. Załamanie na kuli. Niech powierzchnia kuli oddziela dwa środowiska przezroczyste 1 i 2 o współczynnikach załamania n_1 i n_2 (rys. 19.14). Niech w środowisku 1 znajduje się punkt świecący A. Prostą AO łączącą punkt A ze środkiem kuli nazwiemy osią główną powierzchni łamiącej, punkt C —



Rys. 19.14. Załamanie na powierzchni kulistej

wierzchołkiem powierzchni kulistej. Promienie wychodzące z punktu A padając na powierzchnię kuli załamują się na niej. Promienie załamane w ogólności będą się przecinać w różnych miejscach zależnie od tego, jaki kąt tworzą z osią. Można jednak wykazać rachunkiem i doświadczeniem, że promienie tworzące bardzo małe kąty z osią, tzw. promienie przyosiowe, przetną się wszystkie w jednym punkcie A' tworząc w ten sposób obraz rzeczywisty punktu A.

Umawiamy się wszystkie odcinki liczyć w lewo lub w prawo od wierzchołka C, przy tym odcinki idące od punktu C zgodnie z kierunkiem promieni światła uważać za dodatnie, idące zaś przeciwnie — za ujemne. A więc np. odległość punktu A od wierzchołka będzie ujemna, promień kuli dodatni; gdyby zaś środek kuli leżał po lewej stronie wierzchołka, byłby ujemny.

Odległość punktu A od wierzchołka C oznaczymy przez x (ujemna), odległość CA' — literą x'. Z trójkąta ABO (rys. 19.14) stosując twierdzenie sinusów otrzymamy

$$\frac{\sin \sphericalangle ABO}{\sin\gamma} = \frac{AO}{AB}. \tag{19.23}$$

$\sphericalangle ABO = 180° - \alpha$, zaś dla promieni przyosiowych $AB \approx AC$, zatem możemy napisać

$$\frac{\sin(180° - \alpha)}{\sin\gamma} = \frac{-x+r}{-x}$$

(gdyż x jest ujemne) albo

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{-x+r}{-x}. \tag{19.24}$$

Z trójkąta BOA' otrzymamy podobnie:

$$\frac{\sin(180° - \gamma)}{\sin\beta} = \frac{BA'}{OA'}. \tag{19.25}$$

Dla promieni przyosiowych $BA' \approx CA' = x'$, zatem otrzymamy

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{x'}{x'-r}. \tag{19.26}$$

Mnożąc równanie (19.24) przez (19.26) stronami otrzymamy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{-x+r}{-x}\,\frac{x'}{x'-r},$$

a ponieważ zgodnie z definicją

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1},$$

zatem

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{-xx'+rx'}{-xx'+xr},$$

skąd

$$-n_1 xx' + n_1 rx' = -n_2 xx' + n_2 xr. \tag{19.27}$$

Dzieląc to ostatnie równanie przez rxx', otrzymamy

$$-\frac{n_1}{r} + \frac{n_1}{x} = -\frac{n_2}{r} + \frac{n_2}{x'},$$

skąd po uporządkowaniu wyrazów otrzymamy

$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{r}, \tag{19.28}$$

a więc równanie związujące odległość obrazu z odległością przedmiotu od wierzchołka kuli. Wielkości n_1, n_2 i r są stałe. Równanie to jest prawdziwe tak w tym

przypadku, gdy środek leży z prawej, jak i z lewej strony wierzchołka, to znaczy zarówno gdy promień jest dodatni, jak i ujemny.

Jeżeli punkt świecący A będzie się oddalał od wierzchołka kuli, to znaczy, gdy x będzie się powiększać, promienie wychodzące z tego punktu i padające na powierzchnię kuli tworzyć będą wiązkę coraz mniej rozwartą, w granicy utworzą wiązkę promieni równoległych. Wtedy $\frac{n_1}{x} = 0$. Z równania (19.28) otrzymamy

$$\frac{n_2}{x'} = \frac{n_2 - n_1}{r}, \quad \text{skąd} \quad x' = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}.$$

Odległość, w której się spotykają po przejściu przez powierzchnię kuli w środowisku 2 promienie równoległe do głównej osi w środowisku 1, nazywamy odległością ogniskową drugą, a punkt, w którym te promienie się zbierają — ogniskiem drugim. Odległość ogniskową w środowisku 2 będziemy oznaczać literą f_2. Będziemy więc mieli

$$f_2 = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1}. \tag{19.29}$$

Gdy punkt świecący A będziemy przysuwali do wierzchołka kuli, to można stwierdzić, że jego obraz A' będzie się od niego oddalał coraz więcej, odległość x' będzie wzrastać, ułamek $\frac{n_2}{x'}$ będzie maleć. Gdy punkt A znajdzie się w takim miejscu, że promienie po przejściu przez powierzchnię kuli staną się równoległe, w granicy będziemy mieli $\frac{n_2}{x'} = 0$. Z równania (19.28) otrzymamy wtedy

$$-\frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{r}, \quad \text{skąd} \quad x = -\frac{n_1 r}{n_2 - n_1}.$$

Punkt określony przez to równanie posiadający tę własność, że promienie z niego wychodzące stają się po przejściu przez powierzchnię kuli równoległe do osi, nazywamy ogniskiem pierwszym, a odległość jego od wierzchołka — odległością ogniskową pierwszą. Oznaczamy ją literą f_1. Będzie więc

$$f_1 = -\frac{n_1 r}{n_2 - n_1}. \tag{19.30}$$

Oczywiście, wobec odwracalności biegu promieni światła możemy powiedzieć, że promienie równoległe do osi padające na powierzchnię kuli od strony środowiska 2 zbiorą się w środowisku 1 w punkcie oddalonym o f_1 od wierzchołka. Z równań (19.29) i (19.30) wynika, że

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}. \tag{19.31}$$

Ogniskowe są proporcjonalne do współczynników załamania obu środowisk.

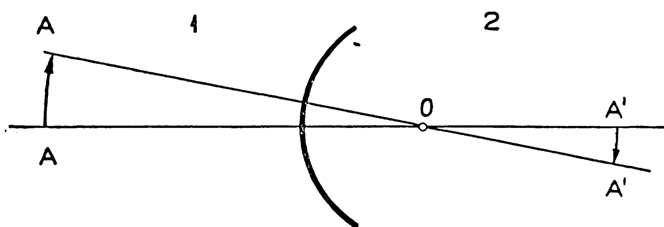
Dzieląc równanie (19.28) przez wyrażenie $\frac{n_2 - n_1}{r}$ otrzymamy

$$\frac{n_2 r}{n_2 - n_1} \frac{1}{x'} - \frac{n_1 r}{n_2 - n_1} \frac{1}{x} = 1,$$

skąd

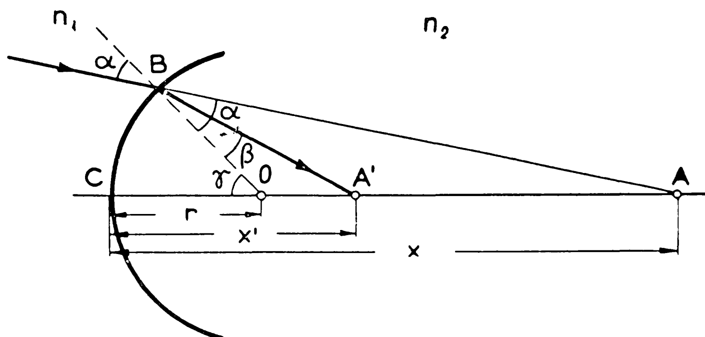
$$\frac{f_1}{x} + \frac{f_2}{x'} = 1. \tag{19.32}$$

Przy obrocie osi około środka kuli O punkt świecący A zakreśli łuk, obraz jego A' również. Wynika stąd, że cały łuk świecący w środowisku 1 zakreślony promieniem OA odwzorowałby się w środowisku 2 jako łuk innych rozmiarów (rys. 19.15). Obracając cały rysunek około osi AO jako osi obrotu możemy się przekonać, że część powierzchni kuli odwzoruje się również w środowisku 2 jako część powierzchni kuli. Małą część kuli można w przybliżeniu uważać za płaszczyznę, możemy więc powiedzieć, że jakikolwiek niewielkich rozmiarów przedmiot lub rysunek płaski odwzoruje się jako również płaski obraz.



Rys. 19.15. Odwzorowanie przedmiotów przy przejściu promieni przez powierzchnię kulistą

Można wykazać, że gdy mamy zbieżną wiązkę promieni taką, że wszystkie promienie celują do jednego punktu, to po załamaniu na powierzchni kuli przetną



Rys. 19.16. Obraz rzeczywisty A' punktu pozornego A

się one również w jednym punkcie, tworząc rzeczywisty obraz pozornego punktu świecącego (rys. 19.16). Aby otrzymać w tym przypadku równanie dające zależność odległości obrazu od odległości punktu świecącego, od wierzchołka powierz-

chni kulistej, zastosujemy jeszcze raz twierdzenie sinusów. Biorąc pod uwagę trójkąty BOA' i BOA możemy napisać

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(180°-\gamma)} = \frac{OA}{BA} \approx \frac{x-r}{x}, \tag{19.33}$$

$$\frac{\sin(180°-\gamma)}{\sin\beta} = \frac{BA'}{OA'} \approx \frac{x'}{x'-r}. \tag{19.34}$$

Mnożąc stronami przez siebie te równania otrzymamy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{x-r}{x}\cdot\frac{x'}{x'-r} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{skąd} \quad n_1xx' - n_1rx' = n_2xx' - n_2xr.$$

Dzieląc to równanie przez $xx'r$ i porządkując odpowiednio wyrazy otrzymamy

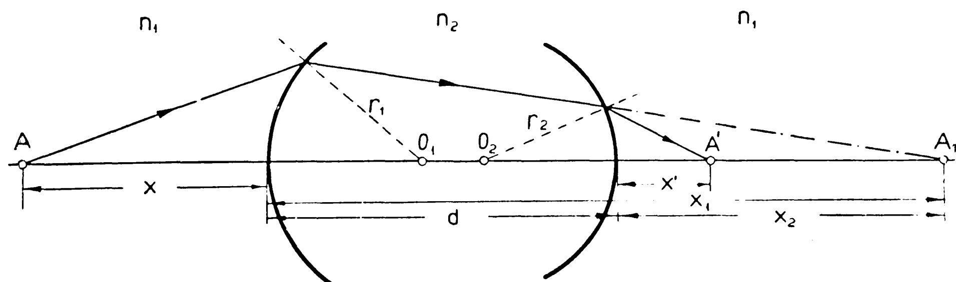
$$\frac{n_2}{x'} - \frac{n_1}{x} = \frac{n_2-n_1}{r}. \tag{19.35}$$

Otrzymaliśmy więc takie samo równanie, jak poprzednio (równanie 19.28).

W przypadku, gdy pierwszym środowiskiem jest powietrze, możemy w przybliżeniu przyjąć $n_1 = 1$, opuszczając zaś przy drugim współczynniku n_2 wskaźnik 2 możemy napisać równanie

$$\frac{n}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{n-1}{r}. \tag{19.36}$$

19.13. Soczewka. Soczewką nazywamy ciało przezroczyste ograniczone z dwóch stron powierzchniami kulistymi (rys. 19.17). Prosta poprowadzona



Rys. 19.17. Bieg promieni, na drodze których znajduje się soczewka

przez środki O_1 i O_2 obu powierzchni kulistych nazywa się osią główną soczewki, część osi zawarta między powierzchniami kulistymi — grubością soczewki d.

Weźmy pod uwagę soczewkę zrobioną z materiału o współczynniku załamania n_2 umieszczoną w środowisku o współczynniku załamania n_1. Wiązka promieni wychodzących z punktu świecącego A leżącego na głównej osi soczewki po załamaniu na pierwszej powierzchni kulistej dałaby obraz punktu A

w punkcie A_1. W rzeczywistości z powodu załamania na drugiej powierzchni kulistej da obraz w punkcie A'. Punkt A_1 będzie dla drugiej powierzchni kulistej pozornym punktem świecącym.

Dla załamania na pierwszej i drugiej powierzchni kulistej możemy napisać poprzednio wyprowadzone równania. Dla pierwszej, oznaczając przez x_1 odległość obrazu A_1 od jej wierzchołka, możemy napisać

$$\frac{n_2}{x_1} - \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{r_1}. \tag{19.37}$$

Dla drugiej zaś oznaczając przez x_2 odległość punktu A_1 od jej wierzchołka

$$\frac{n_1}{x'} - \frac{n_2}{x_2} = \frac{n_1 - n_2}{r_2} = -\frac{n_2 - n_1}{r_2}. \tag{19.38}$$

Dodając stronami do siebie równania (19.37) i (19.38) otrzymamy

$$\frac{n_1}{x'} - \frac{n_1}{x} - n_2\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{19.39}$$

Ponieważ $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{d}{x_1 x_2}$, otrzymamy zatem

$$\frac{n_1}{x'} - \frac{n_1}{x} - n_2\frac{d}{x_1 x_2} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{19.40}$$

Im cieńsza będzie soczewka, tym mniejszy będzie wyraz $\frac{d}{x_1 x_2}$. Dla soczewki bardzo cienkiej możemy w przybliżeniu przyjąć $d = 0$, otrzymamy więc dla niej wzór

$$\frac{n_1}{x'} - \frac{n_1}{x} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{19.41}$$

Dla soczewki ze szkła w powietrzu możemy napisać $n_1 = 1$, $n_2 = n$, a więc otrzymamy wtedy

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{19.42}$$

Kładąc

$$(n - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f}$$

otrzymamy

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f}. \tag{19.43}$$

Jest to wzór zwykle używany dla soczewek.

Gdy soczewka znajduje się nie w powietrzu, a w środowisku o współczynniku załamania (bezwzględnym) n_1, wówczas z równania (19.41) — dzieląc je przez n_1 — otrzymamy

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Wtedy oznaczając

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{19.44}$$

otrzymamy takie samo równanie, jak poprzednio:

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f};$$

$\frac{n_2}{n_1} = n_{12}$ jest w równaniu (19.44) względnym współczynnikiem załamania.

Gdy $\frac{1}{x} = 0$, to jest gdy na soczewkę padają promienie równoległe, otrzymamy

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{f}, \qquad x' = f_2 = f.$$

A więc promienie równoległe do osi głównej soczewki po przejściu przez soczewkę skupiają się w jednym punkcie w odległości (od soczewki), którą oznaczyliśmy $f_2 = f$. Punkt ten F_2 nazywamy drugim ogniskiem soczewki, a f — odległością ogniskową.

Z równania (19.43) mamy

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x}. \tag{19.45}$$

Gdy punkt świecący A dąży do odległości $-f$ od soczewki, to znaczy, gdy $\frac{1}{x}$ dąży do wartości $-\frac{1}{f}$, wówczas, jak widać z równania (19.45),

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{x} \to 0, \qquad \text{a więc i} \quad \frac{1}{x'} \to 0, \qquad x' \to \infty.$$

Zatem gdy punkt świecący zbliża się od lewej strony do odległości $-f$ od soczewki, obraz jego odsuwa się do nieskończoności. Gdy punkt A znajdzie się w odległości $-f$ od soczewki, promienie po przejściu staną się równoległe do głównej osi soczewki. Punkt F_1 znajdujący się w odległości $f_1 = -f$ od soczewki nazywamy ogniskiem pierwszym soczewki. Widać zatem, że soczewka ma dwa ogniska znajdujące się w równych odległościach po przeciwnych stronach soczewki:

$$f_1 = -f, \quad f_2 = +f. \tag{19.46}$$

Odległość f jest określona równaniem

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{19.47}$$

Gdy pomnożymy równanie (19.43) przez f, otrzymamy

$$\frac{f}{x'} - \frac{f}{x} = 1. \tag{19.48}$$

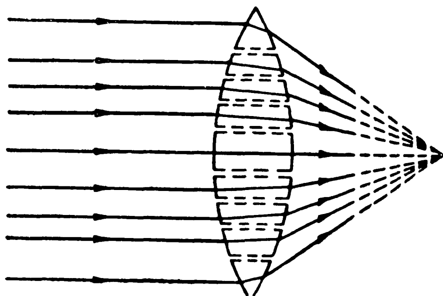
Zważywszy, że $+f = f_2$, a $-f = f_1$, możemy to równanie napisać w postaci

$$\frac{f_1}{x} + \frac{f_2}{x'} = 1. \tag{19.49}$$

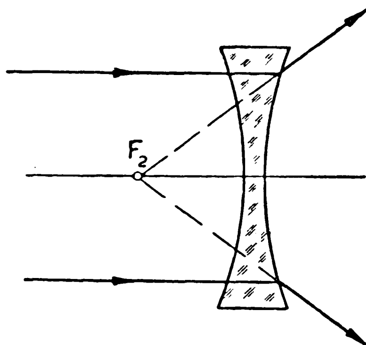
Równanie to ma identyczną postać z równaniem (19.32) dla powierzchni kulistej.

Soczewki grubsze w środku niż przy brzegach załamują promienie ku osi głównej, wskutek czego promienie skupiają się, względnie ich rozbieżność zmniejsza się. Takie soczewki nazywamy skupiającymi. Że muszą one skupiać promienie, łatwo zrozumieć, wyobraziwszy sobie soczewkę podzieloną na części powierzchniami walcowymi. Tak podzielona soczewka jest przedstawiona w przekroju na rys. 19.18). Części te możemy w przybliżeniu uważać za pryzmaty. W górnej połowie będą one odchylać promienie ku dołowi, w dolnej połowie natomiast ku górze.

Soczewki cieńsze w środku niż na brzegach będą działały odwrotnie, będą rozpraszać promienie. Nazywamy je przeto rozpraszającymi. Jak można stwierdzić



Rys. 19.18. Soczewka uważana za układ pryzmatów



Rys. 19.19. Soczewka rozpraszająca

i jak w dalszym ciągu obliczymy, dla soczewek rozpraszających odległość ogniskowa f określona wzorem (19.47) wypada ujemna. Zatem druga ogniskowa f_2 będzie ujemna, a pierwsza dodatnia. Wynika stąd, że drugie ognisko F_2, tj. punkt, w którym po przejściu przez soczewkę zbierają się promienie padające od lewej strony równolegle do osi głównej — leży też po lewej stronie.

Oczywiście, jak widać z rys. 19.19, w punkcie F_2 nie mogą się przecinać po przejściu przez soczewkę promienie, tylko ich przedłużenia. Soczewka roz-

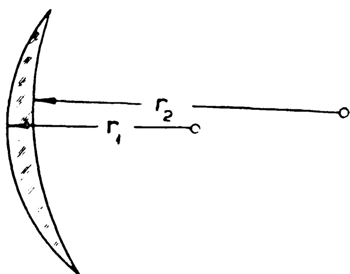
praszająca ma ogniska pozorne. Ponieważ odległość ogniskową f ma ujemną, nazywamy ją soczewką ujemną w odróżnieniu od soczewek skupiających albo dodatnich.

Zdolnością zbierającą soczewki Z nazywamy odwrotność odległości ogniskowej

$$Z = \frac{1}{f}. \qquad (19.50)$$

Gdy f jest wyrażone w metrach, Z otrzymujemy w dioptriach (D). Zatem soczewka skupiająca o ogniskowej 1 m będzie miała zdolność zbierającą równą 1 dioptrii, soczewka rozpraszająca o ogniskowej — 25 cm = — $^1/_4$ m będzie miała — 4 dioptrie itd.

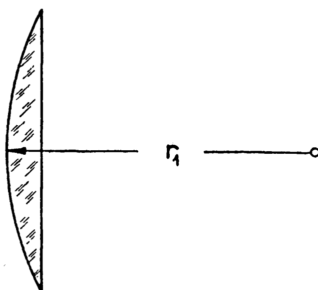
O d m i a n y s o c z e w e k (rys. 19.20 — 19. 25)



Rys. 19.20. Soczewka wypukło-wklęsła

$r_2 > r_1 > 0, \quad \frac{1}{r_1} > \frac{1}{r_2},$

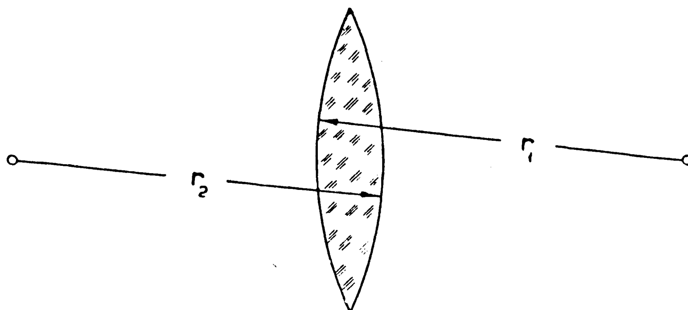
$f > 0$



Rys. 21. Soczewka płasko-wypukła

$r_1 > 0, \quad \frac{1}{r_2} = 0,$

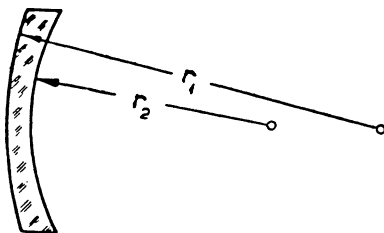
$f > 0$



Rys. 19.22. Soczewka dwuwypukła

$r_1 > 0, r_2 < 0,$

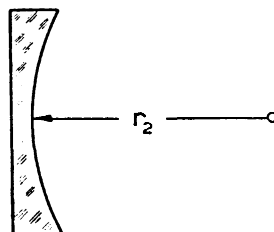
$f > 0$



Rys. 19.23. Soczewka wypukło-wklęsła rozpraszająca

$$r_1 > r_2 > 0, \quad \frac{1}{r_1} < \frac{1}{r_2},$$

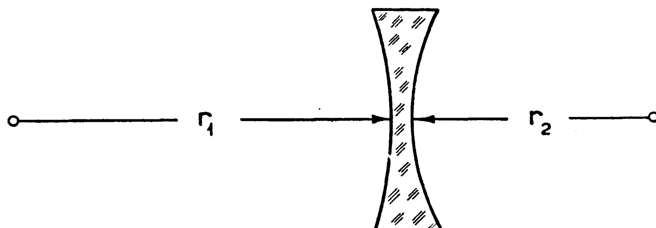
$$f < 0$$



Rys. 19.24. Soczewka płasko-wklęsła

$$\frac{1}{r_1} = 0, \quad r_2 > 0,$$

$$f < 0$$

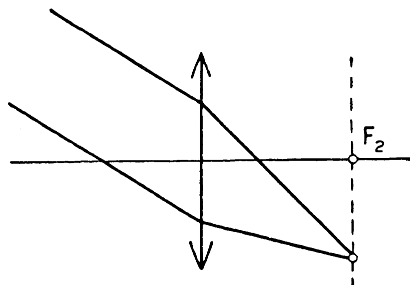


Rys. 19.25. Soczewka dwuwklęsła

$$r_1 < 0, \quad r_2 > 0,$$

$$f < 0$$

19.14. Wytwarzanie obrazów przez soczewki i ich wykreślanie. Była mowa poprzednio o tym, że wiązki promieni wychodzące z rozmaitych punktów niewielkiego przedmiotu albo rysunku płaskiego po przejściu przez powierzchnię kulistą odgraniczającą dwa środowiska o różnych współczynnikach załamania tworzą płaski obraz tego przedmiotu. To samo odnosi się do odwzorowania przy dwukrotnym załamaniu na dwóch powierzchniach kulistych. Wiązki światła wychodzące z rozmaitych punktów przedmiotu lub rysunku płaskiego po przejściu przez soczewkę dają obraz danego przedmiotu, który można otrzymać na ekranie.

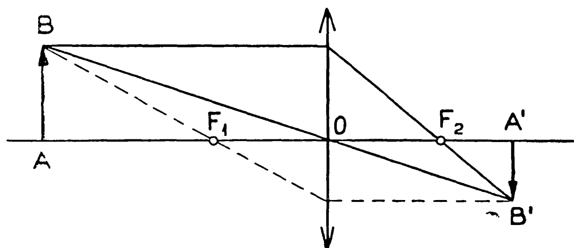


Rys. 19.26. Płaszczyzna ogniskowa

Jeżeli weźmiemy pod uwagę wiązkę promieni równoległych tworzących pewien kąt z osią główną soczewki, to wiązka ta po przejściu przez soczewkę skupi się w jednym punkcie położonym z boku osi głównej. Będzie on leżał w płaszczyźnie przechodzącej przez ognisko i prostopadłej do osi głównej. Płaszczyznę taką

nazywamy płaszczyzną ogniskową (rys. 19.26). W niej odwzorowują się przedmioty leżące bardzo daleko od soczewki.

Aby wykreślić obraz danego przedmiotu, zaznaczamy najpierw położenie ognisk. Niech przedmiotem wysyłającym promienie będzie odcinek AB (rys. 19.27). Z punktu B prowadzimy promień równoległy do osi głównej soczewki. Po przejściu przez soczewkę musi on przejść przez ognisko drugie F_2. Drugi promień prowadzimy przez środek soczewki. Przejdzie on przez nią bez załamania. Tam, gdzie te dwa promienie przetną się, otrzymamy obraz B' punktu B. Przedmiot AB leżący w płaszczyźnie prostopadłej do osi odwzoruje się również w płaszczyźnie prostopadłej do osi. Zatem opuszczając z punktu B' prostopadłą do osi otrzymamy na osi punkt A'. Łącząc je otrzymamy obraz $A'B'$ odcinka AB.



Rys. 19.27. Wykreślanie obrazów dawanych przez soczewki

Można też poprowadzić z punktu B jeden promień równoległy do osi głównej soczewki, drugi zaś przez ognisko pierwsze, F_1. Ten drugi promień po przejściu przez soczewkę będzie równoległy do osi. Tam gdzie one się spotkają, otrzymamy obraz B' punktu B.

Oznaczmy długość odcinka AB przez y (wysokość przedmiotu), długość zaś odcinka $A'B'$ — przez y'. Z podobieństwa trójkątów AOB i $OB'A'$ otrzymamy

$$\frac{y'}{y} = \frac{|x'|}{|x|}. \tag{19.51}$$

Stosunek $m = \frac{y'}{y}$ nazywamy liniowym powiększeniem obrazu. Widać ze wzoru (19.51), że będzie ono tym większe, im większe jest x', a im mniejsze jest x. Gdy obraz tworzy się blisko soczewki, jest mały, im zaś dalej od soczewki się tworzy, tym jest większy.

19.15. Wzór Newtona. Zależność odległości i wielkości obrazu od odległości przedmiotu od soczewki. Oznaczmy odległość przedmiotu od ogniska pierwszego przez d_1, a odległość obrazu od ogniska drugiego przez d_2 licząc jak zawsze odcinki o kierunku zgodnym z kierunkiem promieni światła za dodatnie, przeciwne — za ujemne. Będziemy mieli (rys. 19.28)

$$\left.\begin{aligned} x &= d_1 + f_1, \\ x' &= d_2 + f_2. \end{aligned}\right\} \tag{19.52}$$

(Wszystkie trzy odcinki x, d_1 i f_1 są ujemne). Podstawiając te wartości na x i x' do równania (19.43) otrzymamy

$$\frac{1}{d_2 + f_2} - \frac{1}{d_1 + f_1} = \frac{1}{f}. \tag{19.53}$$

Ponieważ $f_1 = -f$, $f_2 = +f$, możemy napisać

$$\frac{1}{d_2 + f} - \frac{1}{d_1 - f} = \frac{1}{f}, \tag{19.54}$$

skąd po zniesieniu mianowników i po redukcji otrzymamy

$$d_1 d_2 = -f^2 = f_1 f_2. \tag{19.55}$$

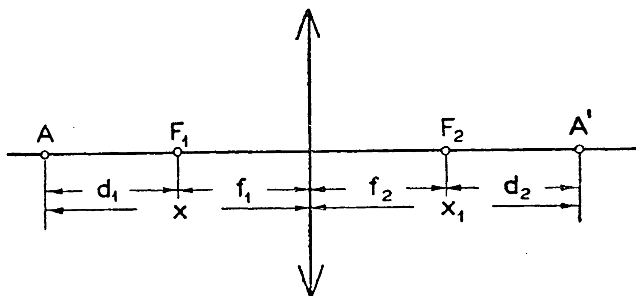
Jest to tzw. równanie Newtona. Stwierdza ono, że iloczyn obu odległości d_1 d_2 jest stały dla danej soczewki. Zatem, gdy odległość d_1 maleje, to d_2 musi wzrastać i odwrotnie. To znaczy, gdy przedmiot przysuwamy do ogniska, obraz jego musi się od drugiego ogniska odsuwać.

Ponieważ

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{|x'|}{|x|} = \frac{|d_2 + f_2|}{|d_1 + f_1|}, \tag{19.56}$$

to przy powiększeniu d_2, czyli przy odsuwaniu się obrazu od ogniska rozmiary jego muszą się powiększać.

Gdy przedmiot będzie bardzo oddalony od ogniska, gdy jego odległość x, a zatem i d_1, będzie bardzo wielka, odległość obrazu od ogniska, jak wynika z równania (19.56), będzie się praktycznie równać zeru. Przedmioty bardzo odległe odwzorowują się w płaszczyźnie ogniskowej. Obrazy są wtedy bardzo małe, odwrócone i rzeczywiste. Ustawiając tak soczewkę, aby otrzymać na ekranie obraz odległego przedmiotu, możemy łatwo wyznaczyć odległość ogniskową soczewki.



Rys. 19.28. Odległości punktu świecącego i jego obrazu liczone od ognisk

Gdy przedmiot zbliża się ku soczewce, d_1 maleje, d_2 wzrasta. Obraz oddala się od soczewki i pozostaje rzeczywisty, odwrócony i zmniejszony. Wielkość jego jednocześnie rośnie. Gdy $d_1 = f_1$, z równania (19.55) otrzymujemy $d_2 = f_2$. Wtedy $x = d_1 + f_1 = 2f_1$ oraz $x' = d_2 + f_2 = 2f_2$. Przedmiot i jego obraz znajdują się w jednakowych odległościach od soczewki równych podwójnej ogniskowej. Na powiększenie otrzymamy wtedy

$$m = \frac{y'}{y} = \frac{|x'|}{|x|} = \frac{|2f_1|}{|2f_2|} = 1.$$

Obraz jest tej samej wielkości co przedmiot, tylko odwrócony.

Gdy jeszcze dalej będziemy zbliżali przedmiot do ogniska pierwszego, to znaczy gdy d_1 będzie mniejsze od f_1, d_2 będzie większe od f_2 i będzie rosło. Obraz będzie się oddalał, będzie wciąż odwrócony i rzeczywisty. Ponieważ $x = d_1 + f_1$ będzie mniejsze od $x' = d_2 + f_2$, zatem m będzie większe od jedności, obraz będzie powiększony i wielkość jego będzie wciąż wzrastać w miarę zbliżania przedmiotu do ogniska.

Gdy wreszcie przedmiot tak zbliżymy do soczewki, że d_1 stanie się dodatnie, to znaczy, gdy przedmiot znajdzie się między ogniskiem i soczewką, d_2 z równania (19.55) wypadnie ujemne o bezwzględnej wielkiej wartości. To znaczy, że obraz znajdzie się naraz po drugiej stronie soczewki, tej samej co przedmiot. Będzie on wtedy pozorny, jak łatwo znaleźć wykreślnie, prosty i powiększony. Przy dalszym zbliżaniu przedmiotu do soczewki obraz nie przestając być prostym, pozornym i powiększonym zbliża się szybko do soczewki i prawie schodzi się z przedmiotem, gdy ten ostatni znajdzie się przy samej soczewce. Z powyższych rozważań łatwo wywnioskować, że przedmioty trójwymiarowe nie mogą być dokładnie odwzorowane na płaszczyźnie. Jeżeli jedne części dadzą obraz wyraźny, to inne będą niewyraźne. Nie można więc np. za pomocą aparatu fotograficznego otrzymać ostrego zdjęcia jednocześnie bliskich i odległych przedmiotów.

Jednak gdy ogniskowa soczewki jest bardzo krótka, można wtedy stwierdzić, że znaczna nawet zmiana odległości szczególnie dość oddalonych przedmiotów wywoła bardzo niewielką zmianę w położeniu obrazu.

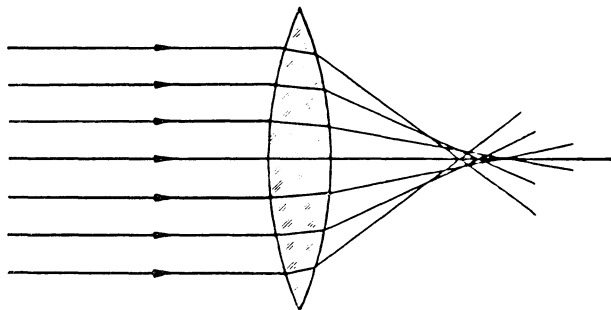
Weźmy np. soczewkę o ogniskowej $f = 5$ cm. Wyobraźmy sobie przedmiot w odległości 10 m = 1000 cm od ogniska soczewki. Jego obraz utworzy się w odległości

$$d_2 = -\frac{f^2}{d_1} = -\frac{-25}{1000}\ \text{cm} = \frac{1}{4}\ \text{mm}$$

od ogniska, to znaczy będzie leżał w odległości $^1/_4$ mm poza ogniskiem. Gdy przedmiot odsunie się z odległości 10 m aż do nieskończoności, obraz przemieści się zaledwie o ćwierć milimetra i znajdzie się w ognisku. Gdy więc ustawimy tuż poza ogniskiem ekran, kliszę lub film, to wszystkie przedmioty leżące w różnych odległościach od soczewki większych od 10 metrów odwzorują się na kliszy lub filmie niemal jednakowo ostro. Za pomocą krótkoogniskowych soczewek możemy więc uzyskiwać wyraźne obrazy jednocześnie np. bliskich osób i odległych krajobrazów. Soczewki o długich ogniskowych nie posiadają tej własności.

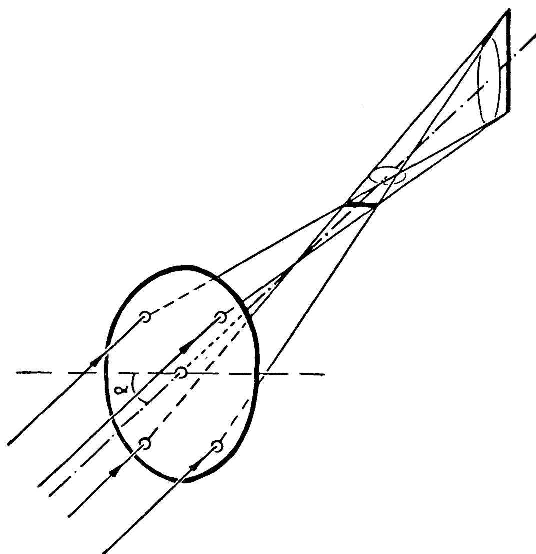
19.16. Wady odwzorowania. Wiązka promieni wychodzących z jednego punktu po przejściu przez soczewkę nie schodzi się dokładnie w jednym punkcie. Promienie padające dalej od osi optycznej spotykają się nieco bliżej soczewki niż promienie bliskie osi (rys. 19.29). Wskutek tego na ekranie nie otrzymuje się ostrego obrazu punktu, lecz plamkę w kształcie koła. Powoduje to nieostrość obrazów. Tę wadę odwzorowania nazywamy aberracją sferyczną.

Jak to później omówimy szczegółowiej, promienie światła białego przy przejściu przez soczewkę ulegają jednocześnie rozszczepieniu na promienie barwne. Promienie różnych barw zbierają się w punktach znajdujących się w różnych odległościach od soczewki. Jako obraz punktu świecącego otrzymujemy plamkę kołową otoczoną barwną obwódką. Powoduje to wielką nieostrość obrazów. Tę wadę odwzorowania nazywamy aberracją chromatyczną.



Rys. 19.29. Aberracja sferyczna

Gdy na soczewkę pada wiązka promieni równoległych ukośnie, tworząc duży kąt z osią główną soczewki, wówczas po przejściu przez soczewkę promienie te nigdzie nie schodzą się w jednym punkcie. Tworzą one wiązkę, której promienie zbierają się w pewnej odległości od soczewki na odcinku prostej, zaś w nieco dalszej odległości — na odcinku prostej prostopadłej do pierwszej (rys. 19.30). Między tymi odcinkami przekrój wiązki jest eliptyczny. Taką wiązkę nazywamy bezogniskową albo astygmatyczną, zaś wadę soczewki, która zamienia wiązki promieni wychodzące z jednego punktu na wiązki astygmatyczne — astygmatyzmem.

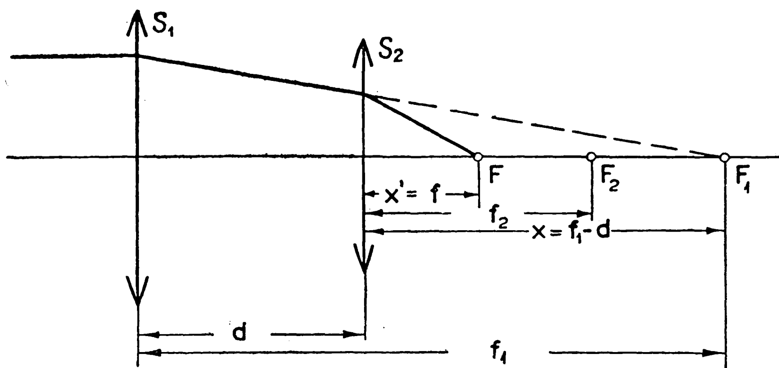


Rys. 19.30. Wiązka ukośnie padająca na soczewkę zamienia się w wiązkę astygmatyczną

Celem usunięcia opisanych powyżej wad soczewek zestawia się układy soczewek odpowiednio dobranych, często bardzo skomplikowane. Takie układy mogą być wolne od wad odwzorowania i dawać obrazy ostre. Takimi układami są obiektywy dobrych aparatów fotograficznych oraz mikroskopów. Również i w lunetach stale używa się układów soczewek.

19.17. Układ dwóch soczewek. Układ taki jest często używany przy instrumentach optycznych w celu usunięcia niektórych wad odwzorowania. Rozpatrzy-

my tu układ dwóch cienkich soczewek o wspólnej osi głównej, znajdujących się w odległości d jedna od drugiej. Układ taki będzie miał również dwa ogniska, w których skupiają się wiązki promieni równoległych do osi po przejściu przez układ. Weźmy pod uwagę taką wiązkę i obliczmy, w jakiej odległości od drugiej soczewki S_2 zbierze się ta wiązka w jednym punkcie (rys. 19.31). Tam będzie leżeć ognisko drugie F układu. Niech soczewka S_1 ma ogniskową f_1, soczewka



Rys. 19.31. Układ dwóch soczewek

S_2 — ogniskową f_2. Przy obecności tylko soczewki S_1 wiązka skupiłaby się w punkcie F_1. W drugiej soczewce promienie załamią się jeszcze raz i skupią się w punkcie F. Uważając punkt F_1 za przedmiot pozorny, którego obraz daje soczewka S_2 w punkcie F, możemy napisać równanie dla drugiej soczewki:

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f_2} \quad \text{albo} \quad \frac{1}{f} - \frac{1}{f_1 - \mathrm{d}} = \frac{1}{f_2},$$

skąd

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{f_2}. \tag{19.57}$$

Odległość ogniska F od drugiej soczewki zależy od ogniskowych obu soczewek f_1 i f_2 oraz od ich odległości d.

Jeżeli soczewki zbliżymy tak, że się one zetkną, wówczas $d = 0$ i otrzymamy

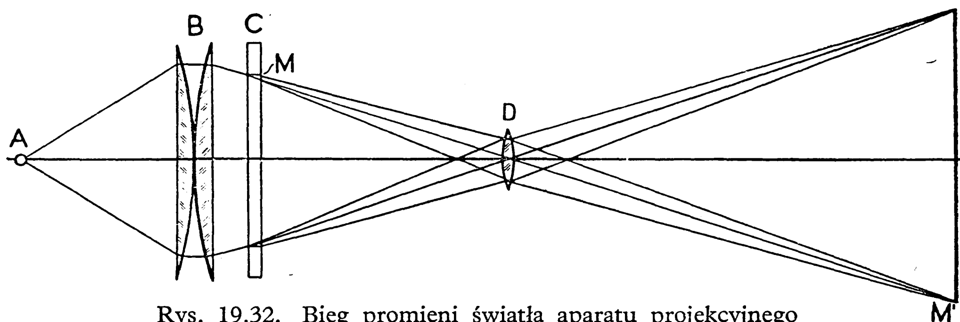
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \tag{19.58}$$

$\frac{1}{f}, \frac{1}{f_1}, \frac{1}{f_2}$ są to zdolności zbierające układu, soczewki pierwszej i drugiej. Otrzymaliśmy zatem następujący wynik: zdolność zbierająca układu złożonego z dwóch przylegających do siebie soczewek równa się sumie algebraicznej zdolności zbierających poszczególnych soczewek.

Przy lunetach i innych instrumentach optycznych używa się bardzo często układu dwóch soczewek, zbierającej i rozpraszającej, sklejonych ze sobą.

19.18. Aparat fotograficzny. Aparat fotograficzny składa się ze szczelnej nieprzepuszczającej światła szkatułki. W przedniej ścianie umieszczona jest soczewka skupiająca, tzw. obiektyw. Obiektyw zwykle składa się z kilku soczewek w celu usunięcia wad odwzorowania. Na tylnej ścianie umieszcza się kliszę lub film. Jasność obrazu jest proporcjonalna do kwadratu ilorazu średnicy d otworu, przez który wchodzi wiązka światła — przez odległość ogniskową f. Ten iloraz $q = \frac{d}{f}$ nazywa się otworem względnym. Obecnie budują obiektywy o bardzo dużym otworze względnym, nawet $q = 1{:}1$. Czas ekspozycji jest odwrotnie proporcjonalny do kwadratu otworu względnego.

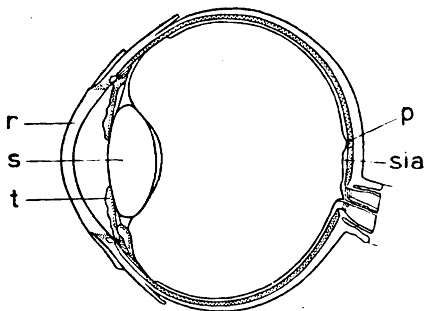
19.19. Aparat projekcyjny służy do wytwarzania obrazów powiększonych na ekranie. Rysunek 19.32 wyjaśnia budowę i działanie aparatu. Na rysunku



Rys. 19.32. Bieg promieni światła aparatu projekcyjnego

oznaczono przez: A — źródło światła, B — kondensor (układ soczewek skupiający światło wychodzące z A na przedmiocie lub przezroczu C, którego obraz chcemy otrzymać na ekranie), D — obiektyw wytwarzający obraz przezrocza na ekranie (punkt M' jest obrazem punktu M przezrocza).

19.20. Oko. Oko ludzkie jest układem powierzchni kulistych załamujących promienie światła (rys. 19.33). Gałka oczna jest utworem prawie kulistym. Otoczona jest silną błoną, której przednia część r silniej wypukła jest przezroczysta i nazywa się rogówką. Za rogówką znajduje się komora wypełniona płynem przezroczystym o współczynniku załamania takim samym jak współczynnik załamania wody. Tylną jej ścianę stanowi tęczówka t (błona kurczliwa zabarwiona, w środku której znajduje się okrągły otwór — źrenica). Za tym otworem znajduje się soczewka dwuwypukła z ciała chrząstkowatego przezroczystego o współczynniku załamania $n =$



Rys. 19. 33. Budowa oka

= 1,4085. Soczewka przylega do tęczówki powierzchnią mniej wypukłą. Wnętrze gałki ocznej między soczewką i dnem oka wypełnia galaretowata przezroczysta masa o współczynniku załamania równym współczynnikowi załamania wody. Dno oka wyściela błona *sia* zwana siatkówką, będąca rozgałęzieniem nerwu wzrokowego. Ma ona bardzo skomplikowaną warstwową budowę. Najwrażliwsza na światło jest jej najgłębsza warstwa zbudowana z czopków i pręcików. Najczulszą częścią tej błony jest tzw. plamka żółta zbudowana z samych czopków leżąca naprzeciwko źrenicy. Miejsce wejścia nerwu wzrokowego do gałki ocznej jest zupełnie ślepe. Rogówka wraz z cieczą za nią tworzą układ silnie skupiający światło o zdolności zbierającej 43,05 dioptrii. Soczewka oka ma zdolność zbierającą 19,11 dioptrii. Cały układ — 58,64 dioptrii. Obrazy wytworzone przez układ powierzchni łamiących oka tworzą się na siatkówce. Ponieważ obrazy dalekich przedmiotów tworzą się prawie w ognisku, więc siatkówka powinna znajdować się prawie w ognisku. Obrazy bliskich przedmiotów tworzą się poza ogniskiem, zatem ognisko powinno w tych przypadkach leżeć przed siatkówką. Skracanie i podłużanie odległości ogniskowej w oku jest dokonywane za pomocą soczewki, którą mięśnie znajdujące się w oku spłaszczają lub uwypuklają. Opisane zjawisko nazywamy akomodacją. Normalne oko zazwyczaj może przystosować się do odległości w granicach od 25 cm do ∞. W młodym wieku oko może się przystosowywać i do mniejszych odległości, aż do 10 cm.

Odległość, w której oko najlepiej widzi przedmioty, nazywamy odległością wyraźnego widzenia. Wynosi ona około 25 cm.

K r ó t k o w z r o c z n o ś ć. Gdy gałka oczna jest zbyt długa, ognisko wypada w znaczniejszej odległości przed siatkówką. Obrazy przedmiotów odległych tworzą się przed siatkówką, Oko widzi wtedy przedmioty odległe niewyraźnie. Przez zastosowanie odpowiednich soczewek rozpraszających (okulary) można doprowadzić do utworzenia się obrazu na siatkówce.

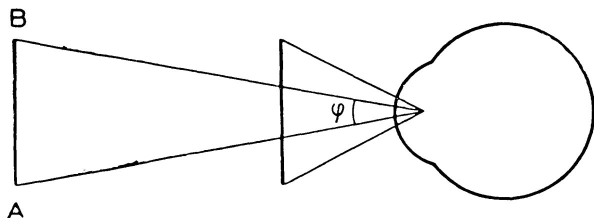
D a l e k o w z r o c z n o ś ć. Oko, w którym wyraźne obrazy bliskich przedmiotów tworzą się poza siatkówką, jest dalekowzroczne. Widzi ono dobrze tylko przedmioty odległe. W tym wypadku trzeba wiązki światła zamienić na bardziej zbieżne, stosujemy zatem odpowiednie soczewki skupiające (okulary).

19.21. Lupa. Siatkówka jest zbiorem czopków czułych na światło. Gdy przy widzeniu pobudzony jest tylko jeden czopek, widzimy tylko jeden punkt świecący. Jeżeli przedmiot jest tak mały lub tak odległy, że obraz nie pobudza jednocześnie większej liczby czopków, nie możemy rozpoznać szczegółów przedmiotu.

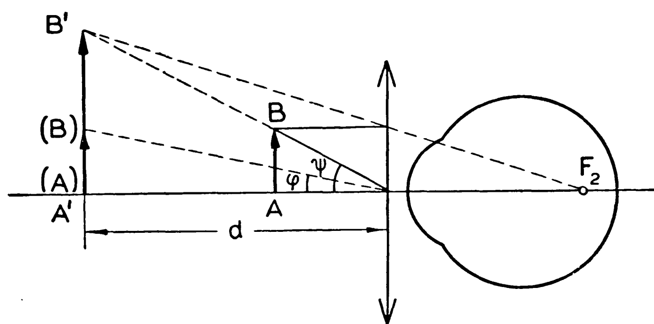
W plamce żółtej odległość czopków wynosi 0,004 mm. Tej wielkości obraz tworzy się wówczas, gdy do oka wpadają promienie tworzące kąt równy 1 minucie.

Gdy promienie wychodzące z przedmiotu tworzą kąty mniejsze, wówczas oczywiście żadnych szczegółów nie możemy rozpoznać. Kąt, pod którym do oka wchodzą promienie od skrajnych miejsc przedmiotu, nazywamy kątem widzenia.

Gdy chcemy rozpoznać szczegóły jakiegoś małego przedmiotu, musimy powiększyć kąt widzenia, a więc przysunąć go do oka (rys. 19.34). Wtedy znów obraz utworzy się poza siatkówką, wskutek czego nie będziemy go widzieli wyraźnie. Zaradzić można temu za pomocą soczewki skupiającej, która promienie wychodzące z bardzo bliskich przedmiotów, zbyt rozbieżne, aby tworzyły obraz na siatkówce, zamienia na mniej rozbieżne. Przedmiot obserwowany umieszczamy pomiędzy soczewką a jej ogniskiem tak, aby jego obraz znajdował się w odległości wyraźnego widzenia d (rys. 19.35). Oko umieszczone bezpośrednio za soczewką widzi wtedy pozorny powiększony obraz $A'B'$ przedmiotu AB w odległości wyraźnego widzenia d. Gdyby przedmiot AB znajdował się w odległości wyraźnego widzenia, a więc w płaszczyźnie $A'B'$ (zaznaczony jest na rysunku literami w nawiasie (A) (B), kąt widzenia byłby φ. W przybliżeniu



Rys. 19.34. Kąt widzenia



Rys. 19.35. Powiększenie kąta widzenia za pomocą lupy

$$\varphi = \frac{AB}{d}. \tag{19.59}$$

Obraz jego $A'B'$ oko widzi pod kątem

$$\psi = \frac{A'B'}{d}. \tag{19.60}$$

Powiększenie da nam wzór

$$m = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{A'B'}{AB}. \tag{19.61}$$

Lecz

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{|x'|}{|x|}. \tag{19.62}$$

Z równania soczewki $\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$ mnożąc je przez x' otrzymamy

$$1 - \frac{x'}{x} = \frac{x'}{f},$$

skąd

$$\frac{x'}{x} = 1 - \frac{x'}{f}. \tag{19.63}$$

Obie odległości x' i x są w tym przypadku ujemne, zatem

$$\frac{|x'|}{|x|} = \frac{x'}{x} \quad \text{oraz} \quad -\frac{x'}{f} = \frac{|x'|}{f},$$

Na powiększenie otrzymamy więc wzór

$$m = 1 + \frac{|x'|}{f}. \tag{19.64}$$

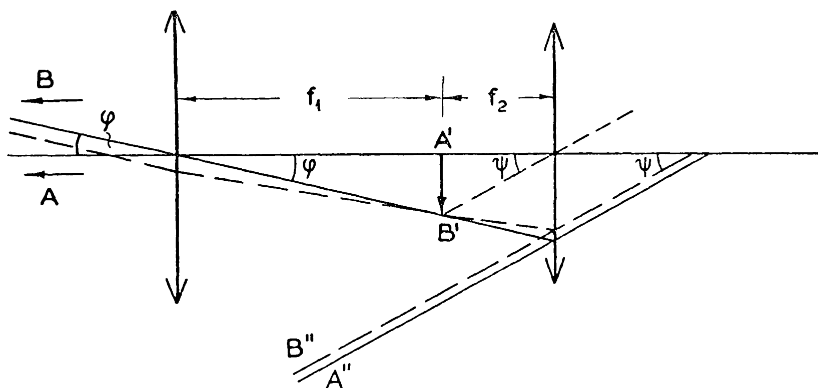
Gdy oko znajduje się zaraz za soczewką, to w przybliżeniu $x' = d$ i otrzymamy ostatecznie wzór

$$m = 1 + \frac{d}{f} \approx 1 + \frac{25}{f}.$$

Powiększenie jest tym większe, im krótsza ogniskowa soczewki i im w większej odległości d oko wyraźnie widzi przedmiot. Powiększenie jest więc znaczniejsze dla oka dalekowzrocznego niż dla krótkowzrocznego.

19.22. Luneta. Luneta służy do powiększania kąta, pod jakim widzimy odległy przedmiot przy niezmiennej akomodacji oka.

L u n e t a K e p l e r a składa się z dwóch soczewek skupiających, pierwszej zwykle o dużej średnicy i długiej ogniskowej, zwanej obiektywem, i drugiej bardzo małej, o krótkiej ogniskowej, zwanej okularem. Oś główna obu soczewek jest



Rys. 19.36. Bieg promieni w lunecie

wspólna. Drugie ognisko obiektywu schodzi się w przybliżeniu z pierwszym ogniskiem okularu. Obiektyw wytwarza obraz rzeczywisty $A'B'$ bardzo odległego przedmiotu AB w płaszczyźnie ogniskowej (rys. 19.36), która jest jednocześnie płaszczyzną ogniskową okularu. Zatem promienie wychodzące np. z punktu B' i przechodzące przez okular są w przybliżeniu równoległe.

Oko widzi również bardzo oddalony obraz pozorny $A''B''$ przedmiotu $A'B'$. Powiększeniem lunety nazywamy stosunek kąta ψ, pod jakim oko widzi obraz $A''B''$, do kąta φ, pod jakim by oko widziało przedmiot bez pomocy lunety:

$$m = \frac{\psi}{\varphi}. \tag{19.65}$$

W przybliżeniu

$$\psi = \frac{A'B'}{f_2}$$

$\left(\frac{A'B'}{f_2} = \operatorname{tg}\psi\right.$, gdy jednak kąt ψ jest niewielki, możemy przyjąć $\left.\operatorname{tg}\psi \approx \psi\right)$.

Podobnie $\varphi = \frac{A'B'}{f_1}$, zatem na powiększenie m otrzymamy

$$m = \frac{f_1}{f_2}. \tag{19.66}$$

Powiększenie lunety równa się stosunkowi ogniskowej obiektywu do ogniskowej okularu.

Luneta Keplera, jak widać z rysunku, daje obraz odwrócony. Aby uzyskać obrazy proste, trzeba użyć jeszcze jednej soczewki odwracającej (luneta ziemska) albo też dwóch pryzmatów, na ścianach których promienie ulegają czterokrotnemu całkowitemu odbiciu (luneta i lornetka pryzmatyczna).

Okular lunety można zbliżać nieco i oddalać od obiektywu w celu przystosowania rozbieżności wiązek światła do właściwości oka. Okular musi się ustawić tak, aby otrzymany w oku obraz znalazł się na siatkówce. Obracając za pomocą kółeczka zębatego gałkę, na osi której jest ono umocowane, przesuwamy okular tak długo, dopóki nie będziemy widzieli zupełnie ostro wytworzonego obrazu.

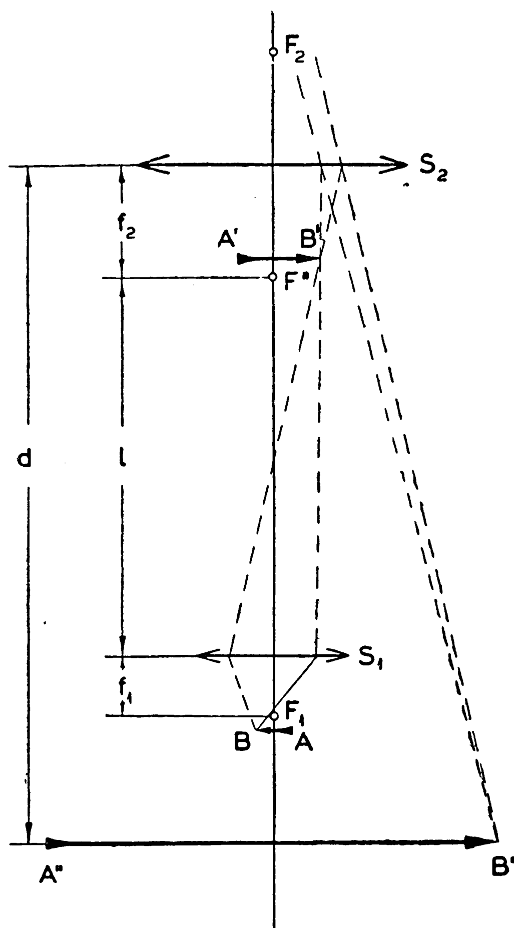
Przy oglądaniu przedmiotów bliskich przez lunetę, co się zdarza często w laboratorium, ponieważ obrazy ich tworzą się poza płaszczyzną ogniskową obiektywu, trzeba oddalić okular od obiektywu, luneta musi więc być dłuższa.

L u n e t a G a l i l e u s z a. W lunecie Galileusza obiektywem jest soczewka skupiająca, okularem — soczewka rozpraszająca o krótszej ogniskowej. Połączone są one tak, że drogi ogniskowe obu soczewek schodzą się w przybliżeniu w jednym punkcie. Luneta Galileusza daje obraz prosty i powiększony. Podwójna luneta Galileusza używana jest jako lornetka teatralna.

19.23. Mikroskop. Mikroskop służy do oglądania bardzo niewielkich przedmiotów, które możemy dowolnie zbliżać do soczewki. Składa się — podobnie jak luneta — z dwóch skupiających soczewek. Pierwsza, zwana obiektywem, ma bardzo krótką ogniskową wynoszącą często parę milimetrów, druga — okular, też o bardzo krótkiej ogniskowej, służy — podobnie jak w lunecie — jako lupa, przez którą oglądamy obraz rzeczywisty wytworzony przez obiektyw.

Przedmiot oglądany AB umieszcza się tuż za ogniskiem obiektywu (rys. 19.37), wskutek czego obraz jego rzeczywisty $A'B'$, bardzo znacznie powiększony, tworzy

się w znacznej odległości od obiektywu. Przez okular (też o krótkiej ogniskowej, często kilka mm) oglądamy obraz pozorny i powiększony $A''B''$ pierwszego obrazu $A'B'$. Ponieważ oglądamy zazwyczaj przedmioty nieświecące, oświetlamy je silnie z dołu lub, jeżeli są nieprzezroczyste, z góry. Koncentrujemy światło na przedmiocie za pomocą silnej soczewki skupiającej, zwanej kondensorem.



Rys. 19.37. Bieg promieni w mikroskopie

Drugie ognisko obiektywu nie schodzi się tu tak jak przy lunecie z pierwszym ogniskiem okularu. Znajdują się one w znaczniejszej od siebie odległości. Obiektyw i okular umocowane są w poczernionej rurze zwanej tubusem, którego długość wynosi zwykle kilkanaście centymetrów. Cały tubus da się przesuwać do góry i na dół za pomocą odpowiedniej śruby. Przesuwamy go ostrożnie, patrząc w okular, dopóki obraz nie będzie zupełnie wyraźny.

Powiększenie mikroskopu określa się inaczej niż powiększenie lunety. Powiększeniem mikroskopu nazywamy mianowicie stosunek wielkości obrazu pozornego $A''B''$, który widzimy przez mikroskop, do wielkości przedmiotu AB. Pierwsza soczewka S_1 daje powiększenie

$$m_1 = \frac{A'B'}{AB} = \frac{|x'|}{|x|}. \quad (19.67)$$

Lecz odległość x przedmiotu od soczewki prawie nie różni się od odległości ogniskowej f_1 pierwszej soczewki. Zatem $x \approx f_1$, czyli odległości ogniskowej obiektywu. Zaś odległość obrazu x' równa się w przybliżeniu długości tubusu l. Będziemy więc mieli

$$m_1 = \frac{l}{f_1}. \quad (19.68)$$

Obraz $A'B'$, który daje obiektyw, wytwarza się między ogniskiem okularu i samym okularem. Jednak wytwarza się on tak blisko ogniska, że możemy za odległość jego od okularu przyjąć f_2 — ogniskową soczewki S_2. Obraz jego pozorny $A''B''$ musi się wytwarzać w odległości wyraźnego widzenia d oka, które znajduje się

tuż przy okularze. Zatem odległość obrazu $A''B''$ od okularu będzie równa d. Na powiększenie okularu m_2 otrzymamy więc wzór

$$m_2 = \frac{A''B''}{A'B'} = \frac{d}{f_2}. \tag{19.69}$$

Obraz powiększony przez obiektyw m_1 razy będzie powiększony przez okular m_2 razy. Całkowite powiększenie m będzie równe iloczynowi $m_1 m_2$:

$$m = m_1 m_2 = \frac{l}{f_1}\frac{d}{f_2} = d\frac{l}{f_1 f_2}. \tag{19.70}$$

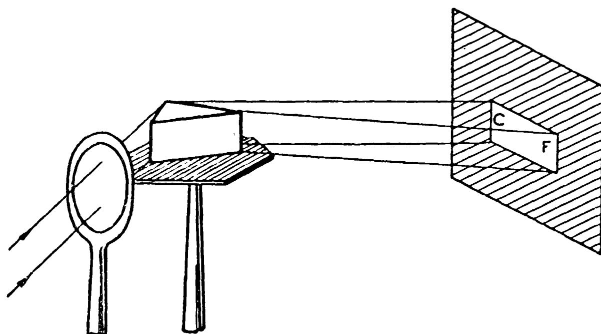
Powiększenie mikroskopu jest proporcjonalne do długości tubusa l, czyli w przybliżeniu do odległości między ogniskami obiektywu i okularu, i do odległości wyraźnego widzenia d, odwrotnie proporcjonalne zaś do odległości ogniskowych obiektywu i okularu.

Aby obrazy dawane przez mikroskop były wyraźne, musi przede wszystkim obiektyw, który daje bardzo silnie powiększony obraz, być wolny od aberracji sferycznej i chromatycznej. Aby te wady usunąć, zestawia się obiektywy z kilku, czasem nawet z kilkunastu soczewek z różnych gatunków szkła i o rozmaitych zdolnościach zbierających.

Aby powiększenie, które daje mikroskop, było istotnie pożyteczne, trzeba, żeby w obrazie rozpoznawalne były drobne szczegóły budowy przedmiotu. Możliwość rozpoznawania drobnych szczegółów, tzw. *zdolność rozpoznawcza* mikroskopu, ma jednak kres, poza który posunąć się nie można. Pochodzi to stąd, że sama fala światła ma skończoną długość. Posługując się falami świetlnymi jako środkiem, nie możemy rozpoznawać szczegółów znacznie mniejszych od długości użytych fal światła.

19.24. Rozszczepienie, czyli dyspersja światła.

19.24. Rozszczepienie, czyli dyspersja światła. Gdy na pryzmat rzucimy wiązkę promieni światła białego, np. słonecznego, z lampy łukowej lub żarowej, promienie po przejściu przez pryzmat nie tylko się odchylą, ale również rozszczepią (rys. 19.38). Następuje to wskutek tego, że światło białe jest mieszaniną promieni różnych barw, dla których szkło i inne środowiska przezroczyste mają różne współczynniki załamania. Najsilniej załamuje się światło fioletowe, najsłabiej światło czerwone.



Rys. 19.38. Otrzymywanie widma światła białego

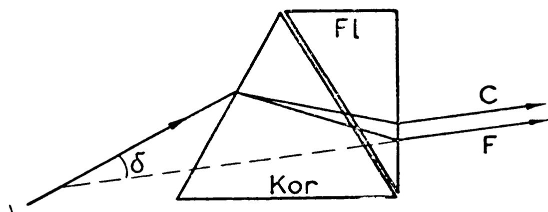
Światło rozszczepione można zebrać za pomocą drugiego pryzmatu z powrotem w wiązkę białą.

Przeważnie barwy ciał w przyrodzie pochodzą stąd, że powierzchnia ciał niektóre z tych składowych promieni odbija, inne pochłania lub przepuszcza.

W i e l k o ś ć d y s p e r s j i p r y z m a t u. Zależnie od gatunku szkła różnica w odchyleniu promieni skrajnych, czerwonego i fioletowego, może być mniejsza lub większa. Różnica między współczynnikiem załamania dla promieni czerwonych (6560 Å) i niebieskich (4860 Å) daje nam miarę średniej dyspersji pryzmatu. Dyspersja pryzmatu zależy od materiału, z którego pryzmat jest zrobiony, oraz od kąta łamiącego pryzmatu. Jeżeli weźmiemy trzy pryzmaty o tym samym kącie łamiącym ze szkła koronowego (lekkiego), ze szkła ołowiowego ciężkiego (flintu) oraz z dwusiarczku węgla (naczynie pryzmatyczne napełnione dwusiarczkiem węgla), to pryzmat z flintu daje prawie dwa razy dłuższe widmo niż pryzmat ze szkła koronowego, zaś pryzmat z dwusiarczku węgla — prawie dwa razy dłuższe niż pryzmat z flintu.

Ciała przezroczyste b e z b a r w n e załamują najsilniej światło fioletowe, najsłabiej — czerwone. Jest to tak zwana normalna dyspersja. Natomiast niektóre ciała zabarwione, np. roztwór fuksyny, załamują czerwoną część widma silniej od niebieskiej. Zjawisko to nazywamy dyspersją anomalną. Dyspersja anomalna łączy się zawsze z silną absorpcją (pochłanianiem) światła.

Korzystając z tego, iż różne gatunki szkła, niewiele się różniące średnimi współczynnikami załamania, różnią się znacznie wielkością dyspersji, można zestawić dwa pryzmaty krawędziami w przeciwne strony i osiągnąć skompensowanie rozszczepienia światła. Taki pryzmat, tzw. achromatyczny, załamuje światło nie rozszczepiając go (rys. 19.39). Pryzmaty skleja się balsamem kanadyjskim.



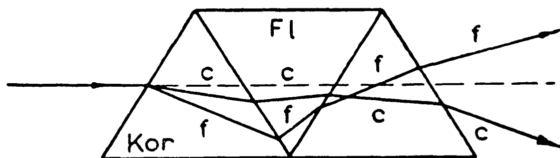
Rys. 19.39. Pryzmat achromatyczny


Rys. 19.40. Soczewka achromatyczna

Najważniejszym zastosowaniem takiej kompensacji rozszczepienia światła są soczewki achromatyczne. Soczewki takie składają się z dwóch soczewek sklejonych balsamem kanadyjskim, jednej silnie skupiającej, dwuwypukłej i słabo rozszczepiającej (szkło koronowe), drugiej słabo załamującej, płasko-wklęsłej lub wklęsło-wypukłej, ze szkła silnie rozszczepiającego (rys. 19.40). W ten sposób

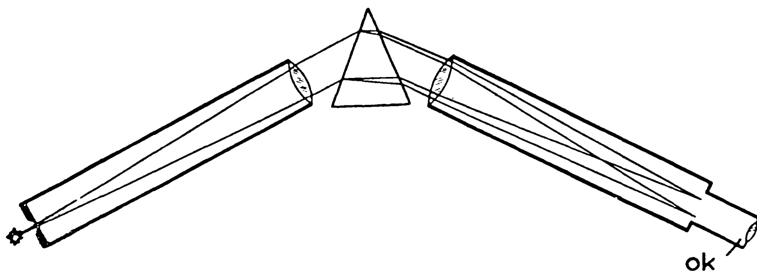
można w bardzo znacznym stopniu usunąć rozszczepienie światła. Soczewki takie używane z reguły do obiektywów lunet, mikroskopów, lornetek itd. są wolne od aberracji chromatycznej.

Można również zestawić kilka pryzmatów z odpowiednich gatunków szkła tak, że odchylenie promieni od pierwotnego kierunku (w pewnej barwie) zostanie zniesione, natomiast pozostanie rozszczepienie (rys. 19.41). Takie pryzmaty zwane „à vision directe" (tzn. do patrzenia w kierunku prostym) są używane do spektroskopów kieszonkowych, astronomicznych itp.



Rys. 19.41. Pryzmat „à vision directe"

19.25. Widmo. Zazwyczaj otrzymujemy widmo w ten sposób, iż wiązkę promieni światła przepuszczoną przez wąską szczelinę rzucamy na soczewkę tak, aby uzyskać ostry obraz szczeliny na ekranie, po czym za soczewką bezpośrednio stawiamy pryzmat. Ponieważ każdy gatunek promieni daje w innym miejscu obraz szczeliny, zatem otrzymamy wstęgę barwną utworzoną z bardzo wielkiej liczby obrazów tych szczelin. Wstęgę nieprzerwaną, tzw. widmo ciągłe, otrzymuje się wtedy, gdy źródłem światła jest rozżarzone c i a ł o s t a ł e lub c i e k ł e. Gdy natomiast świecą ciała l o t n e, gazy r o z r z e d z o n e lub p a r y, wysyłają one zazwyczaj niektóre tylko gatunki promieni. Na ekranie



Rys. 19.42. Spektroskop

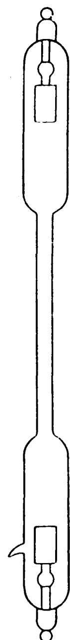
otrzymamy obrazy szczeliny w niektórych tylko barwach. Ponieważ obrazy szczeliny mają wygląd linijek, jeżeli szczelina jest bardzo wąska, przeto widma takie nazywamy liniowymi.

Do dokładnego badania widm używa się spektroskopów, spektrometrów i spektrografów.

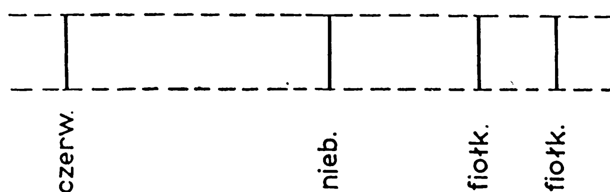
W spektroskopie lub spektrografie obserwowane źródło światła umieszcza się możliwie blisko bardzo wąskiej szczeliny (rys. 19.42). Szczelina umieszczona jest w płaszczyźnie ogniskowej soczewki skupiającej. Wiązka po przejściu przez soczewkę staje się równoległa, pada na pryzmat, załamuje się, po czym pada

na drugą soczewkę skupiającą, wytwarzającą obraz szczeliny w swojej płaszczyźnie ogniskowej. Obraz ten oglądamy za pomocą okularu *Ok* działającego jako lupa. W spektrografie w tym miejscu, gdzie obraz się wytwarza, umieszcza się kliszę fotograficzną, na której po wywołaniu i utrwaleniu otrzymujemy linie będące obrazami szczeliny wytworzonymi przez światło różnej barwy, zatem, jak to później wykażemy, przez fale różnej długości.

19.26 Analiza widmowa. Aby móc obserwować widmo świecącego gazu, używa się do wywołania jego świecenia rurki do wyładowań. Jest to rurka szklana, zwykle z przewężeniem w środku, z wtopionymi na dwóch końcach elektrodami metalowymi (rys. 19.43). Rurkę napełnia się gazem pod ciśnieniem około 1 mmHg. Gdy do elektrod przyłączymy źródło dostatecznie wysokiego napięcia (kilkaset do paru tysięcy woltów), np. induktor Ruhmkorffa, przez rurkę przechodzi prąd elektryczny i gaz wewnątrz rurki zaczyna świecić. Świecenie to jest szczególnie silne w przewężonej części rurki, którą ustawia się przy szczelinie spektroskopu. Pary w niektórych przypadkach też można pobudzać w podobny sposób do świecenia, np. parę rtęci. Jeżeli chodzi o pary ciał, które w normalnej temperaturze są ciałami stałymi, to, gdy są łatwo lotne, można je pobudzić do świecenia umieszczając próbkę danego ciała na druciku platynowym w płomieniu palnika bunzenowskiego. Światło par metali trudniej lotnych można otrzymać za pomocą iskier elektrycznych bijących między końcami drucików z metalu badanego lub też umieszczając dane ciało na węglu lampy łukowej.



Rys. 19.43. Rurka Geisslera



Rys. 19.44. Widmo liniowe wodoru

W roku 1859 Bunsen i Kirchhoff odkryli ważny fakt że każdy pierwiastek w stanie lotnym, w określonych warunkach pobudzony do świecenia, daje tylko sobie właściwe widmo liniowe. Każdy pierwiastek daje pewną, większą albo mniejszą liczbę linii widmowych w pewnych określonych barwach. Sód np. daje jedną linię żółtą, która w silnych spektroskopach rozpada się na dwie bardzo bliskie linie. Wodór atomowy pobudzony do świecenia daje cztery linie widmowe widzialne: czerwoną, niebieską i dwie fioletowe (rys. 19.44). Widma rozmaitych

pierwiastków zostały zbadane i skatalogowane. Znając je można, na odwrót, z linii występujących w widmie jakiegoś bliżej nieznanego ciała wnioskować o tym, jakie pierwiastki wchodzą w skład ciała. Metoda ta nosi nazwę analizy widmowej. Jest ona nadzwyczaj czuła. Obecność sodu np. w ilości $3 \cdot 10^{-7}$ mg da się już stwierdzić za pomocą analizy widmowej, zaś obecność litu w ilości 10^{-7} mg. Niektóre pierwiastki dające nieznane w swoim czasie linie zostały odkryte dzięki analizie widmowej. Tak np. gaz hel został najpierw odkryty na Słońcu dzięki liniom widmowym występującym w widmie Słońca, a dopiero później znaleziono go na Ziemi.

Fraunhofer zauważył w widmie światła słonecznego czarne linie, które poznaczał literami A, B, C, D, E, F, G, H, K. Powstawanie tych linii wytłumaczył Kirchhoff na podstawie doświadczeń nad pochłanianiem światła przez pary lub gazy świecące. Jeżeli na drodze wiązki promieni dających widmo ciągłe, np. światła lampy łukowej, ustawimy palnik bunzenowski, w którym świecą pary sodu, i będziemy obserwować otrzymane wtedy widmo, to zauważymy w żółtej części widma ciemną linię dokładnie w tym samym miejscu, w którym normalnie występuje żółta linia sodu.

Ciemna linia pochodzi stąd, że świecąca para sodu pochłania z silniejszego promieniowania lampy łukowej światło żółte, a chociaż sama wysyła światło tej samej barwy, jednak znacznie słabsze, wskutek czego występują ciemne linie na jasnym tle widmą ciągłego.

Kirchhoff i Bunsen na podstawie większej liczby podobnych doświadczeń wygłosili następujące prawo: świecący gaz lub para pochłaniają te rodzaje promieniowania, które same wysyłają. To zjawisko pochłaniania niektórych gatunków promieniowania nazywamy absorpcją, a otrzymane w ten sposób widmo — widmem absorpcyjnym. Linie Fraunhofera są to właśnie linie absorpcyjne pojawiające się w widmie Słońca dzięki pochłanianiu niektórych części promieniowania przez atmosferę Słońca złożoną z żarzących się gazów.

Za pomocą kliszy fotograficznej lub ekranu fluoryzującego (świecącego pod wpływem promieniowania) możemy stwierdzić przy użyciu soczewek i pryzmatu z kwarcu, poza fioletowym końcem widma, promieniowanie dla oka niewidzialne, lecz działające silnie chemicznie. Nazywamy je promieniowaniem nadfioletowym. Światło lampy rtęciowo-kwarcowej oraz Słońca na wysokich górach obfituje w promieniowanie nadfioletowe.

Posługując się termometrem, którego bańka jest pokryta sadzą, lub za pomocą odpowiednio uczulonej kliszy fotograficznej można stwierdzić w widmie również poza czerwonym jego końcem obecność promieniowania niewidzialnego dla oka. Promieniowanie to nazywamy podczerwonym. Ponieważ szkło pochłania promienie podczerwone, trzeba przy ich badaniu używać soczewek i pryzmatów z soli kuchennej, ewentualnie kwarcu.

W widmach gazów prócz linij występują często tzw. pasma, zagęszczenia linii widmowych, zaczynające się zwykle jasną krawędzią, a następnie o zmniej-

szającej się stopniowo jasności. Przy słabym rozszczepieniu wyglądają jak części widma ciągłego. Jest to tzw. widmo pasmowe.

Widma pasmowe występują wtedy, gdy drobiny gazu są pobudzone do świecenia. Gdy świecą atomy, szczególnie przy znacznym rozrzedzeniu gazu, światło wysyłane daje widmo liniowe.

Zadania

19.1. O jaki kąt zmienia się kierunek promienia padającego na zwierciadło pod kątem α po odbiciu?

Odpowiedź: $180° - 2\alpha$.

19.2. O jaki kąt obróci się promień odbity od zwierciadła przy obrocie tego ostatniego o kąt α?

Odpowiedź: 2α.

19.3. Promień światła odbija się po kolei od dwóch zwierciadeł, których płaszczyzny (od których promień się odbija) tworzą kąt φ. O jaki kąt zmieni kierunek promień padający?

Odpowiedź: $360° - 2\varphi$.

19.4. Jaką co najmniej wysokość powinno mieć zwierciadło zawieszone pionowo, aby człowiek wysokości h stojący przed nim widział całą swoją postać?

Odpowiedź: $^1/_2\, h$.

19.5. Punkt świecący A leży na osi optycznej zwierciadła wklęsłego w odległości $x = 3f$ od zwierciadła. Gdzie się utworzy jego obraz i czy będzie rzeczywisty czy pozorny?

Odpowiedź: Obraz rzeczywisty w odległości $^3/_2\, f$ od zwierciadła.

19.6. Obliczyć kąt załamania dla promienia padającego z powietrza do wody (współczynnik załamania $n = {}^4/_3$), gdy kąt padania jest 30°, 45°, 54°, 65° 90°.

Odpowiedź: 22°1′, 32°1′, 37°21′, 42°49′, 48°34′.

19.7. Jaką prędkość ma światło w wodzie i w szkle, jeżeli jego prędkość w powietrzu $v_1 = 299\,700$ km/sec (współczynnik załamania wody względem powietrza $n_1 = {}^4/_3$, szkła względem powietrza $n_2 = {}^3/_2$).

Odpowiedź: W wodzie 224 775 km/sec, w szkle — 199 800 km/sec.

19.8. Bezwzględne współczynniki załamania oliwy i wody są 1,48 i 1,33. Przy jakim biegu promienia nastąpi całkowite odbicie od powierzchni granicznej między oliwą i wodą i jaki jest kąt graniczny α?

Odpowiedź: Od oliwy do wody, $\alpha = 64°$.

19.9. O ile przesunie się (s) promień światła po przejściu przez szybę szklaną grubości $d = 3$ mm, jeżeli kąt padania $\alpha = 38°$?

Odpowiedź: $s = \dfrac{d \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = 0{,}8$ mm.

√**19.10.** Jaka jest grubość szyby, przez którą patrzący pod kątem $\alpha = 60°$ widzi przedmioty przesunięte o $s = 2$ mm?

Odpowiedź: $d = \dfrac{s \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)} = 3{,}92$ mm.

19.11. Jaki jest współczynnik załamania szkła ołowiowego (bezwzględny współczynnik załamania 1,75) względem wody (bezwzględny współczynnik załamania 1,33)?

Odpowiedź: 1,31.

19.12. Szkło ($n_2 = 1{,}75$) zanurzone w wodzie ($n_1 = 1{,}33$) odgraniczone jest od niej powierzchnią kulistą o promieniu 10 cm. Jakie będą odległości ogniskowe takiego układu?

Odpowiedź: $f_1 = -31{,}7$ cm; $f_2 = 41{,}7$ cm.

19.13. Jakie będą odległości ogniskowe, gdy wodę zastąpimy powietrzem?

Odpowiedź: $f_1 = -13{,}3$ cm; $f_2 = 23{,}3$ cm.

19.14. Jaka jest zdolność zbierająca Z i odległość ogniskowa f cienkiej soczewki szklanej ($n = 1{,}5$) dwuwypukłej, której promienie krzywizny mają długość 15 cm i 30 cm?

Odpowiedź: $Z = 5$ dioptrii, $f = 20$ cm.

19.15. Jaki musi być promień krzywizny cienkiej soczewki szklanej ($n = 1{,}5$) płasko-wypukłej, aby jej zdolność zbierająca wynosiła 2,5 dioptrii?

Odpowiedź: $r = 20$ cm.

19.16. Cienka soczewka szklana ($n = 1{,}5$) ma zdolność zbierającą $Z = 5$ dioptrii. Jaką będzie miała zdolność zbierającą Z' w wodzie ($n = 1{,}33$)?

Odpowiedź: $Z' = Z\dfrac{n - n'}{n'(n-1)} = 1{,}28$ dioptrii.

19.17. Cienka soczewka szklana ($n = 1{,}5$) ma w powietrzu zdolność zbierającą $Z = +8$ dioptrii. Zanurzona w dwusiarczku węgla (n') ma zdolność zbierającą $Z' = -1{,}42$ dioptrii. Jaki jest współczynnik załamania n' dwusiarczku węgla?

Odpowiedź: $n' = 1{,}65$.

19.18. Aparat fotograficzny ma obiektyw o odległości ogniskowej $f = 5$ cm. Jaką wysokość będzie miał na filmie obraz przedmiotu wysokości 1,5 m znajdującego się w odległości 3 m od aparatu?

Odpowiedź: 25,4 mm.

19.19. Jaką ogniskową f powinna mieć soczewka przy aparacie projekcyjnym, aby na ekranie znajdującym się w odległości $d = 6{,}3$ m od aparatu otrzymać $N = 20$-krotne powiększenie wyświetlanego przezrocza?

Odpowiedź: $f = \dfrac{d}{N+1} = 30$ cm.

19.20. Cienka płasko-wklęsła soczewka szklana ($n = 1{,}5$) została włożona do wody wklęsłą stroną ku dołowi, tak że w tej wklęsłej części znajdowało się powietrze. Promień powierzchni wklęsłej $r = 15$ cm. Jaka jest odległość ogniskowa f takiego układu?

Odpowiedź: $f = -\dfrac{n_1 r}{n-1} = -39{,}9$ cm.

19.21. Jakie jest powiększenie mikroskopu, którego obiektyw ma odległość ogniskową $f_1 = 2$ mm, okular — $f_2 = 20$ mm, a tubus — długość 14 cm?

Odpowiedź: 875 razy.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Jakie są znane fale elektromagnetyczne dłuższe i krótsze od fal świetlnych?
2. Jak określamy promień światła, obraz pozorny, obraz rzeczywisty punktu świecącego?
3. Jakie są prawa odbijania się światła? Jakie obrazy dają zwierciadła płaskie? Do czego można używać zwierciadeł parabolicznych?
4. Co nazywamy apertura, główną osią optyczną, wierzchołkiem zwierciadła sferycznego? Jaki jest związek między odległością punktu świecącego od zwierciadła a odległością jego obrazu?

5. Jakie są prawa załamania światła? Co nazywamy współczynnikiem załamania? Jaki jest jego związek z prędkościami światła w danych środowiskach?
6. W jakich przypadkach następuje całkowite wewnętrzne odbicie?
7. Jak się określa względny i bezwzględny współczynnik załamania?
8. Jaki jest bieg promieni światła w pryzmacie?
9. Co się otrzymuje, gdy promienie wychodzące z punktu świecącego padają na powierzchnię kulistą? Jak znaleźć zależność odległości obrazu od odległości punktu świecącego od wierzchołka powierzchni kulistej?
10. Jak jest zbudowana soczewka? Jak otrzymać równanie soczewki bardzo cienkiej?
11. Jakie punkty nazywamy ogniskami soczewki?
12. Czy odległości ogniskowe w dwóch środowiskach oddzielonych powierzchnią kulistą są równe czy nie? Czy odległości ogniskowe soczewki są równe czy nie? Jakie są te odległości?
13. Jaka jest jednostka zdolności zbierającej soczewki? Jakich odmian soczewek używamy?
14. Jak można wykreślić obraz przedmiotu świecącego dawany przez soczewkę?
15. Co nazywamy liniowym powiększeniem obrazu?
16. Jaki jest wzór Newtona dla soczewki? Jak go otrzymać?
17. Jak się zmienia odległość i wielkość obrazu przy przesuwaniu przedmiotu od $-\infty$ aż do soczewki?
18. Jakie są wady soczewek?
19. Jaka jest zależność ogniskowej układu dwóch soczewek od ogniskowych poszczególnych soczewek? gdy soczewki znajdują się w odległości *d*? gdy się stykają ze sobą?
20. Jakie są przyrządy oparte na działaniu soczewek? Jak one działają?
21. Jak jest zbudowane oko? Jakie jest jego działanie?
22. Jakie jest działanie lupy? lunety?
23. Jak jest zbudowany mikroskop? Jakie daje powiększenie? Jak się je określa?
24. Na czym polega zjawisko rozszczepienia, czyli dyspersji światła?
25. Jak się otrzymuje widmo? Jakie rodzaje widm obserwujemy?
26. Kiedy ciała świecące dają widmo ciągłe, kiedy liniowe, kiedy pasmowe?
27. Na czym polega analiza widmowa?
28. Kiedy otrzymujemy widmo absorpcyjne?
29. Jakie promieniowanie nazywamy podczerwonym? jakie nadfioletowym?

20. O naturze światła

20.1. O teoriach światła. W początkach XIX wieku panowała w nauce tzw. korpuskularna teoria światła. Za jej twórcę podawany bywa Newton. Według tej teorii światło polega na ruchu maleńkich ciałek, korpuskuł, wylatujących ze źródła światła, poruszających się po liniach prostych, które wpadając do oka wywołują wrażenie światła.

W roku 1690 Huygens wygłosił swą falową teorię światła, według której rozchodzenie się światła polega nie na ruchu cząstek, lecz na ruchu fal. Zaburzenia okresowe faliste rozchodzą się podobnie jak fale na wodzie lub fale w ciałach sprężystych, niosąc ze sobą energię.

Ponieważ teoria Newtona tłumaczyła wszystkie znane podówczas fakty doświadczalne, więc o teorii Huygensa zapomniano. Na początku XIX wieku została ona wznowiona przez Younga i Fresnela. Teoria korpuskularna nie mogła bowiem wytłumaczyć zjawisk obserwowanych przez tych badaczy, mianowicie dyfrakcji i interferencji światła. Teoria falowa wytłumaczyła wszystkie poznane później zjawiska, wobec których teoria korpuskularna była bezsilna.

Według teorii Maxwella fale świetlne są falami elektromagnetycznymi. Teraz nie ulega już dla nas żadnej wątpliwości, że światło polega na rozchodzeniu się fal elektromagnetycznych wywołanych przez zaburzenia elektryczne w atomach lub drobinach ciał.

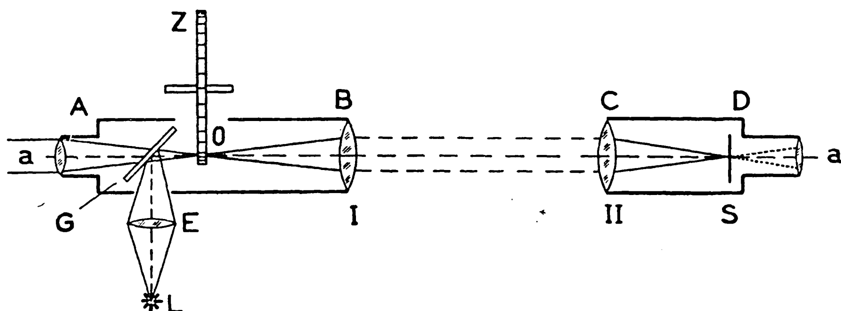
Znamy jednak obecnie takie zjawiska, które możemy tylko wtedy wytłumaczyć, gdy przyjmiemy, że światło ma dwoistą naturę: w pewnych zjawiskach objawia się jego natura falowa, w innych korpuskularna.

20.2. Prędkość światła. Prędkość światła w próżni wyliczył po raz pierwszy, jak już wspomnieliśmy w 19.1, Olaf Römer z zaćmień księżyców Jowisza.

Za pomocą doświadczenia wykonanego na Ziemi wyznaczył ją w r. 1849 Fizeau. Schemat aparatury Fizeau przedstawia rys. 20.1. Na końcach prostej *aa* w odległości 8633 m znajdują się dwie lunety *I* i *II*, zwrócone do siebie obiektywami i tak nastawione, by ich osie leżały w prostej *aa*. Przez wycięcie w rurze *I* lunety wchodzi do jej środka koło zębate *Z*.

Koło obraca się dokoła osi równoległej do prostej *aa*. Pomiędzy okularem *A* i zębami *O* koła zębatego znajduje się szyba *G* tworząca z prostą *aa* kąt 45°. Światło pochodzące ze źródła *L* wchodzi do lunety *I*, odbija się od szyby *G*, biegnie

do lunety *II*, odbija się tu od zwierciadła *S* i biegnie z powrotem do lunety *I*. Gdy koło *Z* wprawimy w ruch obrotowy, to obserwator patrzący w okular *A* lunety *I* widzi na przemian rozjaśnienia i zaciemnienia pola widzenia. Przy pewnej określonej prędkości obrotu pole widzenia staje się całkowicie ciemne. Zaciemnienie



Rys. 20.1. Metoda Fizeau pomiaru prędkości światła

pola widzenia następuje wtedy, gdy promień, który przejdzie przez lukę pomiędzy zębami, w drodze powrotnej po odbiciu od zwierciadła *S* trafi na ząb. Łatwo zrozumieć, że gdy podwoimy prędkość obrotu, to pole widzenia rozjaśni się itd.

Fizeau zastosował koło o 720 zębach i tyluż przerwach. Po raz pierwszy wystąpiło zaciemnienie przy 12,6 obrotach w sekundzie. Zatem czas potrzebny na to, by środek zęba przeszedł na miejsce środka luki pomiędzy zębami, wynosił $^1/_{2\cdot 720\cdot 12,6} = {}^1/_{18\,000}$ sec. W tym czasie światło przebiegło dwukrotnie odległość $OS = 2\cdot 8633$ m $= 17\,266$ m ≈ 17 km. Stąd

$$c = \frac{17 \text{ km}}{^1/_{18\,000} \text{ sec}} = 18\,000 \cdot 17 \text{ km/sec} = 306\,000 \text{ km/sec}.$$

Później wynaleziono metody pozwalające na wykonanie pomiarów prędkości światła nawet w laboratorium, gdzie droga przebywana przez światło jest bardzo krótka. Metody te pozwoliły również na wyznaczenie prędkości światła w innych środowiskach przezroczystych.

Wielokrotnie powtarzane pomiary w późniejszych czasach dały na prędkość światła liczbę nieco mniejszą. Pomiary wykonane w ostatnich czasach dają liczby mało różniące się od wartości

$$c = 299\,793 \text{ km/sec}.$$

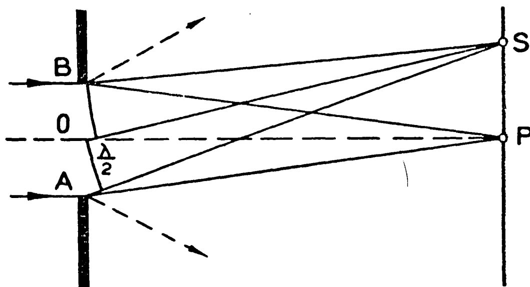
Jak widać, liczba ta jest tylko o 0,07% mniejsza od 300 000 km/sec. Toteż w wielu rachunkach przybliżonych używamy tej ostatniej zaokrąglonej liczby.

Prędkość światła w środowiskach przezroczystych jest mniejsza niż w powietrzu i zgodna z teorią falową światła, według której współczynnik załamania

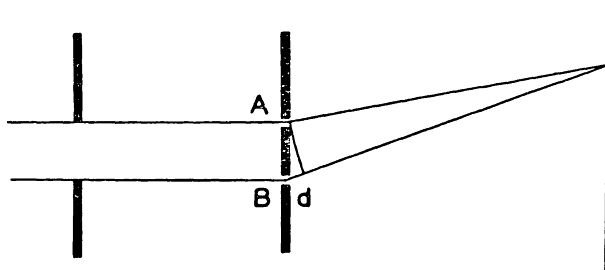
$$n = \frac{c}{v},$$

gdzie v jest prędkością światła w danym środowisku.

20. 3. Prążki dyfrakcyjne. Gdy na wąską szczelinę wyciętą np. w zasłonie blaszanej rzucimy wiązkę promieni światła jednobarwnego, to na ekranie umieszczonym po drugiej stronie zasłony nie zobaczymy obrazu szczeliny, lecz pasek jasny, tym szerszy, im szczelina jest węższa, o brzegach zaciemniających się stopniowo, a po obu jego stronach prążki równoległe na przemian jasne i ciemne, zwane prążkami dyfrakcyjnymi. Wiązka światła po przejściu przez wąską szczelinę staje się rozbieżna tym więcej, im węższa jest szczelina. Mamy tu zjawisko uginania się fal. Szczelina staje się źródłem fal rozchodzących się wachlarzowato. Wytłumaczenie powstania prążków dyfrakcyjnych jest następujące: w punkcie P leżącym na osi OP fale cząstkowe wychodzące (rys. 20.2) z różnych punktów otworu AB spotykają się w zgodnych fazach, zatem w tym miejscu otrzymamy oświetlenie ekranu. Lecz inaczej może być w punkcie S leżącym z boku. Wykreślmy z punktu S łuk najpierw promieniem SB, a następnie promieniami $SB+\lambda/2$, $SB+2\lambda/2$ itd. Łuki te podzielą szczelinę AB na paski równoległe do brzegów szczeliny. Ilekroć tych pasków (stref) będzie liczba parzysta, fale cząstkowe wysyłane przez nie do ekranu będą się znosiły i otrzymamy prążek ciemny. W przypadku nieparzystej liczby stref otrzymamy prążek jasny. Im prążek jest dalszy od środka, tym jest mniej wyraźny. Dla dalszych punktów ekranu wiązka wychodząca ze szczeliny dzieli się na więcej wiązek, z których znaczna część się znosi, i do ekranu dochodzi światło tylko nielicznych stref. Przy użyciu światła białego otrzymuje się prążki tęczowo zabarwione.



Rys. 20.2. Powstawanie prążków dyfrakcyjnych

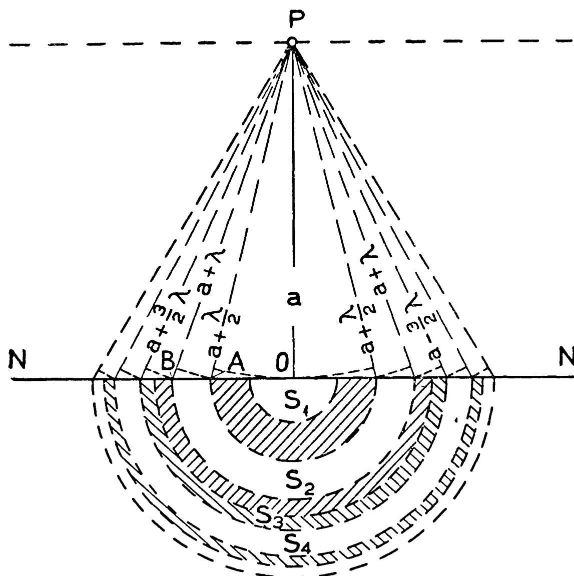


Rys. 20.3. Powstawanie prążków interferencyjnych

20.4. Prążki interferencyjne. Gdy przez wąską szczelinę rzucimy wiązkę światła na dwie szczeliny wycięte w zasłonie z blachy bardzo blisko siebie (rys. 20.3), zobaczymy na ekranie ustawionym po przeciwnej stronie niż źródło światła obraz dyfrakcyjny podobny do obrazu, jaki daje jedna szczelina. Lecz środkowy pasek jasny będzie przecięty szeregiem bardzo wąskich i bliskich siebie prążków na przemian jasnych i ciemnych. Są to prążki interferencyjne pochodzące z interferencji wiązek ugiętych

przez obie szczeliny. Tłumaczymy sobie ich powstawanie w następujący sposób. Ugięte przez szczeliny A i B wiązki stają się rozbieżne. Na pewnej przestrzeni ekranu schodzą się. Gdy różnica dróg d (rys. 20.3) przebywanych przez fale wychodzące z A i B jest równa 0, λ, 2λ itd., fale wzmacniając się przez interferencję dają prążek jasny. Przy różnicy dróg równej $\lambda/2$, $^3/_2\lambda$, w ogóle równej nieparzystej wielokrotności połowy fali, fale znoszą się przez interferencję i dają prążek ciemny.

20.5. Prostoliniowe rozchodzenie się światła. Niech NN będzie płaszczyzną fazową fali płaskiej biegnącej w kierunku normalnej OP (rys. 20.4). Zakładamy, że poprzeczne rozmiary wiązki promieni są bardzo wielkie w porównaniu z długością fali światła. Weźmy pod uwagę znajdujący się w odległości a od płaszczyzny NN punkt P. Do niego dochodzą fale cząstkowe wychodzące ze wszystkich punktów płaszczyzny NN. Zdawałoby się na pozór, że w punkcie P otrzymamy bardzo silne drgania. Wykażemy, że do punktu P dochodzi światło tylko z najbliższego otoczenia punktu O. Utwórzmy szereg stożków kołowych prostych o osi OP, których podstawa leży na płaszczyźnie NN, takich, że tworzące pierwszego mają długość $a = + \frac{\lambda}{2}$; drugiego $a + 2\frac{\lambda}{2}$, trzeciego $a + 3\frac{\lambda}{2}$ itd.



Rys. 20.4. Znoszenie się światła pochodzącego od różnych stref. Do punktu P dochodzi światło od połowy strefy centralnej

W ten sposób na płaszczyźnie NN otrzymamy szereg kół współśrodkowych o środku O (by sprowadzić je do płaszczyzny rysunku, musimy wykonać kład płaszczyzny NN).

$$r_1^2 = OA^2 = \left(a + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - a^2 = a \cdot \lambda \quad \text{(wyrazy z } \lambda^2 \text{ opuszczamy)},$$

$$r_2^2 = OB^2 = 2a \cdot \lambda \text{ itd.},$$

$$r_n^2 = na \cdot \lambda.$$

Pola powierzchni powstałych pierścieni będą:

$$s_1 = \pi a \lambda,$$

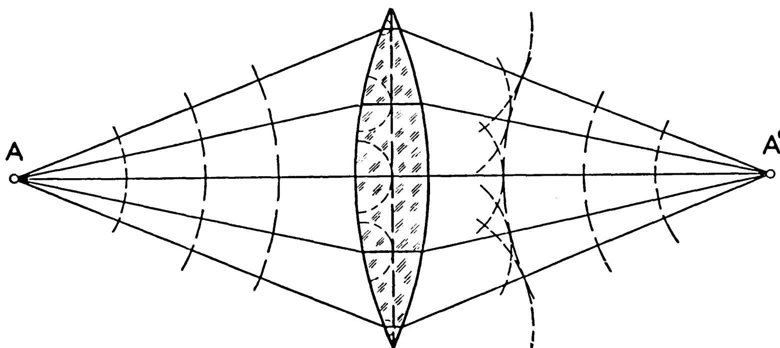
$$s_2 = 2\pi a\lambda - \pi a \lambda = \pi a \lambda, \ldots,$$

$$s_n = \pi a \lambda,$$

zatem pola utworzonych pierścieni, tak zwanych stref Fresnela, są sobie równe. Z każdej strefy Fresnela wychodzi jednakowa ilość fal cząstkowych. Ponieważ każda następna strefa leży w odległości od punktu P o $\lambda/2$ większej od poprzedniej, zatem każdemu punktowi jednej strefy odpowiada taki punkt następnej strefy, że fale cząstkowe z nich wychodzące dochodzą do punktu P w fazach przeciwnych. Gdyby ich amplitudy były równe, znosiłyby się przez interferencję. Jednakże fala dochodząca z dalszej strefy z powodu większej odległości od punktu P jest nieco słabsza. Wskutek tego fale dochodzące z dwóch sąsiednich stref do punktu P niezupełnie się wygaszają. Można udowodnić, że działanie wszystkich fal cząstkowych wychodzących z jednej strefy znosi się z działaniem fal wychodzących z połówek stref bezpośrednio przyległych do tej strefy. Zatem fale cząstkowe, których źródłem jest strefa S_2, znoszą się z falami cząstkowymi dochodzącymi z połowy strefy S_1 i z połowy strefy S_3 (zakreskowane połówki stref na rys. 20.4). Podobnie działanie strefy S_4 znosi się z działaniem połowy strefy S_3 i połowy S_5 itd. Działanie coraz dalszych stref jest coraz słabsze, zbliża się stopniowo do zera. Pozostaje więc tylko działanie połowy strefy S_1. Zatem, mimo iż z każdego punktu płaszczyzny fazowej dochodzą fale cząstkowe do punktu P, rezultat jest taki, jak gdyby fale poruszały się po liniach prostych.

Inaczej przedstawia się sprawa, gdy wymiary otworu, na który trafia fala płaska, są porównywalne z długością fali użytego światła. Wtedy wyraźnie występują zjawiska uginania światła i plamka świetlna na ekranie, jaką daje promień świetlny przechodzący przez mały otworek, jest otoczona pierścieniami dyfrakcyjnymi na przemian ciemnymi i jasnymi.

20.6. Działanie soczewek. Fale cząstkowe wytwarzające się w tych miejscach soczewki, gdzie jej powierzchnię trafiają promienie wychodzące z punktu



Rys. 20.5. Zasada Huygensa tłumaczy skupienie się wiązki światła za soczewką

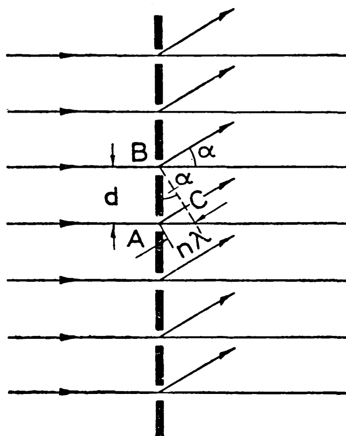
A (rys. 20.5), mają do przebycia największą drogę w szkle w jej częściach środkowych i tam się najbardziej spóźniają z powodu mniejszej prędkości światła w szkle niż w powietrzu. Przy brzegach natomiast opóźnienie jest znacznie mniejsze. W rezultacie za soczewką powierzchnie fazowe stają się wklęsłe, fale

cząstkowe dochodzą do punktu A' w fazach zgodnych i tam dają obraz punktu świecącego A.

20.7. Siatka dyfrakcyjna. Siatką dyfrakcyjną nazywamy szereg bliskich, równoległych szczelin. Siatkę taką możemy otrzymać kreśląc diamentem na szybie szklanej szereg równoległych rys w równych odstępach. Rysy stają się nieprzezroczyste, światło zaś przechodzi między nimi, gdzie gładka powierzchnia szkła nie jest uszkodzona. Liczba rys w dobrych siatkach dochodzi do kilku tysięcy na 1 mm. Z dobrych, udanych siatek można sporządzać kopie.

Opisanym sposobem można kreślić też siatki na zwierciadłach metalicznych, od których światło odbijając i uginając się daje widmo dyfrakcyjne.

By zrozumieć działanie siatki, zauważmy, że każda szczelina staje się źródłem fali cząstkowej cylindrycznej. Z każdej szczeliny wychodzą zatem ugięte, rozbieżne wiązki światła. Weźmy pod uwagę wiązkę równoległych promieni wychodzących z rozmaitych szczelin, odchylonych o kąt α od pierwotnego kierunku promieni (rys. 20.6). Gdy różnica dróg sąsiednich promieni wynosi λ, wzmocnią się one przez interferencję (promienie idące do jednego miejsca odległego ekranu możemy uważać za równoległe, można je zresztą zebrać w dowolnej odległości za pomocą odpowiedniej soczewki). Również wzmacniać się będą wtedy, gdy różnica dróg wyniesie $n\lambda$, gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$ Z trójkąta prostokątnego ABC (rys. 20.6) otrzymamy



Rys. 20.6. Działanie siatki dyfrakcyjnej

$$\sin\alpha = \frac{n\lambda}{d}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (20.1)$$

Tylko dokładnie pod kątami określonymi przez powyższe równanie promienie z różnych szczelin pochodzące wzmocnią się przez interferencję, wszystkie bowiem będą zgodne w fazach. Promienie idące pod bardzo mało nawet różniącym się od kąta α kątem wygaszą się. Aby to zrozumieć, weźmy przykład. Przypuśćmy, że różnica dróg wynosi nie λ, lecz 0,99 λ. W takim razie dla promienia pochodzącego z pierwszej szczeliny i z pięćdziesiątej pierwszej różnica ta będzie $50 \times 0{,}99\ \lambda = 49{,}5\ \lambda$. Zatem wygaszą się one. Tak samo wygaszą się drugi z pięćdziesiątym drugim, trzeci z pięćdziesiątym trzecim itd. Pozostaje tylko światło z pięćdziesięciu szczelin, które, gdy liczba rys na siatce jest bardzo wielka, będzie tak słabe, że go nie zobaczymy.

Rzućmy wiązkę światła monochromatycznego (jednobarwnego) na wąską szczelinę (rys. 20.7) i wytwórzmy jej obraz na ekranie E za pomocą soczewki. Otrzymamy jeden ostry prążek. Jeżeli teraz umieścimy przed soczewką siatkę dyfrakcyjną S tak, aby jej rysy były równoległe do szczeliny, wówczas po obu stronach

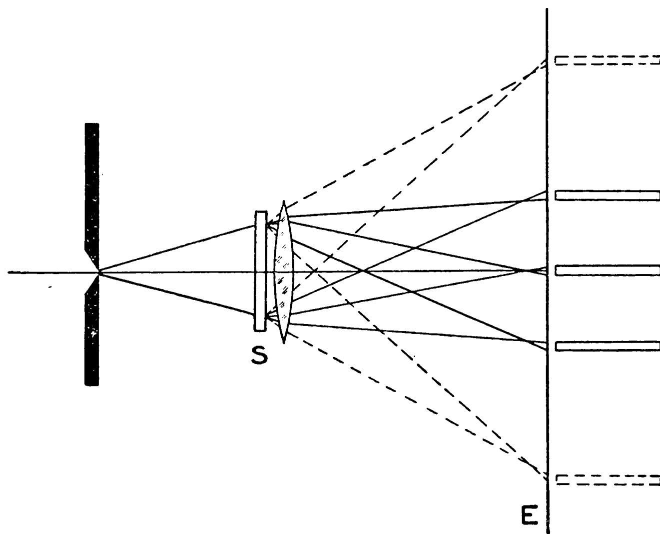
poprzedniego obrazu pojawią się jeszcze dwa obrazy szczeliny, dwa prążki. W dalszej odległości pojawią się jeszcze dwa słabsze już prążki. Pierwsze dwa prążki nazywamy widmami pierwszego rzędu. Są to obrazy szczeliny dawane przez wiązki ugięte pod kątem α określonym wzorem:

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}.$$

Następne dwa prążki, tak zwane widma drugiego rzędu, utworzone są przez wiązki ugięte pod kątem α_1 określonym wzorem:

$$\sin\alpha_1 = \frac{2\lambda}{d}.$$

Przy dobrych siatkach i silnym źródle światła można obserwować jeszcze widma dalszych rzędów odpowiadające wartościom $n = 3, 4$ itd.



Rys. 20.7. Widma dawane przez siatkę dyfrakcyjną

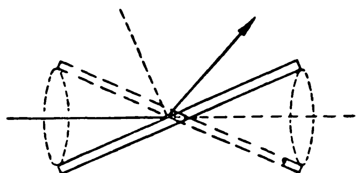
Za pomocą spektrometru z siatką dyfrakcyjną można zmierzyć dokładnie kąt α, a znając odstęp rys d na siatce (można go zmierzyć pod mikroskopem) możemy dokładnie wyznaczyć długość fali użytego światła λ. Pomiary stwierdzają, że światło różniące się subiektywnie barwą różni się długością fali. Obiektywną cechą barwy światła jest długość fali świetlnej odpowiadającej danej barwie. Długości fal światła widzianego zawarte są w granicach od 4000 Å — 8000 Å:

fioletowa część widma	3600 Å — 4500 Å
niebieska część widma	4500 Å — 4920 Å
zielona część widma	4920 Å — 5500 Å
żółta część widma	5500 Å — 5880 Å
pomarańczowa część widma	5880 Å — 6470 Å
czerwona część widma	6470 Å — 7700 Å

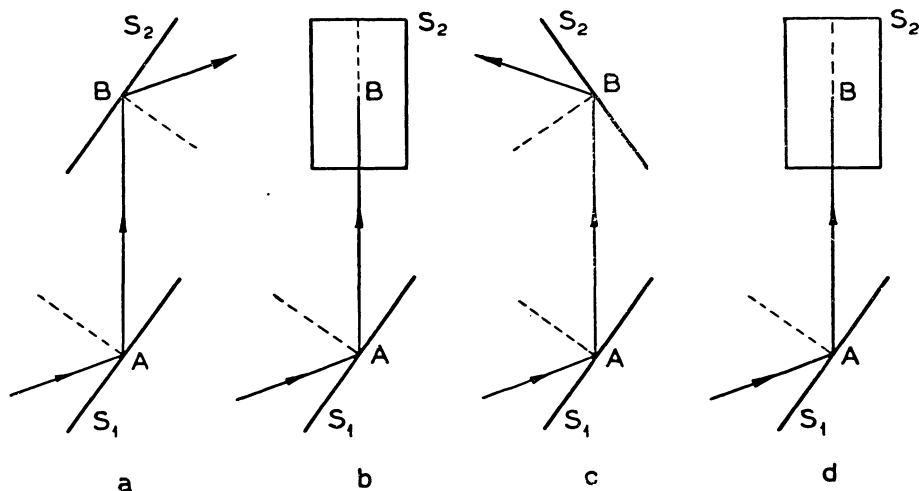
Świecące pary pierwiastków dają widma liniowe. Poniżej podane są długości fali odpowiadające najjaśniejszym liniom niektórych pierwiastków:

Potas	linia fioletowa	$\lambda = 4044{,}15$ Å
Tal	linia zielona	$\lambda = 5350{,}48$ Å
Sód	dwie bliskie linie żółte	$\lambda = 5889{,}965$ Å $\lambda = 5895{,}932$ Å
Wodór	linia czerwona	$\lambda = 6562{,}785$ Å

20.8. Polaryzacja światła. Światło zwykłe wysyłane przez jakiekolwiek źródło światła ma jednakowe własności we wszystkich kierunkach prostopadłych do promienia. Gdy rzucimy wiązkę światła na szybę szklaną, to przy obrocie płytki tak, aby padający promień był osią obrotu (rys. 20.8), a więc gdy kąt padania będzie stale jednakowy, zawsze jednakowa część światła odbije się od powierzchni, pozostała zaś część, też stale jednakowa, przejdzie przez płytkę. Inaczej jednak zachowuje się wiązka odbita już raz od szyby szklanej. Rzućmy na płytkę szklaną S_1 promień światła (rys. 20.9) pod kątem około 55°. Ustawmy na drodze tego odbitego promienia drugą płytkę szklaną S_2, równoległą do pierwszej. A więc kąt padania promienia na drugą szybę S_2 będzie również około 55° (rys. 20.9*a*). Obracajmy drugą szybę S_2 tak, aby promień AB był osią obrotu. Spostrzeżemy, że promień odbity od szyby S_2 będzie stopniowo słabł. Po obrocie płytki S_2 o 90° promień nie odbije się od niej wcale (tylko przejdzie w całości przez szybę, rys. 20.9*b*). Przy dalszym obrocie płytki S_2 światło znowu odbijać się będzie coraz silniej. W pozycji *c* (rys. 20.9) odbijać się będzie najsilniej, przy dalszym obrocie znowu coraz słabiej. W pozycji *d* nie odbije się wcale. Przy obrocie



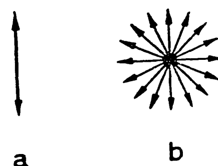
Rys. 20.8. Promień zwykłego światła odbija się zawsze jednakowo od szybki szklanej



Rys. 20.9. Promień już raz odbity nie zawsze odbija się od drugiej płytki szklanej odpowiednio nachylonej. W pozycji *a* i *c* odbija się, w pozycji *b* i *d* — nie

płytki S_2 o 360° dwa razy będziemy obserwowali maksimum światła odbitego, dwa razy światło nie odbije się wcale. Odbicie nie następuje wtedy, gdy płaszczyzny padania promienia na pierwszą płytkę i drugą są do siebie prostopadłe.

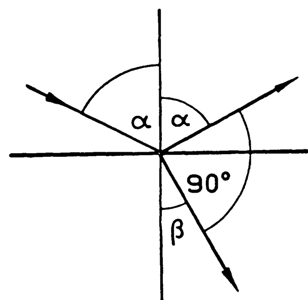
Światło wykazujące takie własności jak promień AB nazywamy liniowo spolaryzowanym. Płytkę S_1 wytwarzającą światło o takich własnościach lub inny przyrząd tak samo działający nazywamy polaryzatorem. Płaszczyznę odbicia promienia AB od płytki S_1 nazywamy płaszczyzną polaryzacji. Drugą płytkę S_2 służącą do badania, czyli do analizowania światła spolaryzowanego lub inny przyrząd do tego samego celu służący nazywamy analizatorem.



Rys. 20.10. Drgania w świetle spolaryzowanym i niespolaryzowanym

Aby wyjaśnić zjawisko polaryzacji musimy przyjąć, że światło polega na rozchodzeniu się fal poprzecznych.

W świetle spolaryzowanym drgania odbywają się w jednej tylko płaszczyźnie (rys. 20.10a), w świetle zwyczajnym natomiast płaszczyzna drgań tak szybko zmienia swoje położenie, że światło we wszystkich kierunkach prostopadłych do promienia wykazuje takie same własności (rys. 20.10b). Gdybyśmy doświadczenie poprzednio opisane (rys. 20.9) powtórzyli wielokrotnie, zmieniając kąt nachylenia płytki S_1, stwierdzilibyśmy przy skrzyżowanych płaszczyznach padania w ogólności minimum światła odbitego. Lecz tylko w tym przypadku, gdy kąt padania na pierwszą płytkę S_1 jest 55°, światło od płytki S_2 nie odbije się zupełnie. Mówimy, że w tym przypadku światło jest całkowicie spolaryzowane.



Rys. 20.11. Promień odbity jest całkowicie spolaryzowany, gdy z promieniem załamanym tworzy kąt prosty

Doświadczenia stwierdziły, że światło ulega całkowitej polaryzacji przy odbiciu od granicy dwóch środowisk przezroczystych (np. powietrze — szkło, powietrze — woda, zwierciadła metalowe nie mogą zatem służyć do polaryzacji światła) wówczas, gdy promień odbity i załamany tworzą kąt prosty (rys. 20.11). Prawo to zostało odkryte przez Brewstera (czyt. Briustera). Według tego prawa $\alpha + \beta + 90° = 180°$ (rys. 20.11), skąd otrzymujemy $\alpha + \beta = 90°$. Ponieważ

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$

a

$$\beta = 90° - \alpha,$$

zatem

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = n,$$

czyli

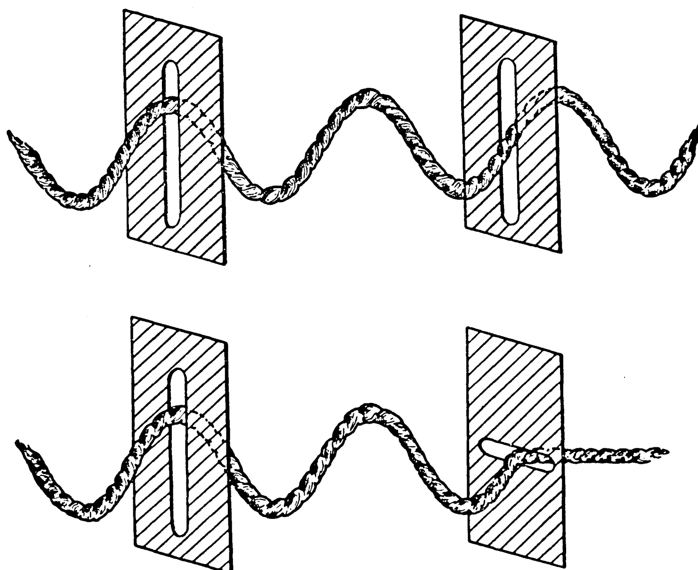
$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = n.} \tag{20.2}$$

Z tego związku możemy wyliczyć kąt, pod jakim muszą padać promienie na granicę środowiska o współczynniku załamania światła n, by po odbiciu otrzymać światło całkowicie liniowo spolaryzowane.

Według elektromagnetycznej teorii światło polega na rozchodzeniu się fal elektromagnetycznych. Natężenie pola elektrycznego (wektor E) i magnetycznego (wektor H) są do siebie prostopadłe i zmieniają swoją wielkość periodycznie z czasem. W świetle spolaryzowanym wektor elektryczny E jest prostopadły do płaszczyzny polaryzacji, magnetyczny H — równoległy.

Jeżeli promień pada np. na szybę i ulega przy odbiciu całkowitej polaryzacji, to w promieniu, który przejdzie przez szybę, brak będzie drgań elektrycznych prostopadłych do płaszczyzny polaryzacji. Będzie on częściowo spolaryzowany.

20.9. Polaryzacja światła przy przejściu przez płytę turmalinu. Światło przepuszczone przez płytkę turmalinu, kryształu barwy brunatnej lub zielonawej, ma podobne własności do światła odbitego od płytki szklanej, jest spolaryzowane. Jak zobaczymy później, promień światła zwykłego rozpada się w tego rodzaju



Rys. 20.12. Ilustracja przechodzenia fali spolaryzowanej przez dwa polaryzatory równoległe i skrzyżowane

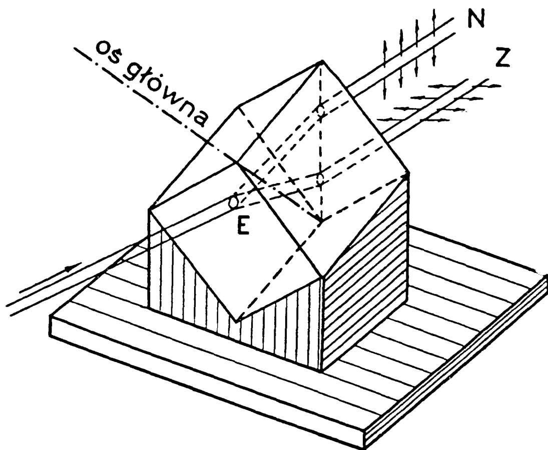
kryształach jak turmalin na dwa promienie. Oba są spolaryzowane w dwu prostopadłych do siebie kierunkach. Turmalin pochłania jeden z nich, jeden tylko zatem zostanie przepuszczony.

Druga płytka turmalinowa może służyć jako analizator. Podczas obracania analizatora dwukrotnie zaciemnia się pole widzenia i dwukrotnie rozjaśnia. Gdy płaszczyzny, w jakich polaryzują dwie płytki turmalinowe, są do siebie równo-

ległe, światło przez nie przechodzi, a gdy płaszczyzny te są skrzyżowane, światło nie przejdzie.

Ilustruje to przykład przedstawiony na rys. 20.12. Fala poruszająca się wzdłuż liny spolaryzowana w płaszczyźnie pionowej przejdzie przez dwie podłużne szczeliny wycięte w nieruchomych deseczkach, gdy osie tych szczelin są też pionowe. Gdy jedna ze szczelin jest pionowa, a druga pozioma, fale zostaną zatrzymane przez drugą szczelinę.

20.10. Podwójne załamanie. Do doświadczeń nad podwójnym załamaniem używa się najczęściej kryształów kalcytu (węglan wapniowy $CaCO_3$) zwanego zwykle szpatem islandzkim. Kalcyt krystalizuje w układzie heksagonalnym. Posiada łupliwość tego rodzaju, że z naturalnego kryształu można łatwo otrzymać równoległościan lub rombościan (rys. 20.13). Prosta przechodząca w prawidłowym rombościanie przez naroża, w których spotykają się trzy równe kąty rozwarte, jest tzw. osią optyczną kryształu. Każdą prostą równoległą do tej prostej nazywamy również osią optyczną. Każda płaszczyzna przechodząca przez oś lub do niej równoległa nazywa się przekrojem głównym.



Rys. 20.13. Bieg wiązki światła w krysztale kalcytu

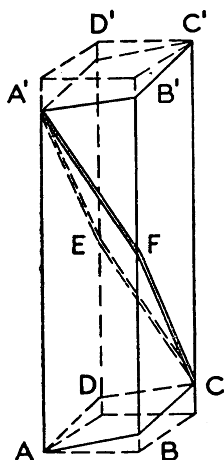
Jeżeli na kryształ kalcytu prostopadle do ściany pada wiązka światła, to dzieli się ona w krysztale na dwie wiązki, z których jedna przechodzi nie załamana przez kryształ, druga natomiast załamuje się raz na przedniej ścianie, drugi raz na tylnej (rys. 20.13), po czym wychodzi równolegle do pierwszej wiązki. Obie wiązki światła są liniowo spolaryzowane w płaszczyznach do siebie prostopadłych. Promień Z, który się nie załamuje, zachowuje się tak jak w środowisku izotropowym, ma stały współczynnik załamania $n = 1,65$ dla światła sodowego. Nazywamy go promieniem zwyczajnym. Drugi promień N w ogóle nie stosuje się do prawa Snelliusa. Nazywamy go promieniem nadzwyczajnym. Współczynnik załamania promienia nadzwyczajnego zależy od nachylenia promienia względem osi i zmienia się dla światła sodowego od 1,48 do 1,65. Największy współczynnik, równy współczynnikowi załamania promienia zwyczajnego, ma wtedy, gdy biegnie równolegle do osi. Najmniejszy — gdy biegnie w kierunku prostopadłym do osi. Jeżeli obciąć naroże, gdzie schodzą się trzy kąty rozwarte, płaszczyzną prostopadłą do osi optycznej i rzucić wiązkę światła w kierunku równoległym do osi,

wówczas wiązka nie dzieli się w ogóle, gdyż oba promienie mają w tym kierunku jednakowe współczynniki załamania.

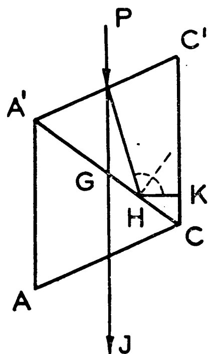
Zmienność współczynnika załamania dla promienia nadzwyczajnego wynika z różnych prędkości światła w promieniu nadzwyczajnym dla różnych kierunków.

Wszystkie kryształy, w których — podobnie jak w kalcycie — istnieje j e d e n tylko kierunek, w którym zwyczajny i nadzwyczajny promień mają jednakowe prędkości, a więc i jednakowe współczynniki załamania, nazywamy kryształami jednoosiowymi.

20.11. Pryzmat Nicola. Oba promienie, na jakie się dzieli w krysztale kalcytu promień padający, są spolaryzowane liniowo. Gdyby się udało w jakiś sposób jeden z promieni usunąć, to otrzymalibyśmy doskonały polaryzator. Udało się to Nicolowi (1841 r.). W słupku wyłupanym z kryształu zeszlifowuje się powierzchnię górną i dolną, jak na rys. 20.14, tak by ściany *ABCD* i *A'B'C'D'* tworzyły z krawędziami *AA'*, *BB'*, *CC'* i *DD'* kąt 68° (w krysztale naturalnym kąt ten równa się 71°). Następnie przecina się kryształ piłką wzdłuż płaszczyzny prostopadłej do ścian *ABCD* i *A'B'C'D'* i do przekroju głównego *A'C'AC* (przekrój *A'EFC*).



Rys. 20.14. Pryzmat Nicola



Rys. 20.15. Bieg promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego w pryzmacie Nicola

Płaszczyzny przekroju dobrze wygładzone skleja się na powrót warstewką balsamu kanadyjskiego, który ma współczynnik załamania $n = 1{,}54$, a więc mniejszy niż współczynnik załamania kalcytu dla promienia zwyczajnego.

Rys. 20.15 przedstawia przekrój główny *A'C'AC* tak otrzymanego przyrządu zwanego pryzmatem Nicola albo wprost „nikolem". Promień światła niespolaryzowanego padając na ścianę *A'B'C'D'* dzieli się na promień nadzwyczajny *PGJ*, który przechodzi przez kryształ i może być użyty do doświadczeń, oraz na promień zwyczajny *PHK*, który ulega całkowitemu odbiciu na sklejeniu i zostaje pochłonięty przez poczernione ściany oprawki, w której znajduje się pryzmat. Otrzymany promień nadzwyczajny jest spolaryzowany w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju głównego, zatem drgania elektryczne odbywają się w nim w przekroju głównym.

Nikol jest doskonałym polaryzatorem. Drugi nikol może być użyty jako analizator.

Gdy dwa nikole są tak ustawione, że płaszczyzny, w których polaryzują się wiązki światła przez nie przechodzące, są równoległe, to mówimy, że nikole są

r ó w n o l e g ł e. Przez dwa nikole równoległe światło przechodzi jak przez zwykłe ciało przezroczyste.

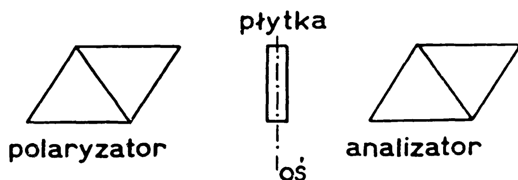
Gdy płaszczyzny polaryzacji nikoli są prostopadłe, mówimy, że nikole są s k r z y ż o w a n e. Przez dwa nikole skrzyżowane światło nie przechodzi. Tak samo wyrażamy się o jakichkolwiek polaryzatorach i analizatorach.

Obecnie wyrabiane są przyrządy zwane polaroidami, które zawierają płytkę z nitrocelulozy z koloidalną zawiesiną drobnych kryształów organicznych. Płytka taka rozkłada promień światła na zwyczajny i nadzwyczajny, oba spolaryzowane w płaszczyznach do siebie prostopadłych. Jeden z nich zostaje pochłonięty, a drugi przepuszczony. Wchodzą one teraz w użycie zamiast pryzmatów Nicola.

20.12. Zjawiska interferencji w świetle spolaryzowanym. Dwa promienie spolaryzowane pochodzące z tego samego źródła światła nie są zdolne do interferencji, gdy ich płaszczyzny polaryzacji są do siebie prostopadłe. Jak wiemy, gdy wiązkę światła niespolaryzowanego przepuścimy przez dwie bliskie siebie, wąskie szczeliny równoległe, otrzymamy na ekranie prążki interferencyjne. Jeżeli obie szczeliny przykryjemy płytkami turmalinowymi równoległymi, będą one istnieć dalej, znikną natomiast przy skrzyżowaniu płytek. Drgania będą się wtedy w obu wiązkach światła odbywać w płaszczyznach prostopadłych do siebie i oczywistą jest rzeczą, że takie drgania nigdy nie mogą się znosić. Z tego też powodu promień zwyczajny i nadzwyczajny nie dają zjawisk interferencji.

P ł y t k a k r y s t a l i c z n a w y c i ę t a r ó w n o l e g l e d o o s i w ś w i e t l e s p o l a r y z o w a n y m r ó w n o l e g ł y m. *I. Umieszczona między nikolami równoległymi.*

Ustawmy dwa nikole równoległe i przepuśćmy przez nie wiązkę promieni równoległych światła monochromatycznego (w przybliżeniu otrzymamy światło monochromatyczne wstawiając w drogę wiązki światła białego szybę czerwoną). Światło przejdzie oczywiście przez oba nikole. Umieśćmy teraz między nimi cienką płytkę (rys. 20.16) wyciętą z kryształu równolegle do osi optycznej. Przy obrocie tej płytki o 360° cztery razy nastąpi zaciemnienie pola widzenia. Największe zaciemnienie nastąpi, gdy oś optyczna płytki będzie tworzyć



Rys. 20.16. Płytka krystaliczna między nikolami

z płaszczyznami polaryzacji polaryzatora i analizatora kąt 45°. Zjawisko to wyjaśnia rys. 20.17 i 20.18. Na rysunku 20.17 kierunek drgania wektora elektrycznego (zwanego też często wektorem świetlnym) w polaryzatorze zaznaczony jest strzałką po lewej stronie, w analizatorze — strzałką po prawej stronie. Drganie zaś wektora świetlnego w płytce rozłoży się na drganie w kierunku osi optycznej i w kierunku do niej prostopadłym. Promień rozpadnie się zatem

w płytce na dwa: zwyczajny (z) i nadzwyczajny (n): Fala rozdzieli się na dwie, biegnące z różnymi prędkościami, w promieniu zwyczajnym z prędkością v_1, w promieniu nadzwyczajnym z prędkością v_2. Ponieważ częstość drgania jest stała, a prędkości fal są różne, więc i długości fal w promieniu zwyczajnym i nadzwyczajnym będą różne:

$$\lambda_1 = v_1 T, \qquad \lambda_2 = v_2 T.$$

Przypomnijmy sobie równanie fali:

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Umieśćmy początek współrzędnych na ścianie płytki tam, gdzie światło wchodzi. Oba drgania w tym punkcie będą miały zgodne fazy, gdyż dla $x = 0$ będziemy mieli drgania jednakowe wyrażone wzorem

$$y = A \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Jeżeli grubość płytki jest d, to faza przy wyjściu z płytki promienia zwyczajnego będzie

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda_1} \right),$$

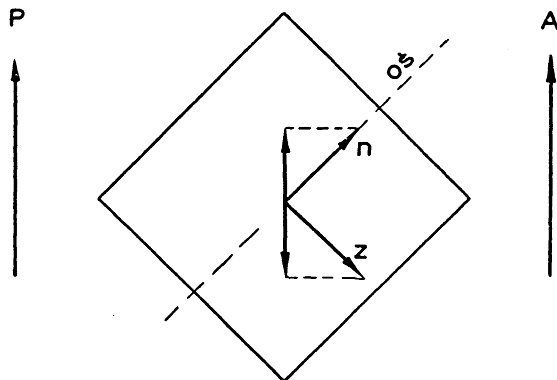
dla promienia nadzwyczajnego

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda_2} \right).$$

Wytworzy się zatem różnica faz

$$2\pi \left(\frac{d}{\lambda_2} - \frac{d}{\lambda_1} \right).$$

Rys. 20.17. Promień światła spolaryzowanego dzieli się w płytce krystalicznej na promień zwyczajny i nadzwyczajny biegnące z różnymi prędkościami

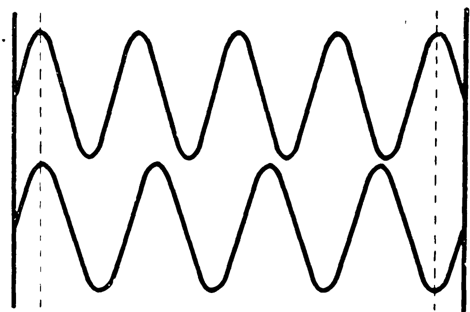


Rys. 20.18. Długości fali w promieniu zwyczajnym i nadzwyczajnym są różne. Wobec tego wystąpi między nimi różnica faz

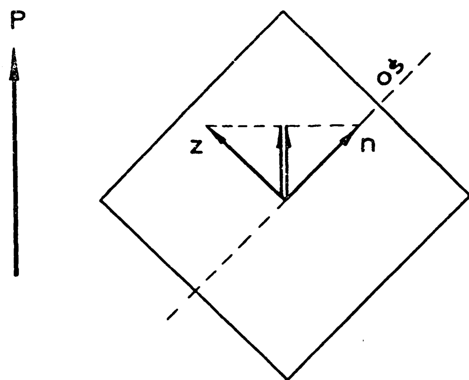
Jeżeli liczba fal układających się na grubości płytki w jednym promieniu będzie n, a liczba fal w drugim $n + 1/2$ lub $n + 3/2$, $n + 5/2$ itd., to, jak widać z powyższego wzoru, drganie wektora świetlnego w jednym promieniu spóźni się po przejściu przez płytkę względem drgania w drugim promieniu o $1/2 \cdot 2\pi$ lub $3/2 \cdot 2\pi$ itd., czyli o nieparzystą wielokrotność kąta $\pi = 180°$, jak to pokazuje rys. 20.19. Interferencja między nimi jest jednak niemożliwa, gdyż drgania odbywają się w płaszczyznach wzajemnie do siebie prostopadłych. Gdy jednak promienie te padną

na analizator, ten ostatni przepuści tylko składowe pionowe drgań (rys. 20.18). Składowe pionowe drgań leżą w jednej płaszczyźnie, a ponieważ mają fazy przeciwne, zniosą się. Otrzymamy zaciemnienie pola widzenia.

Gdy jednak grubość płytki będzie taka, że liczba fal układających się na grubości płytki w jednym promieniu będzie n, a w drugiej $n+1$ lub $n+2$, $n+3, \ldots$, drganie w jednym promieniu spóźni się względem drgania w drugim o 360° lub wielokrotność 360°. Będą więc miały zgodne fazy. Składowe pionowe, które przepuszcza analizator, mają, jak widać z rys. 20.20, również zgodne fazy. Płytka takiej grubości nie da zaciemnienia pola widzenia. Płytki o grubości pośredniej dadzą częściowe zaciemnienie zależne od różnicy faz, jaka powstanie. Ta zależność zaciemnienia pola widzenia od grubości płytki da się najlepiej obserwować na klinie wyciętym z kryształu tak, aby krawędź klina była równoległa do osi. Gdy między nikolami równoległymi umieścimy taki klin, tak aby oś była nachylona do płaszczyzny polaryzacji pod kątem 45°, zobaczymy na ekranie szereg prążków równoległych do krawędzi na przemian jasnych i ciemnych.



Rys. 20.19. Płytka krystaliczna między nikolami równoległymi. Składowe pionowe obu drgań mają fazy przeciwne



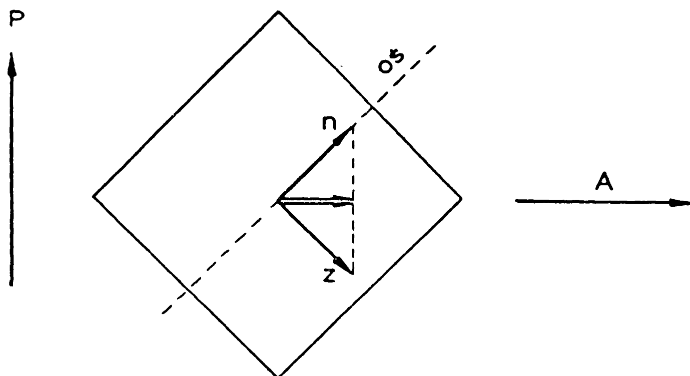
Rys. 20.20. Płytka krystaliczna między nikolami równoległymi. Składowe pionowe drgań mają fazy zgodne

W świetle białym będącym mieszaniną fal różnej długości płytka krystaliczna wygasi te barwy, dla których różnica liczby fal na grubości płytki będzie wynosić $^1/_2$, $^3/_2$, $^5/_2, \ldots$ Inne barwy będą osłabione więcej lub mniej prócz tych, dla których ta różnica będzie się równać liczbie całkowitej. Światło przepuszczone będzie mieszaniną nie wygaszonych barw o żywym często zabarwieniu.

Klin daje w świetle białym szereg prążków równoległych do jego krawędzi o najrozmaitszym zabarwieniu.

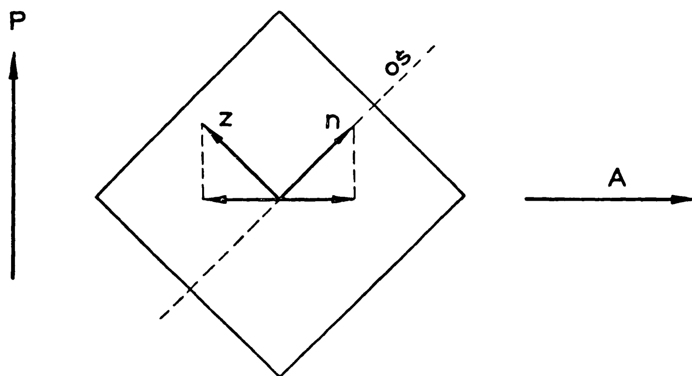
II. Cienka płytka krystaliczna umieszczona między nikolami skrzyżowanymi. Nikole skrzyżowane, jak już o tym była mowa, dają pole widzenia ciemne, światło przez nie nie przechodzi. Gdy jednak umieścimy między nimi opisaną poprzednio

płytkę krystaliczną tak, aby jej oś tworzyła kąt 45° z płaszczyznami drgań polaryzatora, to pole widzenia się rozjaśni. Tłumaczenie jest zupełnie podobne do poprzedniego. Promień znowu rozdzieli się na dwa: zwyczajny i nadzwyczajny biegnące z różnymi prędkościami, wskutek czego wytworzy się między nimi



Rys. 20. 21. Płytka krystaliczna między nikolami skrzyżowanymi. Składowe poziome obu drgań mają fazy zgodne

różnica faz. Analizator przepuści tylko składowe drgań leżące w jednej płaszczyźnie, wobec czego będą one interferować. Gdy liczby fal układających się na grubości płytki będą się różnić o $^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2, \ldots$, wówczas promienie uzyskują różnicę faz równą 180° (rys. 20.21). Analizator przepuści tylko składowe poziome wek-



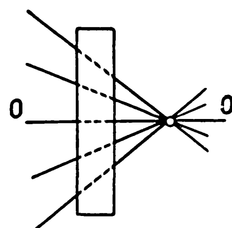
Rys. 20. 22. Płytka krystaliczna między nikolami skrzyżowanymi. Składowe poziome mają fazy przeciwne

torów świetlnych, które dadzą jasne pole widzenia. Gdy liczby fal układające się na grubości płytki będą się różnić o 1, 2, 3, ..., drgania po wyjściu z płytki będą miały zgodne fazy (rys. 20.22). Składowe poziome drgania zniosą się. Zatem przy skrzyżowanych nikolach wynik jest odwrotny niż przy równoległych. Przy

obracaniu analizatora płytka da przy całkowitym obrocie dwa razy rozjaśnienie, a dwa razy zaciemnienie pola widzenia.

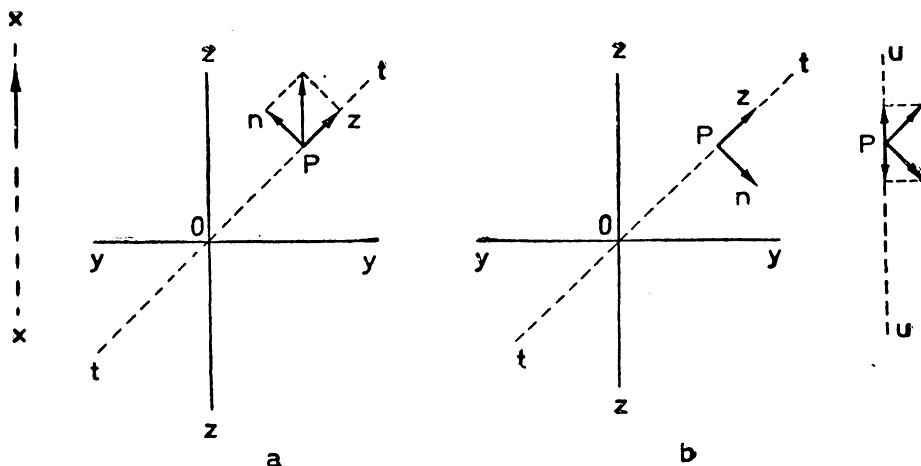
Klin umieszczony między skrzyżowanymi nikolami da, tak jak w poprzednim przypadku, również szereg prążków na przemian jasnych i ciemnych. Lecz w tym miejscu, gdzie poprzednio były prążki jasne, teraz występują ciemne i na odwrót. W świetle białym klin da pasmo barwne, lecz barwy będą inne (dopełniające) niż przy nikolach równoległych.

20.13. Kryształy jednoosiowe w świetle spolaryzowanym zbieżnym. Jeżeli na płytkę wyciętą z kryształu jednoosiowego prostopadle do osi optycznej (rys. 20.23) pada wiązka zbieżna promieni liniowo spolaryzowanych światła monochromatycznego, to promienie te mają do przebycia różne drogi, jak to widać z rysunku, zależnie od ich nachylenia do osi *OO*. Zatem od ich nachylenia będzie również zależała różnica faz drgań wytwarzająca się między promieniem zwyczajnym i nadzwyczajnym.

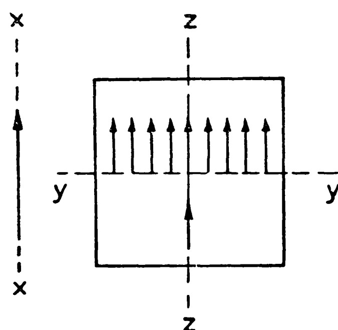


Rys. 20.23. Płytka krystaliczna wycięta prostopadle do osi w świetle zbieżnym

Weźmy pod uwagę promień leżący w przekroju głównym *tt* (rys. 20.24a). Promień ten rozłoży się na zwyczajny *z*, spolaryzowany w przekroju głównym, i nadzwyczajny *n*, spolaryzowany w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju głównego. Zależnie od nachylenia promienia wytworzy się między nimi większa lub mniejsza różnica faz. Gdy będzie ona równa 180° lub bliska tej wartości, drgania po wyjściu z płytki będą się odbywały jak na rys. 20.24b. Analizator równoległy do polaryzatora przepuści tylko składowe w kierunku *uu*,



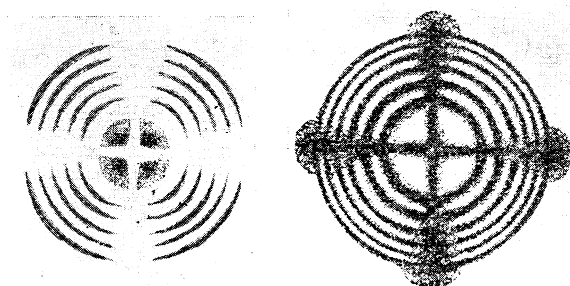
Rys. 20.24. Promienie spolaryzowane w płaszczyźnie tworzącej pewien kąt z przekrojem głównym dzielą się na dwa: zwyczajny i nadzwyczajny, nabywające na swej drodze w krysztale pewnej różnicy faz



Rys. 20.25. Promienie spolaryzowane w przekroju głównym i w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju nie dzielą się na dwa. Przechodzą jako zwyczajne lub nadzwyczajne

które osłabią się lub wygaszą całkowicie. To zjawisko zajdzie dla wszystkich promieni o tym samym nachyleniu do osi optycznej płytki, zatem leżących na pobocznicy stożka kołowego, którego osią jest oś optyczna płytki krystalicznej.

Dla promieni nachylonych pod innym kątem różnica faz może być równa lub bliska 360°. Wtedy promienie te po wyjściu z płytki będą miały zgodne fazy. Analizator równoległy do polaryzatora przepuści je. Otrzymamy na ekranie szereg pierścieni na przemian jasnych i ciemnych. Lecz jak wykazuje doświadczenie, pierścienie te są przecięte jasnym krzyżem. Zjawisko to się tłumaczy tym, że każdy promień leżący w płaszczyźnie *zz* równoległej do płaszczyzny polaryzacji polaryzatora *xx* nie rozpada się na dwa promienie. Przejdzie przez płytkę jako promień zwyczajny (rys. 20.25). Każdy promień leżący w płaszczyźnie *yy* prostopadłej do *xx* też nie rozpadnie się na dwa. Przejdzie przez płytkę jako promień nadzwyczajny. Zatem i w jednym i w drugim drgania będą się odbywały tylko w płaszczyźnie pionowej, niezależnie od nachylenia. Promienie niezależnie od nachylenia przejdą przez analizator.



Rys. 20.26. Płytka krystaliczna prostopadła do osi optycznej w świetle zbieżnym. Pierścienie interferencyjne

Przy skrzyżowaniu analizatora z polaryzatorem pierścienie ciemne zamieniają się w jasne i na odwrót — jasne w ciemne. Krzyż zaś staje się czarny (rys. 20.26), co łatwo wytłumaczyć: analizator nie przepuści zupełnie drgań pionowych.

W świetle białym pierścienie wykazują żywe barwy wskutek wygaszania się niektórych tylko składników światła białego.

2014. Skręcenie płaszczyzny polaryzacji. Niektóre ciała, np. roztwory cukru lub terpentyna, wstawione między skrzyżowane przyrządy polaryzacyjne (analizator i polaryzator) wywołują rozjaśnienie pola widzenia. By otrzymać z powrotem zaciemnienie, trzeba analizator skręcić w prawo albo w lewo o pewien kąt. Mówimy, że dane ciało skręca płaszczyznę polaryzacji w prawo względnie w lewo. Skręcenie płaszczyzny polaryzacji zależy od grubości warstwy, przez którą przebiega promień światła.

Odwrotnie, mierząc kąt skręcenia i grubość warstwy, możemy określić stężenie roztworu, np. cukru. Przyrządy używane w praktyce do opisanego celu nazywają się polarymetrami.

20.15. Ogólne własności promieniowania. Jak mówiliśmy w rozdziale o widmach, w widmie światła słonecznego poza światłem widzialnym możemy stwierdzić istnienie promieni nadfioletowych i podczerwonych, których nie widzimy. Doświadczeniem nie trudno stwierdzić, że nie tylko ciała świecące, ale i ciała ciemne wysyłają energię promienistą. Gorący piec np. promieniuje, promieniowanie jego odczuwamy bezpośrednio. Gdy umieścimy w pewnej odległości od ogrzanego pieca czuły termoskop, wykaże on podniesienie temperatury. Po umieszczeniu między piecem i termoskopem ekranu, np. blachy, od razu termoskop wykaże obniżkę temperatury. Ciało ogrzane ponad temperaturę otoczenia, nawet umieszczone w próżni, stygnie, ciało chłodniejsze od otoczenia, choćby umieszczone w próżni, ogrzewa się tak długo, dopóki temperatura jego nie zrówna się z temperaturą otoczenia. Wszystkie te zjawiska wykazują, że ciepło może się przenosić z jednych ciał do drugich bez pośrednictwa jakiegokolwiek środowiska materialnego. Słońce ogrzewa Ziemię, mimo że między tymi ciałami rozciąga się ogromna pusta przestrzeń.

Ciepło przenosi się od jednych ciał do drugich w ten sposób, że zamienia się na promieniowanie, fale elektromagnetyczne, unoszące energię. Energia ta w miejscu, gdzie pada promieniowanie, zamienia się na inne rodzaje energii, najczęściej na ciepło. Może jednak również zamieniać się np. na energię chemiczną, elektryczną itd.

Możemy bez trudu stwierdzić, że promieniowanie, jakie wysyłają ciała ciemne ogrzane, promieniowanie ciemne, rozchodzi się podobnie jak światło po liniach prostych, ulega odbiciu i załamaniu na granicy dwóch środowisk. Za pomocą metalowego zwierciadła wklęsłego można promieniowanie skupić w jednym punkcie lub przynajmniej w małym obszarze i uzyskać tam znaczne podwyższenie temperatury. Można to również zrobić za pomocą soczewki z odpowiedniego materiału, np. z soli kamiennej.

Różne rodzaje promieniowania niewidzialnego różnią się od światła widzialnego tylko długością fali. Na oko działają fale elektromagnetyczne, których długość zawarta jest w wąskich granicach od 3700 do 7700 Å. Na inne długości fal oko nie jest wrażliwe.

Gdy promieniowanie pada na ciało, to w ogólności dzieli się na trzy części: jedna część odbija się od powierzchni, druga część przechodzi do wnętrza i zostaje w nim pochłonięta albo, jak mówimy, zaabsorbowana, trzecia część zaś przechodzi przez ciało.

Przypuśćmy, że promieniowanie padające na jakieś ciało przynosi w każdej sekundzie ilość energii I. Jeżeli ułamek wyrażający, jaka część została odbita,

oznaczymy przez ϱ, część pochłoniętą, czyli zaabsorbowaną, oznaczymy przez a, przepuszczoną zaś przez τ, to możemy napisać równanie:

$$\varrho I + aI + \tau I = I,$$

skąd

$$\varrho + a + \tau = 1, \tag{20.3}$$

ϱ nazywamy zdolnością odbijania, a — zdolnością absorpcji, τ — przezroczystością danego ciała. Te współczynniki ϱ, a i τ dla różnych ciał różnią się bardzo znacznie. Polerowane metale np. odbijają większą część padającego na nie promieniowania. Polerowane srebro odbija 98% padającego promieniowania widzialnego. Prawie nic zaś nie przepuszcza ani nie pochłania. Dlatego chcąc, aby ciało jak najmniej traciło ciepła przez promieniowanie albo też, aby jak najmniej pochłaniało, srebrzymy jego powierzchnię. Tak srebrzy się np. termosy. Naczynia kalorymetryczne srebrzy się albo nikluje i poleruje.

Inne ciała, jak np. szkło, woda, mało odbijają i mało pochłaniają, a dużo przepuszczają — przynajmniej z pewnych gatunków promieniowania. Tu zachodzi często przypadek, że ciało przezroczyste dla niektórych rodzajów promieniowania może być nieprzezroczyste dla innych. Szkło np., które jest przezroczyste dla światła widzialnego, bardzo silnie pochłania promienie podczerwone i nadfioletowe. Powietrze doskonale przepuszczające światło widzialne pochłania promienie nadfioletowe.

Ciała o powierzchni ciemnej, matowej, pochłaniają znaczną część padającego na nie promieniowania. Istnieją ciała pochłaniające prawie całkowicie padające na nie promieniowanie. Tak np. sadza pochłania 98% promieniowania. Ponieważ pochłanianie promieniowania zależy od cienkiej powierzchniowej warstewki, ciało pokryte sadzą wystawione na działanie promieniowania ogrzewa się bardzo silnie.

Ciało, które pochłaniałoby całkowicie padające na nie promieniowanie, nazywamy ciałem doskonale czarnym. Ponieważ energia promieniowania przy absorpcji przez ciała zbliżone do ciała doskonale czarnego, np. przez sadzę, zamienia się na ciepło, zatem mierząc wzrost temperatury ciała czarnego moglibyśmy znaleźć całkowitą ilość energii przyniesionej przez promieniowanie tak widzialne, jak i niewidzialne.

Ciało doskonale czarne w przyrodzie nie istnieje, lecz może być sztucznie zbudowane w sposób następujący: gdy w zamkniętym naczyniu z jakiegokolwiek nieprzezroczystego materiału zrobimy niewielki otwór, to wiązka promieni wpuszczona przez ten otworek do środka ulegnie wielokrotnemu odbiciu od ścian, przy tym przy każdym odbiciu część energii zostanie pochłonięta. Przy wielokrotnym odbiciu promieniowanie zostanie całkowicie pochłonięte, otworek zatem ma własności ciała doskonale czarnego.

Ciało ogrzane wysyła promieniowanie, które ogrzewa pochłaniające je ciała znajdujące się w otoczeniu. Wysyłanie promieniowania nazywamy emisją. Emisja

promieniowania zależy w wysokim stopniu od własności powierzchni ciała. Kirchhoff wykazał, że emisja, to znaczy ilość energii wysyłanej przez dane ciało w postaci promieniowania w jednostce czasu, jest proporcjonalna do jego zdolności absorpcji dla danego gatunku promieniowania i dla danej temperatury. Jeżeli więc ciało doskonale czarne najwięcej pochłania promieniowania ze wszystkich ciał, to również najwięcej w tych samych warunkach będzie promieniować.

W roku 1878 Stefan wypowiedział prawo wyprowadzone później teoretycznie przez Boltzmanna, nazywane teraz prawem Stefana — Boltzmanna:

Całkowite promieniowanie doskonale czarnego ciała jest proporcjonalne do czwartej potęgi temperatury bezwzględnej.

Według tego prawa jednostka powierzchni promieniuje w sekundzie w jedną stronę, to znaczy w kąt przestrzenny 2π, promieniowanie o energii:

$$E = \sigma T^4. \tag{20.4}$$

Według pomiarów

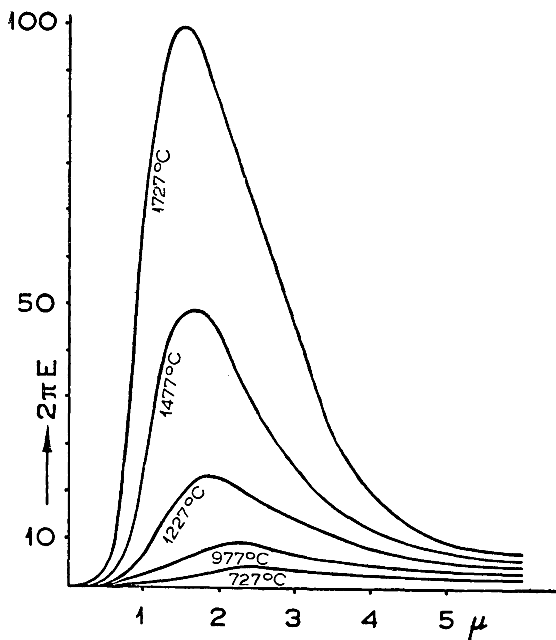
$$\sigma = 5{,}77 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1} \text{ stop}^{-4} = 1{,}378 \times 10^{-12} \text{ cal cm}^{-2} \text{ sec}^{-1} \text{ stop}^{-4}.$$

Przy pomiarach trzeba uwzględniać, że nie tylko badane źródło wysyła promieniowanie, ale również to ciało, które promieniowanie pochłania. Jeżeli to uwzględnimy i będziemy uważali ciało pochłaniające za ciało doskonale czarne, to musimy stosować równanie:

$$E = \sigma (T^4 - T_1^4), \tag{20.5}$$

gdzie T_1 oznacza temperaturę bezwzględną ciała pochłaniającego promieniowanie źródła.

Pomiary promieniowania ciała czarnego dały rozkład energii wysyłanej w jednostce czasu w widmie wysyłanego promieniowania. Rysunek 20.27 daje zależność energii wypromieniowywanej w sec od długości fali. Z rysunku tego widać, że przy wzroście temperatury jednocześnie z szybkim wzrostem wypromieniowywanej energii maksimum krzywej przesuwa się w kierunku krótszych fal. Nawet przy wysokiej temperaturze ciała czarnego większa część wysyłanej energii przypada na promieniowanie podczerwone. Według prawa Wiena długość fali odpowiadającej



Rys. 20.27. Rozkład energii w widmie promieniowania ciała czarnego

największej wysyłanej w sekundzie energii jest odwrotnie proporcjonalna do temperatury bezwzględnej:

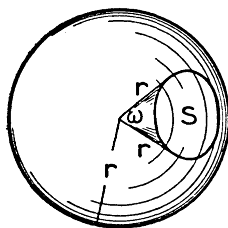
$$\lambda_{max} = \frac{2884\,\mu}{T} = \frac{28\,840\,000\,\text{Å}}{T}.$$

Z wzoru tego wynika, że dopiero przy temperaturze około 4000° abs. maksimum wypada w promieniach widzialnych (czerwonych).

20. 16. Wielkości fotometryczne. Fotometria jest działem fizyki zajmującym się pomiarami promieniowania. Będziemy zajmowali się najpierw całkowitym promieniowaniem, które zawiera tak promieniowanie widzialne (światło), jak i niewidzialne. Istnieją przyrządy, które pozwalają mierzyć energię promieniowania, jak bolometr (o którym później będzie mowa) lub poczerniony termoelement.

Wprowadzimy na początku pewne pojęcia i definicje, które są potrzebne do ujęcia zjawisk promieniowania.

Pierwszym takim pojęciem potrzebnym jest kąt bryłowy. *Kątem bryłowym* nazywamy część przestrzeni ograniczoną powierzchnią utworzoną przez półproste wychodzące z jednego punktu (a więc zawartą wewnątrz pewnej powierzchni stożkowej, rys. 20.28). Kąt bryłowy wycinający z kuli zatoczonej promieniem o długości równej jednostce np. 1 cm powierzchnię o polu równym jednostce (1 cm²) przyjmujemy za jednostkowy. Ten jednostkowy kąt bryłowy nazywa się *steradian* (srd). Gdy jakiś inny kąt bryłowy wytnie z tej samej powierzchni kulistej część o polu 2, 3 itd., w ogólności n razy większym, to będzie on zawierał 2, 3, ... n steradianów.



Rys. 20.28. Kąt bryłowy

Jeżeli z wierzchołka kąta bryłowego zatoczymy drugą kulę dowolnym większym promieniem r, to pole S wyciętej powierzchni wzrośnie r^2 razy. Dzieląc zatem S przez r^2 otrzymamy wielkość pola wyciętego przez ten sam kąt bryłowy z powierzchni o promieniu jednostkowym. Miarą zatem kąta bryłowego jest iloraz $\frac{S}{r^2}$

$$\omega = \frac{S}{r^2}. \qquad (20.6)$$

Miarą kąta bryłowego jest stosunek pola części powierzchni kulistej zawartej wewnątrz tego kąta bryłowego do kwadratu jej promienia. Jak widać z tego wzoru, kąt bryłowy, jako stosunek dwóch wielkości o takim samym wymiarze będzie wielkością bezwymiarową.

Kąt bryłowy z jednej strony płaszczyzny będzie zawierał $\frac{2\pi r^2}{r^2} = 2\pi$ stera-

dianów, kąt bryłowy otaczający punkt ze wszystkich stron (pełny) $\frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$ steradianów.

Promieniowanie, jak wiemy, rozchodzi się prostoliniowo niosąc ze sobą energię, którą możemy zmierzyć pochłaniając ją i np. zamieniając na ciepło. Energię przenoszoną w sekundzie przez część danej powierzchni kulistej, a więc przenoszoną wewnątrz określonego kąta bryłowego nazywamy strumieniem promieniowania przez tę powierzchnię. Jednostkami strumienia promieniowania jako ilości energii przypadającej na sekundę są jednostki mocy, a więc erg na sekundę, wat lub cal/sec. Oznaczając przez Φ_p strumień promieniowania, zaś dU ilość energii przenoszonej przez daną powierzchnię w czasie dt możemy napisać

$$\Phi_p = \frac{dU_p}{dt}. \tag{20.7}$$

Wskaźnik p będzie oznaczał, że wielkości z tym wskaźnikiem odnoszą się do całkowitego promieniowania. W fotometrii świetlnej bowiem spotkamy analogiczne wielkości, lecz odnoszące się tylko do światła widzialnego (a więc tylko do pewnej części promieniowania).

Promieniowanie wysyłane jest przez rozmaite źródła np. przez ciała ogrzane lub rozżarzone. Przypuśćmy najpierw, że mamy punktowe źródło promieniowania. *Natężeniem energetycznym źródła* promieniowania I_p w danym kierunku nazwiemy stosunek strumienia promieniowania $d\Phi_p$, wysyłanego w bardzo mały kąt bryłowy, do wielkości tego kąta bryłowego:

$$I_p = \frac{d\Phi_p}{d\omega}. \tag{20.8}$$

Stąd otrzymamy

$$d\Phi_p = I_p \, d\omega; \tag{20.9}$$

I_p będzie się wyrażać w watach na steradian.

Niektóre źródła promieniowania wysyłają w rozmaitych kierunkach różniące się między sobą strumienie energii promienistej. Natężenie takich źródeł promieniowania będzie różne w różnych kierunkach. Całkowity wysyłany przez takie źródło strumień promieniowania otrzymamy sumując strumienie na cały kąt pełny:

$$\Phi_p = \int\limits_{4\pi} I_p \, d\omega, \tag{20.10}$$

gdzie I_p jest funkcją kierunku w przestrzeni. Jeżeli wysyłane promieniowanie jest izotropowe, to znaczy natężenie źródła promieniowania jest jednakowe we wszystkich kierunkach, wówczas

$$\Phi_p = I_p \int\limits_{4\pi} d\omega = 4\pi I_p, \tag{20.11}$$

skąd otrzymamy

$$I_p = \frac{\Phi_p}{4\pi}. \qquad (20.12)$$

Promieniowanie wysyłane przez źródła pada na powierzchnię rozmaitych ciał. Natężeniem oświetlenia energetycznego E_p danego elementu powierzchni dS normalnego do padających promieni nazwiemy stosunek strumienia promieniowania $d\Phi_p$ padającego na tę powierzchnię do jej pola

$$E_p = \frac{d\Phi_p}{dS}. \qquad (20.13)$$

Jednostką natężenia oświetlenia energetycznego będzie wat/cm². Jeżeli promienie nie padają normalnie do powierzchni dS, lecz pod kątem, to strumień promieniowania, który otrzymuje element dS będzie mniejszy. Jak łatwo stwierdzić z rys. 20.29, jeżeli element dS ustawiony normalnie do promieni otrzymuje strumień promieniowania $d\Phi_p$, to ten sam element, jeżeli jego normalna tworzy kąt α z kierunkiem promieni, otrzyma strumień promieniowania

$$d\Phi_p \cos\alpha.$$

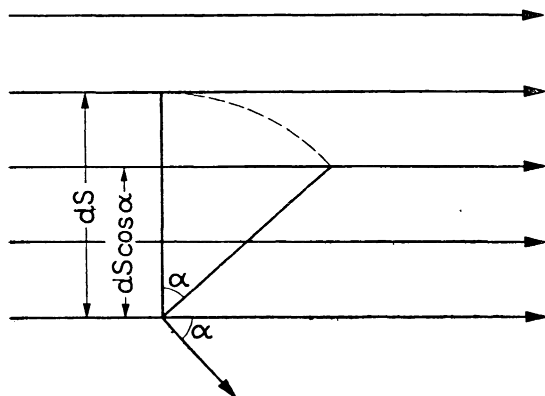
A więc natężenie oświetlenia energetycznego będzie wtedy

$$E_\alpha = \frac{d\Phi_p}{dS}\cos\alpha. \qquad (20.14)$$

Z porównania wzorów (20.13) i (20.14) widać, że

$$E_\alpha = E_p \cos\alpha. \qquad (20.15)$$

Natężenie oświetlenia powierzchni, której normalna tworzy z kierunkiem promieni kąt α jest proporcjonalne do $\cos\alpha$. Im większy ten kąt, tym natężenie oświetlenia mniejsze. Gdy $\alpha = 90°$, $\cos\alpha = 0$, $E_\alpha = 0$.



Rys. 20.29. Strumień promieniowania padający na element powierzchni, której normalna tworzy kąt α z kierunkiem promieni, jest zmniejszony w stosunku $\cos\alpha : 1$ wobec strumienia padającego prostopadle na powierzchnię

Istnieją obecnie źródła promieniowania prawie punktowe, np. tzw. lampa punktowa wolframowa, w której źródłem promieniowania jest malutka kuleczka wolframowa rozpalona przez łuk elektryczny. Jednakże w większości wypadków źródła promieniowania mają większą lub mniejszą powierzchnię.

Promieniowanie może pochodzić nie tylko ze źródła samodzielnie promieniującego. Może pochodzić również od ciał odbijających promieniowanie. Jeżeli bowiem na ciało samodzielnie nie promieniujące pada jakieś obce promieniowanie, to powierzchnia tego ciała odbija w większej lub mniejszej części padające na nią

promieniowanie (np. księżyc odbija promieniowanie Słońca). W ogólności zatem powierzchnie rozmaitych ciał wysyłają w różne strony strumienie promieniowania. Oczywiście jedne ciała będą silniej promieniowały, inne — słabiej. Różnice między nimi ujmujemy za pomocą pojęcia *jasności*. Weźmy pod uwagę element powierzchni ciała wysyłającego promieniowanie (obojętne swoje własne, czy obce odbite). Strumień wysyłanego promieniowania w kierunku normalnym do elementu powierzchni będzie proporcjonalny do pola tego elementu dS (gdyż każdy punkt powierzchni wysyła promieniowanie) oraz do wziętego pod uwagę kąta bryłowego $d\omega$

$$d\Phi_p \sim dS\, d\omega\,.$$

Możemy więc napisać

$$d\Phi_p = B_p\, dS\, d\omega\,, \tag{20.16}$$

gdzie współczynnik proporcjonalności B_p nazywa się jasnością energetyczną powierzchni. Wielkość ta jest zależna jedynie od stanu i właściwości powierzchni wysyłającej promieniowanie. Jak z powyższego związku wynika,

$$B_p = \frac{d\Phi_p}{dS\, d\omega}\,. \tag{20.17}$$

Jasność energetyczna będzie się zatem wyrażać w watach na cm² i steradian.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę wiązkę promieniowania w kierunku tworzącym kąt α z kierunkiem normalnej do elementu, to wtedy przekrój wiązki będzie, podobnie jak to stwierdziliśmy przy omawianiu oświetlenia, proporcjonalny do $\cos\alpha$. A więc w tym przypadku strumień promieniowania będzie określony wzorem

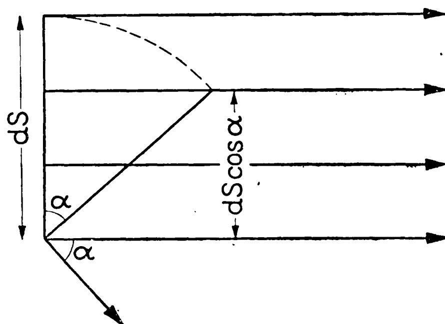
$$d\Phi_p = B_p \cos\alpha\, dS\, d\omega\,. \tag{20.18}$$

Całkowity strumień promieniowania z danej powierzchni będzie

$$\Phi_p = \int B_p \cos\alpha\, dS\, d\omega\,, \tag{29.19}$$

gdzie całkowanie musimy rozciągnąć na kąt półpełny (gdy powierzchnia promieniuje w jedną stronę). Gdy jasność powierzchni jest jednakowa we wszystkich kierunkach, co często zachodzi, wówczas B_p jest stałe i całkowanie daje wynik

$$\Phi_p = \pi B_p\, dS. \tag{20.20}$$



Rys. 20.30. Przekrój wiązki promieni wysyłanej przez element dS w kierunku tworzącym z normalną do dS kąt α jest $dS \cos\alpha$

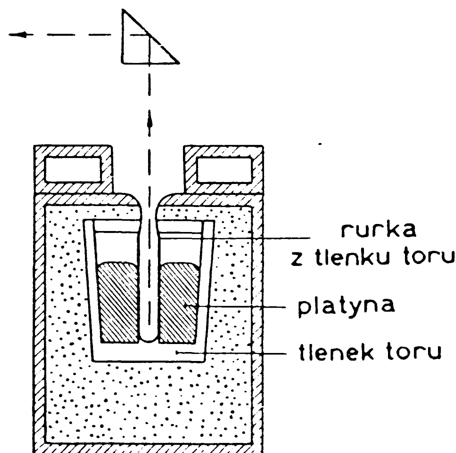
Porównując wzór (20.9) na natężenie źródła promieniowania (punktowego) w danym kierunku i wzór (20.16) na jasność energetyczną w kierunku normalnym możemy napisać

$$I_p = B_p\, dS. \tag{20.21}$$

Natężenie rozciągłego źródła promieniowania w kierunku normalnym równa się jasności powierzchni pomnożonej przez pole dS. Jest to ważny wzór, z którego zaraz zrobimy użytek.

20.17. Fotometria świetlna. Jeżeli chodzi o pomiary światła, to ważna jest w tym wypadku nie całkowita energia promieniowania, tylko ta część, na którą wrażliwe jest nasze oko. Wszystkie wielkości zatem, o których będziemy mówili w niniejszym rozdziale, choć w identyczny sposób zdefiniowane i tak samo oznaczone, jak poprzednio, odnosić się będą tylko do pewnej części promieniowania, do światła widzialnego. Dla odróżnienia oznaczeń od poprzednio używanych opuścimy przy nich wskaźnik p.

Ze względu na wielkie trudności wyodrębnienia z całkowitej energii promieniowania energii przypadającej na światło widzialne, które w dodatku jest mieszaniną fal różnej długości, na które oko różnie reaguje, trzeba było zrezygnować z przyjęcia strumienia światła jako wielkości podstawowej. Za wielkość podstawową przyjęto jasność powierzchni B, którą możemy oceniać okiem. W r. 1937 Międzynarodowy Komitet Miar i Wag postanowił zmienić dawniej używane jednostki i wprowadzić jako podstawową jednostkę *jasności* określoną w sposób następujący: jednostkową jasność ma powierzchnia o jednej sześćdziesiątej jasności ciała doskonale czarnego w kierunku normalnym w temperaturze krzepnącej platyny (1773°). Jednostka ta nazywa się *stilb**. Wzorzec przedstawiony jest na rys. 20.31. Promieniowanie jest w nim wysyłane przez ciało czarne w postaci rurki z tlenku toru utrzymywanej w wysokiej temperaturze przez otaczającą ją platynę w temperaturze krzepnięcia. Jednostka ta obowiązuje wszystkie kraje należące do Konwencji Metrycznej.



Rys. 20.31. Wzorzec jasności

Mieliśmy poprzednio związek (20.20):

$$I = B\,dS \tag{20.22}$$

dla kierunku normalnego do powierzchni świecącej (piszemy obecnie ten sam wzór, tylko bez wskaźnika p. Odnosi się on obecnie tylko do energii światła). I nazywa się natężeniem źródła światła w kierunku normalnym do jego powierzchni albo *światłością*. Gdy $B = 1$ stilb, $dS = 1$ cm^2, wówczas natężenie źródła światła w kierunku normalnym do powierzchni $I = 1$. Jednostkę tę nazwano

* *στιλβω* (stilbo) — po grecku świecić.

kandelą (cd)*. Źródło światła ma w danym kierunku światłość 1 kandeli na każdy cm^2, gdy jego jasność jest 1 stilb.

Wyobraźmy sobie teraz, że powierzchnia świecąca zmniejsza się coraz więcej, ale jednocześnie jasność się powiększa tak, że wysyłany strumień światła się nie zmniejsza. Otrzymamy w rezultacie punkt świecący, który w każdym kierunku w dany kąt bryłowy $d\omega$ wysyła taki sam strumień światła, jak kandela w kierunku normalnym. Strumień światła emitowany przez takie punktowe źródło światła, zawarty w jednostkowym kącie bryłowym przyjmuje się za jednostkowy zgodnie z wzorem (20.9):

$$d\Phi = I\,d\omega. \tag{20.23}$$

Gdy $I = 1$ cd, $d\omega = 1$ srd, to $d\Phi = 1$. Jednostkę tę nazwano *lumen* (lm)**. Używa się też jednostki 10 razy większej zwanej dekalumen (dlm). Punkt świecący mając światłość 1 kandeli wysyła w kąt = 1 srd strumień światła = 1 lumen, na wszystkie strony wysyła strumień światła 4π lumenów = 12,55 lm = 1,255 dlm.

Używane przez nas źródła światła są bardzo mało wydajne. Tylko niewielka część wysyłanej energii przypada na światło widzialne. Zależy to zresztą od temperatury: im wyższa temperatura tym większa część energii promieniowania przypada na światło. Przy temperaturze 3000°C np. widzialne światło stanowi około 9% wysyłanego promieniowania. Z tej energii ze względu na małą wrażliwość siatkówki na promieniowanie czerwone i fioletowe oko wykorzystuje około 3%.

Natężenie oświetlenia definiuje się w taki sam sposób, jak natężenie oświetlenia energetycznego (wzór 20.13):

$$E = \frac{d\Phi}{dS}, \tag{20.24}$$

gdzie $d\Phi$ jest strumieniem światła padającym na element dS normalnie. Jeżeli $d\Phi$ jest proporcjonalne do dS, to możemy napisać

$$E = \frac{\Phi}{S}. \tag{20.25}$$

Gdy na powierzchnię $S = 1\ m^2$ pada strumień światła $\Phi = 1$ lm, wówczas natężenie oświetlenia $E = 1$ luks (lx)***. (1 luks jest natężeniem oświetlenia powierzchni kulistej o promieniu 1 m, w środku której znajduje się punktowe źródło o światłości 1 kandeli we wszystkich kierunkach).

Gdy punktowe źródło światła otoczymy dwiema współśrodkowymi powierzchniami kulistymi o promieniach r_1 i r_2, wówczas ten sam kąt bryłowy $d\omega$ wycina

---

* *candela* — po łacinie świeca.

** *lumen* — po łacinie światło.

*** *lux* — po łacinie jasność.

z nich pola odpowiednio $r_1^2\,d\omega$ i $r_2^2\,d\omega$. Pada zaś na nie ten sam strumień światła. Zatem natężenia oświetlenia tych powierzchni będą:

$$E_1 = \frac{d\Phi}{r_1^2\,d\omega} = \frac{I\,d\omega}{r_1^2\,d\omega} = \frac{I}{r_1^2}, \qquad E_2 = \frac{d\Phi}{r_2^2\,d\omega} = \frac{I\,d\omega}{r_2^2\,d\omega} = \frac{I}{r_2^2},$$

skąd

$$E_1 : E_2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2} = r_2^2 : r_1^2. \tag{20.26}$$

Natężenie oświetlenia powierzchni jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu jej odległości od źródła światła. Jeżeli powierzchnia nie jest normalna do padających promieni, wówczas natężenie oświetlenia jest mniejsze. Dla tego przypadku wyprowadziliśmy już poprzednio wzór

$$E_a = E\cos a,$$

gdzie a jest kątem między normalną do powierzchni i kierunkiem promieni.

Tabela 20.1.

Przykłady oświetleń i jasności różnych powierzchni

	Natężenie oświetlenia w luksach	Jasność w kandelach/cm² albo stilbach
Granica widzialności w ciemności	—	0,0000064
Wnętrze pokoju		ścian odbijających 80% światła
	słabe 20 — 40	0,0005 — 0,001
	średnie 40 — 80	0,001 — 0,002
	silne 80 — 100	0,002 — 0,003
Ekran w kinematografie	80 — 250	0,002 — 0,0064
Powierzchnia oświetlona przez padające na nią prostopadle promienie słońca w lecie	100 000	—
Kartka białego papieru oświetlona prostopadłymi promieniami słońca letniego odbijająca 80% światła	100 000	2,5
Lampa neonowa reklamowa	—	0,25
Księżyc w zenicie	—	1
Palnik gazowożarowy	—	7
Żarówka elektryczna	—	600 — 1900
Krater lampy łukowej	—	15 000
Słońce w południe	—	220 000

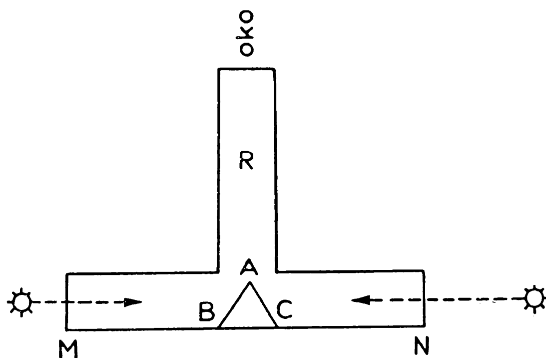
Tabela 20.2.

Zestawienie różnych wielkości i jednostek fotometrycznych

Wielkość	Oznaczenie	Jednostka	Definicja
Jasność	B	stilb (sb)	1 sb = $^1/_{60}$ jasności ciała czarnego w temperaturze krzepnięcia platyny
Światłość	I	kandela (cd)	$I = BS$ (S — powierzchnia wysyłająca światło)
Strumień światła	Φ	lumen (lm)	$\Phi = I\omega$ (ω — kąt bryłowy)
Natężenie oświetlenia	E	luks (lx)	$E = \Phi/S$

20.18. Pomiary fotometryczne. Jednostki fotometryczne, o których mówiliśmy w poprzednim rozdziale, są oparte na działaniu energii promienistej na oko ludzkie. Zadaniem fotometrii są pomiary strumieni światła, a więc widzialnej części promieniowania, skąd można ocenić również natężenia rozmaitych źródeł światła. Natężenia źródeł światła wyznaczamy porównując je z natężeniem wzorca. Zazwyczaj w praktycznej fotometrii używa się nie wzorca opisanego w ust. 20.16, lecz wzorców wtórnych, odpowiednio sporządzonych i wycechowanych żarówek elektrycznych.

Przyrządy, za pomocą których wykonywamy te pomiary, nazywamy fotometrami. Oko nie może bezpośrednio ocenić równości czy też różnic natężeń, natomiast stosunkowo dobrze ocenia różnice oświetlenia. W fotometrach obserwuje się powierzchnie oświetlone przez dwa porównywane źródła światła. Przy tym dobiera się tak odległości źródeł światła, aby oświetlenia stykających się powierzchni były jednakowe. Jednym z najprostszych fotometrów jest fotometr z pryzmatem przedstawiony na rys. 20.32. Pryzmat o białych, dobrze rozpraszających światło ścianach, umieszczony jest wewnątrz poczernionej rury MN. Przez rurę R oko może obserwować pryzmat. Porównywane źródła światła ustawiamy tak, aby oświetlały one obie powierzchnie pryzmatu AB i AC. Natężenia oświetleń ich będą



Rys. 20.32. Fotometr

$$E_1 = \frac{I_1}{r_1^2}\cos\alpha, \qquad E_2 = \frac{I_2}{r_2^2}\cos\alpha, \tag{20.27}$$

gdzie I_1 i I_2 oznaczają natężenia źródeł światła r_1 i r_2 — ich odległości od pryzmatu, α — kąt padania promieni na ścianę pryzmatu. Dobieramy teraz tak długo odległości r_1 i r_2, dopóki granica między ścianami AB i AC nie zniknie. Jest to dowodem, że natężenia oświetlenia obu ścian są równe, a więc $E_1 = E_2$. Przyrównując prawe strony powyższych równań otrzymamy

$$\frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2}, \tag{20.28}$$

skąd

$$I_2 = I_1 \frac{r_2^2}{r_1^2}. \tag{20.29}$$

Używając jako jednego źródła światła wzorcowej żarówki o znanym natężeniu I_1 możemy określić nieznane natężenie I_2 drugiego źródła.

Inne, dokładniejsze fotometry stosują zwykle tę samą zasadę porównywania oświetleń dwóch bezpośrednio stykających się ze sobą powierzchni (względnie sprowadzonych do zetknięcia za pomocą odpowiednich optycznych układów zwierciadeł lub pryzmatów). Ich urządzenia pozwalają na dokładniejszą ocenę równości natężeń oświetlenia. Pospolicie używane do oświetlenia źródła światła, takie jak żarówka np., mają światłość rozmaitą w rozmaitych kierunkach. Toteż zwykle nie podaje się natężeń tych źródeł w kandelach tylko całkowity wysyłany przez nie strumień światła w dekalumenach. Ponieważ 1 kandela wysyła we wszystkich kierunkach 1,255 dlm (4π lm), więc łatwo przeliczyć jakie źródło izotropowe dałoby strumień wynoszący taką samą liczbę dekalumenów. Istnieją przyrządy pozwalające mierzyć całkowity emitowany przez źródło strumień światła.

Do pomiarów natężenia oświetlenia używa się dzisiaj coraz częściej przyrządów zawierających tzw. ogniwo fotoelektryczne zaporowe (zwykle selenowe). Padające na takie ogniwo światło powoduje powstanie prądu działającego na czuły amperomierz. Skala amperomierza wycechowana jest wprost w luksach.

Zadania

20.1. Ile rys na milimetrze ma siatka dyfrakcyjna, jeżeli światło sodowe (5890 Å) ugina pod kątem 36°5′?

Odpowiedź: 1000.

20.2. Pod jakim kątem należy skierować promień światła na powierzchnię wody ($n = 1{,}33$), aby po odbiciu się był on całkowicie spolaryzowany?

Odpowiedź: 53°7′.

20.3. Jaki będzie kąt polaryzacji przy odbiciu od szyby szkła koronowego światła czerwonego $\lambda = 6870$ Å ($n = 1{,}513$) oraz fioletowego $\lambda = 3970$ Å ($n = 1{,}533$)?

Odpowiedź: 56°32′; 56°53′.

20.4. Jaka jest prędkość światła w promieniu zwyczajnym ($n = 1{,}65$) i nadzwyczajnym ($n = 1{,}48$), gdy biegnie ono w kierunku prostopadłym do osi w krysztale kalcytu ($c = 299\,800$ km/sec)?

Odpowiedź: 181 800 km/sec; 202 600 km/sec.

20.5. Jaką różnicę faz między promieniem zwyczajnym i nadzwyczajnym daje płytka kwarcu równoległa do osi optycznej grubości 0,11 mm w świetle czerwonym $\lambda_1 = 6870$ Å ($n_z = 1{,}5410$, $n_n = 1{,}5500$) i w świetle niebieskim $\lambda_2 = 4860$ Å ($n_z = 1{,}5497$, $n_n = 1{,}5590$).

Odpowiedź: Różnica faz $= \frac{2\pi d}{\lambda}(n_n - n_z)$ dla światła czerwonego: $1{,}4 \cdot 2\pi$, dla niebieskiego $2{,}1 \cdot 2\pi$.

20.6. Kąt bryłowy wycina z kuli o promieniu 5 cm powierzchnię o polu $S = 1$ cm². Ile zawiera steradianów?

Odpowiedź: $^1/_{25}$ srd.

20.7. Jaką częścią kąta pełnego (4π) jest poprzednio obliczony kąt?

Odpowiedź: $^1/_{314}$ częścią.

20.8. Jaki będzie strumień promieniowania wysyłany przez żarówkę 60-watową w kąt $^1/_{10}$ srd w założeniu, że promieniowanie to jest izotropowe?

Odpowiedź: 0,48 W.

20.9. Jakie będzie natężenie energetyczne tej żarówki?

Odpowiedź: $I_p = \frac{60}{4\pi} = 4{,}77$ W/srd.

20.10. Jakie będzie oświetlenie energetyczne powierzchni znajdującej się w odległości 1 m od powyższej żarówki? (gdyby gaz i szklana bańka nie pochłaniały promieniowania)?

Odpowiedź: $E_p = 4{,}77 \cdot 10^{-4}$ W/srd.

20.11. Rozżarzona kula o promieniu $r = 2$ cm wysyła na wszystkie strony strumień promieniowania 400 W. Jaka jest jasność energetyczna jej powierzchni?

Odpowiedź: 0,63 W/cm² srd.

20.12. Natężenie oświetlenia powierzchni normalnej do promieni słonecznych na Ziemi wynosi około 100 000 lx. Przyjmując, że jasność powierzchni Słońca jest jednakowa we wszystkich kierunkach i zaniedbując pochłanianie światła w atmosferze obliczyć jasność powierzchni Słońca (odległość Ziemi od Słońca $R = 1{,}5 \cdot 10^8$ km, średnica Słońca $2r = 1{,}4 \cdot 10^6$ km)

Odpowiedź: $B = 1{,}46 \cdot 10^5$ sb.

Pytania do powtórzenia materiału

1. W jaki sposób zmierzono prędkość światła?
2. Kiedy powstaje zjawisko dyfrakcji światła? Jak je objaśnić?
3. Kiedy powstają prążki interferencyjne? Jak tłumaczy się prostoliniowe rozchodzenie się światła z punktu widzenia teorii Huygensa?
4. Jakie jest działanie siatki dyfrakcyjnej? Jaki pomiar jest możliwy za pomocą tego przyrządu?
5. Dlaczego promienie ugięte przez siatkę dyfrakcyjną można obserwować jedynie pod kątem określonym równaniem 20. 1?

6. Kiedy światło po odbiciu staje się spolaryzowane całkowicie? Czym różni się światło spolaryzowane od niespolaryzowanego?
7. Na czym polega zjawisko tzw. podwójnego załamania w kryształach?
8. Jakich używamy polaryzatorów i jak się je sporządza?
9. Kiedy w świetle spolaryzowanym występują zjawiska interferencji?
10. Jakie zjawiska wywołuje cienka płytka krystaliczna umieszczona między analizatorem i polaryzatorem w świetle równoległym?
11. Jakie zjawiska wywołuje płytka krystaliczna wycięta prostopadle do osi optycznej umieszczona w świetle zbieżnym między polaryzatorem i analizatorem?
12. Jakie zjawisko nazywamy skręceniem płaszczyzny polaryzacji?
13. Jakie są własności ciał w stosunku do promieniowania? Jakie ciało nazywamy ciałem doskonale czarnym? Jak można otrzymać powierzchnię o własnościach powierzchni ciała doskonale czarnego?
14. Jaka jest treść prawa Stefana — Boltzmanna?
15. Jaka jest treść prawa Wiena?
16. Co nazywamy kątem bryłowym? Jaka jest jednostka kąta bryłowego?
17. Co nazywamy strumieniem promieniowania? Jakimi jednostkami się mierzy?
18. Jak określa się natężenie źródła promieniowania? Jaka jest jednostka natężenia źródła promieniowania?
19. Jak się określa natężenie oświetlenia energetycznego? Jaka jest jego jednostka?
20. Jakie jest natężenie oświetlenia energetycznego w zależności od kąta nachylenia powierzchni do padających promieni?
21. Jak się określa jasność energetyczną powierzchni wysyłającej promieniowanie? Jaka jest jej jednostka?
22. Jaka jest podstawowa wielkość fotometrii świetlnej i jej jednostka?
23. Jak się określa światłość i jaka jest jej jednostka?
24. Jaka jest jednostka strumienia światła?
25. Jak się określa natężenie oświetlenia powierzchni? Jaka jest jego jednostka?
26. Jak się zmienia natężenie oświetlenia powierzchni w zależności od odległości jej od źródła światła? od nachylenia powierzchni względem padających promieni?
27. Jakie jest zadanie fotometrii? Jaka jest zasada fotometrów?

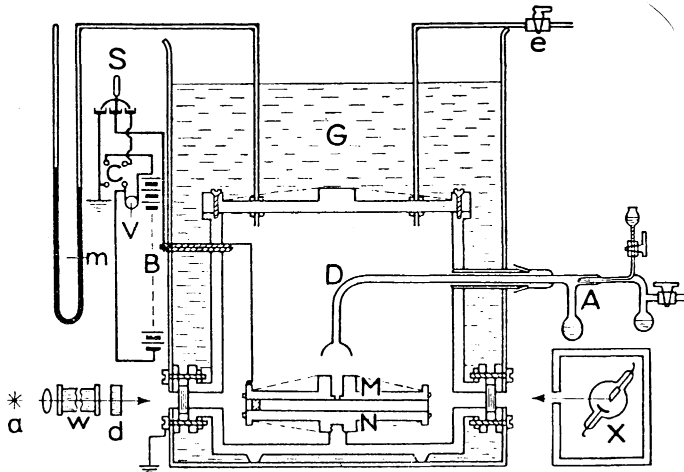
CZĘŚĆ DRUGA

WPROWADZENIE W FIZYKĘ MIKROCZĄSTEK

21. Zjawiska związane z przejściem elektryczności przez gazy

21.1. Ładunek elementarny. Elektron. Jak już o tym mówiliśmy przy zjawisku elektrolizy, z każdym jonem jednowartościowym związany jest zawsze taki sam ładunek elektryczny. Okazało się, że w najrozmaitszych zjawiskach występuje ładunek tej wielkości albo jego wielokrotność. Nigdy natomiast nie stwierdzono istnienia ładunku mniejszego. Stąd wynika, że strukturę atomistyczną ma nie tylko substancja, z której ciała są zbudowane, lecz również i elektryczność.

Różni fizycy rozmaitymi metodami starali się zmierzyć wielkość tego najmniejszego ładunku. Najdokładniejsze wyniki dały doświadczenia Millikana.



Rys. 21. 1. Aparatura Millikana do pomiaru ładunku elementarnego

a — źródło światła, *w*, *d* — filtry dla pochłonięcia promieni długofalowych (cieplnych), *MN* — okładki kondensatora, *G* — kąpiel dla utrzymania stałej temperatury, *B* — bateria, *C* — przełącznik napięcia, *S* — wyłącznik, *m* — manometr, *X* — lampa rentgenowska, *A* — rozpylacz, *V* — woltomierz

Zasada jego pomiarów była następująca: ciecz bardzo wolno parująca (np. olej parafinowy) rozpylana była w powietrzu ponad poziomymi okładkami płaskiego kondensatora, w którego górnej okładce znajdował się otworek (rys. 21.1). Cząsteczki cieczy pod wpływem napięcia powierzchniowego przybierały natychmiast kształt kuleczek. Od czasu do czasu taka mała kuleczka oleju dostawała

się między okładki kondensatora, gdzie można ją było obserwować za pomocą mikroskopu. Kuleczkę oświetlano z boku silnym światłem lampy łukowej. Przy takim oświetleniu widać ją było jako jasny punkcik na ciemnym tle.

Aby rozstrzygnąć, czy ładunek elektryczny jest zawsze całkowitą wielokrotnością zawsze tego samego bardzo małego ładunku, należało używać do doświadczeń ciał bardzo małych, które by mogły zawierać pewną bardzo niewielką liczbę tych ładunków. Z tego powodu Millikan używał kropelek wielkości ultramikroskopowej. Ładunki takich małych kuleczek są istotnie bardzo niewielkie, lecz z powodu ich nadzwyczaj małych rozmiarów niepodobna bezpośrednio zmierzyć ich średnicę. Aby ją wyznaczyć, Millikan użył następującego sposobu: Obserwował mianowicie przez mikroskop spadanie kuleczki. Kuleczka spadała w dół pod wpływem własnego ciężaru. Lecz prócz ciężaru działało jeszcze na kuleczkę według prawa Archimedesa parcie ku górze, którego doznawała ona od otaczającego powietrza. Oznaczając przez γ_k ciężar właściwy oleju, przez γ_p ciężar właściwy powietrza, przez G_k ciężar kulki, a przez G_p ciężar wypartego powietrza, można napisać

$$G_k = \frac{4}{3}\pi R^3 \gamma_k, \tag{21.1}$$

gdzie R oznacza promień kulki, zaś

$$G_p = \frac{4}{3}\pi R^3 \gamma_p. \tag{21.2}$$

Zatem siła wypadkowa działająca na kulkę w dół jest następująca:

$$G_k - G_p = \frac{4}{3}\pi R^3 (\gamma_k - \gamma_p). \tag{21.3}$$

Pod wpływem tej stałej siły kuleczka spada ze stałą prędkością określoną tzw. prawem Stokesa, według którego jej prędkość jest proporcjonalna do siły działającej, odwrotnie zaś proporcjonalna do współczynnika tarcia wewnętrznego powietrza η i do promienia kulki R. Wyraża się ono wzorem

$$F = 6\pi\eta R v. \tag{21.4}$$

Mierząc jej prędkość można było wyznaczyć promień kulki z równania

$$\frac{4}{3}\pi R^3 (\gamma_k - \gamma_p) = 6\pi\eta R v, \tag{21.5}$$

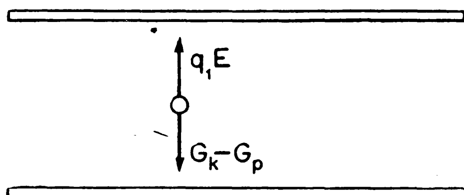
skąd

$$R = 3\sqrt{\frac{\eta v}{2(\gamma_k - \gamma_p)}}. \tag{21.6}$$

Gdy kulka obniżyła się już znacznie, załączano za pomocą odpowiedniego wyłącznika napięcie U do okładek kondensatora z baterii akumulatorów. Między

okładkami powstawało wówczas pole elektrostatyczne o natężeniu $E = \frac{U}{d}$, gdzie d oznacza odległość między okładkami kondensatora. Pole załączano w takim kierunku, aby kulka pod jego wpływem zaczęła się wznosić ku górze. Kulka przy rozpylaniu wskutek tarcia o dyszę rozpylającą uzyskiwała pewien ładunek q_1. Zatem siła działająca na nią w polu była (rys. 21.2)

$$q_1 E.$$



Rys. 21.2. Kulka oleju niosąca ładunek q między okładkami kondensatora w doświadczeniu Millikana

Całkowita siła wypadkowa działająca na kuleczkę była

$$F_1 = q_1 E - (G_k - G_p) = q_1 E - \frac{4}{3}\pi R^3 (\gamma_k - \gamma_p). \tag{21.7}$$

Pod wpływem tej siły kuleczka wznosiła się do góry z prędkością określoną wzorem

$$q_1 E - (G_k - G_p) = 6\pi\eta R v_1, \tag{21.8}$$

skąd otrzymuje się

$$q_1 E = G_k - G_p + 6\pi\eta R v_1. \tag{21.9}$$

Z chwilą, gdy kuleczka zbliżała się do górnej okładki kondensatora, pole wyłączano i kulka znów zaczynała spadać pod wpływem ciężaru. W trakcie spadania zostawała naświetlona promieniami Röntgena. Promienie Röntgena, o których będzie mowa w ust. 23.7, zmieniają ładunek kuleczki wskutek tzw. zjawiska fotoelektrycznego (patrz 24.2 i nast.). Wielkość ładunku naświetlonej kuleczki zmieniała się na q_2. Następnie znowu załączono pole elektryczne tak, aby kulka wnosiła się ku górze. Uzyskiwała ona teraz inną prędkość wyznaczoną wzorem:

$$q_2 E = G_k - G_p + 6\pi\eta R v_2. \tag{21.10}$$

Z równań (21.9) i (21.10) otrzymuje się

$$(q_2 - q_1) E = 6\pi\eta R (v_2 - v_1). \tag{21.11}$$

Oznaczając $q_2 - q_1 = \Delta q$, zaś $v_2 - v_1 = \Delta v$, można napisać:

$$\Delta q = \frac{6\pi\eta R \cdot \Delta v}{E}. \tag{21.12}$$

Ponieważ wszystkie wielkości po prawej stronie są znane, można z tego równania znaleźć Δq. Powtarzając wielokrotnie to doświadczenie Millikan przekonał się, że Δq jest wielokrotnością ładunku równego ładunkowi jonu jednowartościowego znanego z elektrolizy, wynoszącego

$$1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$$

albo

$$4{,}802 \cdot 10^{-10}\ \text{j. Es} \quad \text{lub} \quad 1{,}6 \cdot 10^{-20}\ \text{j. EM.}$$

Millikan użył zresztą zbyt małej wartości na współczynnik tarcia wewnętrznego powietrza, wskutek czego otrzymał zbyt małą wartość na ten najmniejszy ładunek. Ten jak gdyby atom elektryczności nazwano ładunkiem elementarnym. Symbolem, którym przyjęto oznaczać ładunek elementarny, jest

$$e.$$

Doświadczenia nad wyładowaniami elektrycznymi w gazach rozrzedzonych wykazały, że ładunki elementarne ujemne można wyzwolić z ciał i wypuścić np. w próżnię. Są to ciałka posiadające pewną, niezwykle małą zresztą, masę, bo wynoszącą $^{1}/_{1837}$ część masy najlżejszego ze wszystkich atomów, atomu wodoru. Cząstkę taką nazwano elektronem.

Według ostatnich danych masa elektronu wynosi

$$m = 9{,}108 \cdot 10^{-28}\ \text{g.}$$

21.2. Schematyczny szkic budowy atomów i związanej z nią budowy ciał. Obserwacje i pomiary w rozmaitych dziedzinach fizyki, a więc w dziedzinie wyładowań w gazach, w dziedzinie widm liniowych, promieniotwórczości itd. doprowadziły fizyków do przekonania, że elektron jest składnikiem, elementem wszystkich znanych nam atomów czy też drobin, z których ciała są zbudowane.

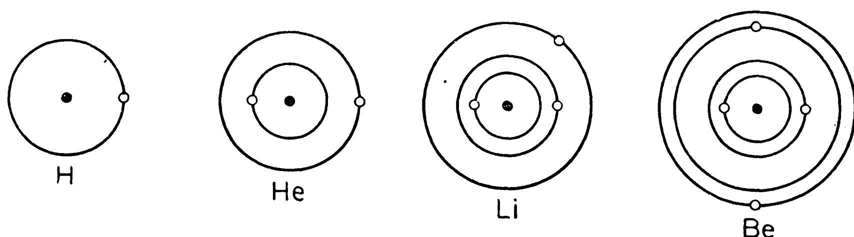
Wiadomo nam obecnie, że każdy atom składa się z dodatnio naładowanego jądra, w którym zawarta jest niemal całkowita masa atomu i z elektronów krążących wokół jądra. Najlżejszym i najprostszym jest atom wodoru, którego masa w gramach wyraża się liczbą

$$1{,}67 \cdot 10^{-24}.$$

Jego jądro nazywamy protonem. Jeżeli masę atomu tlenu przyjmiemy za 16, to masa protonu wyrazi się liczbą 1,00759. Wokół protonu krąży jeden elektron. Ładunki protonu i elektronu są równe, lecz różnoimienne, wskutek czego atom jest neutralny, a jego części dzięki wzajemnemu przyciągnaiu się tworzą stałą całość. Średnica toru elektronu określa wielkość atomu. Wskutek wzajemnego przyciągania jądro i elektron powinny się złączyć, lecz nie dopuszcza do tego siła odśrodkowa, ponieważ elektron krąży z dużą prędkością wokół jądra. Każdy następny z pierwiastków w układzie Mendelejewa ma atomy o jądrze zawierającym o jeden ładunek elementarny więcej (czyli o $+e$) i o jeden elektron więcej. A więc drugi pierwiastek, hel, ma atomy o jądrze zawierającym ładunek $+2e$ i 2 elektrony, trzeci — lit — posiada atomy zawierające w jądrze ładunek $+3e$ i trzy elektrony, czwarty — beryl — ma w jądrze ładunek $+4e$ i cztery elektrony itd (rys. 21.3). Zatem liczba ładunków elementarnych dodatnich w jądrze równa

się numerowi porządkowemu danego pierwiastka w tablicy układu periodycznego.

Jądro zajmuje bardzo małą część objętości atomu. Średnica jego jest co najmniej dziesięć tysięcy razy mniejsza od średnicy atomu. Elektron jest mniej więcej tej samej wielkości, względnie nieco mniejszy. Średnice atomów są rzędu 10^{-8} cm, średnice jąder — rzędu 10^{-12} cm. Aby unaocznić sobie te stosunki, dobrze jest wyobrazić sobie atom powiększony do bardzo dużych rozmiarów, np. 10^{11} razy (100 miliardów razy). Wtedy średnica atomu wynosiłaby 10^3 cm = = 10 metrów, zaś średnica jądra 1 milimetr. Średnica elektronu byłaby jeszcze



Rys. 21.3. Schematy atomów

nieco mniejsza. Elektrony znajdują się w różnych odległościach od jądra tworząc tzw. warstwy albo grupy oznaczone kolejnymi wielkimi literami alfabetu począwszy od litery K. Najbliższą jądra jest warstwa K zawierająca — we wszystkich pierwiastkach prócz wodoru — dwa elektrony. Następna warstwa nosi nazwę warstwy L. Warstwa ta w pierwiastkach o rosnącym numerze porządkowym stopniowo wzrasta. W atomach litu zawiera jeden elektron, w berylu — dwa itd. W neonie zawiera już pełną liczbę ośmiu elektronów, jest całkowicie „obsadzona". W następnym pierwiastku — sodzie, zaczyna się warstwa M od jednego elektronu i dochodzi stopniowo do 18 elektronów. Następna warstwa — N, gdy jest pełna, zawiera 32 elektrony. Potem idzie warstwa O nigdy nie obsadzona całkowicie, w której liczba elektronów dochodzi do osiemnastu. Następne warstwy P i Q również nie są całkowicie obsadzone. Najbliższe warstwy elektronów są najsilniej związane z jądrem, dalsze coraz słabiej. Ponieważ między jądrami i elektronami jako ładunkami przeciwnych znaków działają siły przyciągające, zatem aby oderwać elektron od atomu trzeba wykonać pewną większą lub mniejszą pracę. Pracę tę wyrażamy zazwyczaj w elektronowoltach. Elektronowolt (znak eV) jest to praca, którą wykonują siły pola elektrycznego nad elektronem podczas przebycia przez niego różnicy potencjałów 1 wolta

$$1 \text{ eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-12} \text{ erga}.$$

Jest to, bezwzględnie biorąc, bardzo niewielka energia; zważywszy jednak na niezmiernie małą masę elektronu łatwo wyliczyć, że prędkość elektronu mającego energię kinetyczną 1 eV jest znaczna. Wynosi ona 595 km/sec, jest więc niemal tysiąc razy większa od prędkości pocisku karabinowego.

Elektryzowanie ciał przez potarcie tłumaczymy sobie przechodzeniem zewnętrznych, łatwo odrywających się elektronów z jednych ciał pocieranych na drugie. Gdy potrzemy np. laskę szklaną kawałkiem skóry, elektrony z pewnej liczby atomów pierwiastków zawartych w szkle przenoszą się na skórę. Laska szklana elektryzuje się dodatnio, skóra zaś, uzyskująca nadmiar elektronów — ujemnie.

Izolatorami są pierwiastki lub ich połączenia mające tę własność, że elektrony nie mogą się w nich przemieszczać. W metalach elektrony zewnętrzne związane są z atomami przeważnie słabo. Przy bardzo dużym zbliżeniu atomów w metalu stałym, rzędu paru angstremów, elektrony zewnętrzne podlegają tak silnemu działaniu sąsiednich jąder dodatnich, że zostają, jak mówimy, „skolektywizowane", stają się własnością całego zespołu zjonizowanych atomów i poruszają się dzięki temu niemal swobodnie w przestrzeni międzyatomowej. Z wnętrza metalu na zewnątrz wydobyć się jednak nie mogą. Na granicy przewodnika występują znaczne siły przyciągające, nie pozwalające elektronom opuścić macierzystego środowiska. Aby wydobyć je z metalu, trzeba wykonać pewną pracę zależną od natury pierwiastków lub związków chemicznych znajdujących się na powierzchni. Pracę tę nazywamy pracą wyjścia. Jest ona rzędu kilku elektronowoltów.

Elektrony poruszają się między atomami metalu bezładnie. Każdy z nich biegnie po linii prostej, dopóki nie napotka na drodze atomu. Wówczas zmienia kierunek biegu i biegnie w nowym kierunku aż do nowego spotkania.

Pod wpływem różnicy potencjałów wytworzonej w przewodniku elektrony uzyskują składową prędkości w kierunku przeciwnym do pola. Wciąż rozpraszane przez drgające ruchem cieplnym atomy, elektrony biegnąc po liniach zygzakowatych przemieszczają się jednocześnie w jednym kierunku stanowiąc prąd elektryczny.

21.3. Prąd elektryczny w metalach jako ruch elektronów. Wiemy obecnie, że przepływ prądu elektrycznego w metalach polega na ruchu elektronów. Gdy drut np. miedziany przyłączymy do biegunów baterii ogniw, pojawi się wewnątrz drutu pole elektryczne. Każdy z niemal swobodnych elektronów nabywa przyśpieszenia w kierunku przeciwnym do pola elektrycznego (z powodu ujemnego ładunku). Na bezładny ruch elektronów nakłada się ruch skierowany. Jednakże ich energia kinetyczna zmienia się niewiele wskutek oddawania jej drgającym jonom metalu. W rezultacie praca wykonana przez pole ma jako skutek powiększenie ruchu cieplnego atomów. Choć więc na bardzo krótkich odcinkach drogi swobodnej elektrony poruszają się ruchem przyśpieszonym, to ich przemieszczanie się wzdłuż pola elektrycznego odbywa się ze stałą średnią prędkością. Obliczmy związek między tą prędkością i liczbą elektronów a natężeniem prądu. Oznaczmy liczbę swobodnych elektronów znajdujących się w każdym cm^3 przewodnika przez N. Pod wpływem różnicy po-

tencjałów na przewodniku nabywają one prędkości v (będzie to ich składowa prędkości w kierunku osi przewodnika). W czasie Δt elektrony znajdujące się w objętości $Sv\Delta t$, gdzie S jest przekrojem przewodnika, przejdą przez przekrój S (rys. 21.4). Ilość ich będzie zatem

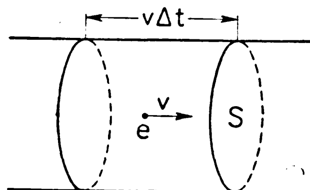
$$NSv\,\Delta t.$$

Ponieważ ładunek elektronu jest e, zatem przeniosą one w czasie Δt przez przekrój S ładunek

$$Q = NeSv\,\Delta t. \tag{21.13}$$

Natężenie prądu jest równe stosunkowi przepływającego ładunku do czasu jego przepływu, a więc będzie

$$i = \frac{NeSv\,\Delta t}{\Delta t} \tag{21.14}$$



Rys. 21.4. Objętość części przewodu, w którym znajdujące się elektrony przejdą w czasie Δt przez przekrój S

Na natężenie prądu płynącego w metalu mamy zatem wzór

$$i = SNev. \tag{21.15}$$

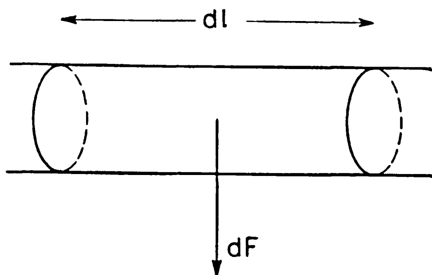
Prąd przepływający przez jednostkę pola przekroju, czyli tzw. gęstość prądu będzie

$$j = Nev.$$

21.4. Siły działające na ładunki poruszające się w polu magnetycznym. W rozdziale o działaniu pola magnetycznego na przewodniki, w których płynie prąd elektryczny, był podany wzór, według którego na każdy element dl przewodnika, w którym płynie prąd o natężeniu i znajdujący się w polu magnetycznym o natężeniu H i ustawiony normalnie do linii pola działa siła

$$dF = Hi\,dl \tag{21.16}$$

skierowana normalnie tak do elementu przewodnika, jak i do kierunku pola, zwrot zaś jej daje reguła Ampère'a (rys. 21.5).



Rys. 21.5. Siła dF działa na element drutu dl przy przepływie prądu, gdy drut znajduje się w polu magnetycznym

Podstawiając do wzoru (21.16) na natężenie prądu wartość znalezioną poprzednio (21.15) otrzymamy

$$dF = H\,dl\,NeSv.$$

Lecz $dl\,S$ jest objętością dV elementu drutu, zatem możemy napisać

$$dF = H\,dV\,Nev. \tag{21.17}$$

Iloczyn $dV\,N$ jest liczbą elektronów zawartych w rozważanej objętości drutu.

Oznaczając ją przez n, otrzymamy

$$dF = Hnev.$$

W takim razie na jeden elektron musi działać siła

$$f = Hev. \tag{21.18}$$

A więc na elektron poruszający się w polu magnetycznym z prędkością v prostopadle do linii pola działa siła prostopadła do jego prędkości i do linij pola i proporcjonalna do jego prędkości. Ponieważ jest to ładunek ujemny, zatem zwrot jej wyznacza prawa ręka pływaka płynącego w kierunku ruchu elektronu i patrzącego w kierunku pola magnetycznego.

Gdy elektron poruszający się z prędkością v w próżni wpadnie w pole magnetyczne jednorodne prostopadle do jego linij, to w polu tym działać będzie nań siła zawsze normalna do jego prędkości. Wskutek tego elektron musi się w polu magnetycznym poruszać po okręgu. Siła, z jaką działa nań pole magnetyczne, będzie siłą dośrodkową, dla której mieliśmy wzór (3.129) $\frac{mv^2}{r}$. Zatem będziemy mieli

$$\frac{mv^2}{r} = Hev.$$

Stąd na promień okręgu, po którym porusza się elektron, otrzymamy wzór

$$r = \frac{mv}{eH}. \tag{21.19}$$

Promień ten jest zatem, jak widać z tego wzoru, proporcjonalny do pędu elektronu, a odwrotnie proporcjonalny do natężenia pola magnetycznego.

W przypadku gdy przewodnik tworzy kąt α z kierunkiem pola magnetycznego, siła działająca na jego element długości dl jest

$$dF = Hi\,dl \sin \alpha.$$

Rozumując tak samo jak poprzednio, na siłę działającą w polu magnetycznym na elektron, którego prędkość tworzy kąt (H, v) z kierunkiem pola magnetycznego otrzymamy wzór

$$f = Hev \sin (H, v). \tag{21.20}$$

Wyprowadziliśmy wzór dla jednego elektronu, ale stosuje się on oczywiście do dowolnego ładunku Q. Możemy zatem ogólnie napisać:

$$F = HQv \sin (H, v). \tag{21.21}$$

Zwrot tej siły wskazuje lewa lub prawa ręka pływaka amperowskiego zależnie od tego, czy ładunek jest dodatni, czy ujemny.

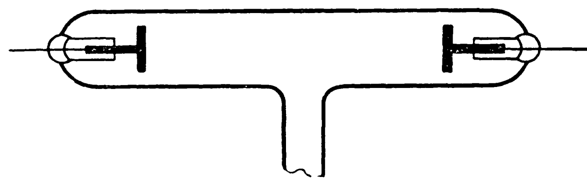
H. A. Rowland (czyt. Roulend) wykonał doświadczenie wykazujące, że poruszające się ładunki są równoważne prądowi elektrycznemu. Umieścił on

przy obwodzie ebonitowego krążka szereg sektorów z folii metalowej. Sektory zostały naładowane i tarcza wprawiona w szybki ruch obrotowy. Igła magnetyczna umieszczona w pobliżu środka tarczy odchylała się wówczas tak, jak gdyby płynął prąd elektryczny po obwodzie kołowym umieszczonym na krążku. Według III zasady Newtona również i magnes musi działać na poruszające się ładunki, a więc ładunki poruszające się w polu magnetycznym muszą doznawać siły, której wielkość dana jest przez wzór 21.21.

21.5. Jonizacja gazów. Gazy w normalnym swym stanie są dobrymi izolatorami. Do oderwania zewnętrznych elektronów od atomów czy drobin potrzeba stosunkowo znacznej energii. Drobiny gazu znajdują się w stosunkowo dużej odległości, tak że działania jąder innych atomów na elektrony wziętej pod uwagę drobiny można pominąć. Gaz nie przewodzi zatem ładunków elektrycznych. Istnieją jednak czynniki zamieniające gazy w ciała słabo przewodzące. Działanie ich polega na odrywaniu elektronów od atomów lub drobin. Zewnętrzny elektron, jako najsłabiej związany, najłatwiej oderwać. Przy oderwaniu elektronu atom lub drobina dzieli się na dwie części: jedną częścią będzie elektron niosący ładunek ujemny, drugą — reszta drobiny naładowana dodatnio. Zazwyczaj do elektronu jak i do reszty drobiny przyczepiają się drobiny elektrycznie obojętne (w których wskutek influencji rozsuwają się nieco ładunki przeciwnych znaków tworząc dipole przyciągane przez obce ładunki) tworząc większe zespoły. Jeden z nich będzie niósł ładunek dodatni, drugi — ujemny. Nazywamy je jonami, proces zaś wytwarzania jonów—jonizacją. Istnieją rozmaite czynniki, które mogą wytwarzać w gazie jony—tak zwane czynniki jonizujące. Jonizują więc promienie wysyłane przez ciała promieniotwórcze, o których będzie mowa w dalszym ciągu, jonizują rozpędzone dostatecznie elektrony, promienie Röntgena, promienie kosmiczne. Ponieważ w ziemi, w materiałach, z których zrobione są mury, w powietrzu i we wszystkich otaczających nas przedmiotach znajdują się nieznaczne ilości ciał promieniotwórczych, promienie kosmiczne zaś przenikają przez wszelkie przeszkody, wskutek tego w powietrzu atmosferycznym w każdym centymetrze sześciennym wytwarzana jest w każdej sekundzie pewna liczba jonów, mniej więcej od 4 do 8 par. Gdyby raz wytworzone jony istniały już stale, ilość ich w powietrzu powinna by wciąż wzrastać. Lecz zachodzi również proces odwrotny. Od czasu do czasu jon dodatni zbliża się do jonu ujemnego. Łączą się one wówczas w jedną całość neutralizując swoje ładunki. Proces ten nazywamy rekombinacją jonów. Oczywiście, im więcej jonów znajduje się w powietrzu, tym częściej takie spotkania będą się zdarzać. Następuje wreszcie stan statystycznej równowagi: taka sama ilość jonów łączy się w sekundzie, jaka powstaje. W rezultacie w powietrzu nad powierzchnią ziemi zazwyczaj w każdym cm^3 znajduje się kilkaset jonów (od 500 do 900). Wskutek tego nawet najlepiej izolowane ciała tracą w powietrzu powoli swój ładunek. Powietrze wskutek jonizacji nieco przewodzi ładunki elektryczne przenoszone przez jony w dwóch przeciwnych kierunkach.

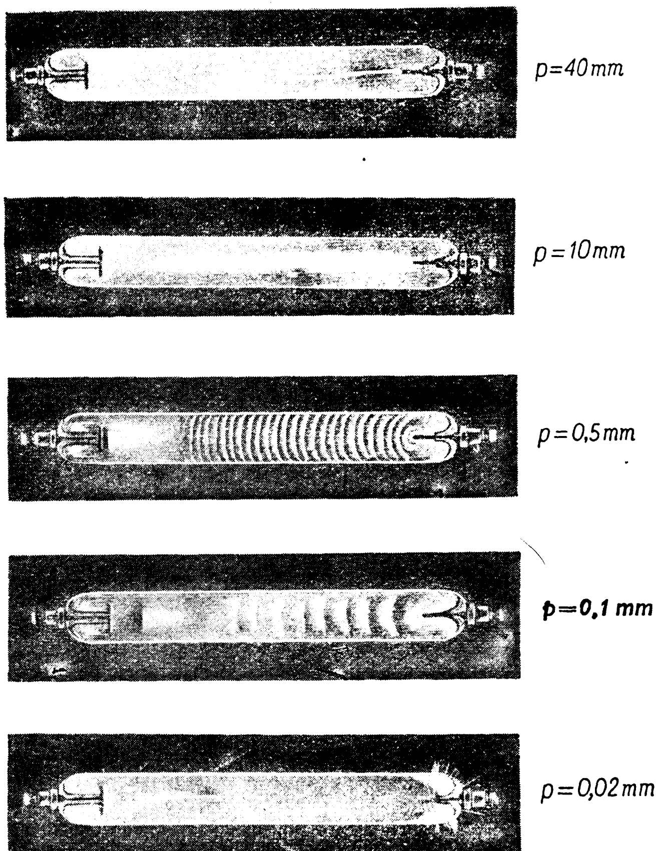
Gdy między dwoma przewodnikami znajdującymi się w powietrzu wywołamy dostateczną różnicę potencjałów, uderzy między nimi iskra. Do wywołania iskry długości 3 mm potrzeba napięcia dziesięciu tysięcy woltów; aby otrzymać iskrę długości 1 cm, musimy wywołać napięcie 30 tysięcy woltów. Powstanie iskry tłumaczy się w sposób następujący: przy dużej różnicy potencjałów między zbliżonymi przewodnikami powstaje bardzo silne pole elektryczne. Jony istniejące w powietrzu rozpędzają się w dostatecznie silnym polu tak, że przy spotkaniu z drobinami neutralnymi jonizują je. Nowowytworzone jony z kolei rozpędzają się i wytwarzają nowe jony. Powstaje szybko rosnąca lawina jonów, która przenosi duże ładunki. Jony i drobiny zostają wskutek zderzeń pobudzone do świecenia. Świecą również oderwane od przewodnika cząstki metalu. Toteż iskra ma silny blask, a wskutek silnego ogrzania gazu, przez który przechodzi iskra, następuje jego silne rozprężenie wywołujące falę dźwiękową w powietrzu, którą słyszymy jako trzask lub huk, gdy iskra jest bardzo duża (piorun).

21.6. Prądy w gazach rozrzedzonych. Promienie katodowe. Doświadczenie okazuje, że w powietrzu rozrzedzonym nawet przy niezbyt wysokim napięciu, wynoszącym np. parę tysięcy lub nawet kilkaset woltów, można otrzymać iskrę znacznej długości. Tłumaczy się to tym, że w gazie rozrzedzonym droga swobodna jest większa niż w gazie pod normalnym ciśnieniem. Jony rozpędzane są na znacznie dłuższych odcinkach drogi bez straty energii wskutek zderzeń. Zatem już przy niższym napięciu uzyskują dostateczną energię do wywołania jonizacji. Do doświadczeń nad przewodzeniem prądu przez gazy rozrzedzone używa się zwykle dość długiej rury szklanej (długości kilkudziesięciu cm), na dwóch końcach której na wtopionych w szkło drucikach umieszczone są płytki zwykle glinowe (rys. 21.6). Gdy między elektrodami tej rury wytworzymy wysokie napięcie, np. za pomocą maszyny elektrostatycznej lub induktora Ruhmkorffa, to, dopóki wewnątrz rury znajduje się powietrze lub inny gaz pod ciśnieniem atmosferycznym, przez rurę prąd nie płynie (właściwie będzie płynąć prąd niedostrzegalnie słaby, prąd ładunków przenoszonych przez jony znajdujące się w gazie). Gdy za pomocą pompy rozrzedzimy gaz do ciśnienia wynoszącego kilka cmHg pojawi się wewnątrz iskra. Będzie ona znacznie mniej świecąca niż iskra powstająca przy normalnym ciśnieniu atmosferycznym. Za to będzie znacznie dłuższa i grubsza. W miarę rozrzedzania gazu iskra staje się coraz szersza i słabiej świecąca, aż wreszcie wypełnia całą szerokość rury (rys. 21.7). Gaz świeci wtedy wszędzie prócz okolicy katody, gdzie znajduje się ciemniejsza przestrzeń, zwana ciemnią Faradaya. Przy samej katodzie znajduje się warstewka świecąca. Smuga



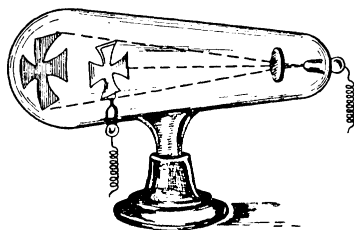
Rys. 21.6. Rura do wyładowań w gazach rozrzedzonych

świecącego gazu rozciągająca się od ciemni Faradaya do anody nosi nazwę zorzy dodatniej. Zorza dodatnia ma charakterystyczne zabarwienie zależne od rodzaju gazu w rurze. Jeżeli w rurze znajduje się powietrze, ma ona zabarwienie różowe, przy argonie—niebieskie, przy neonie—czerwone. Przy znaczniejszym rozrzedzeniu gazu występuje uwarstwienie zorzy, pojawiają się warstewki poprzeczne, prążki na przemian jaśniejsze i ciemniejsze. Przy dalszym rozrzedzaniu gazu świecąca warstewka przy katodzie odsuwa się od niej. Przy katodzie pojawia się druga ciemna przestrzeń, zwana ciemnią Crookesa, (czyt. Kruksa), której rozmiary stopniowo rosną przy jednoczesnym zmniejszaniu się długości zorzy dodatniej. Wreszcie przy ciśnieniu gazu wynoszącym kilka setnych mmHg ciemnia Crookesa wypełnia całą rurę. Gaz przestaje świecić, natomiast ściany rury leżące naprzeciwko katody zaczynają się jarzyć słabym światłem zielonym. Zjawisko to wywoływane zresztą i przez inne czynniki nazywamy fluorescencją. Szkło fluoryzuje pod wpływem promieni niewidzialnych dla oka, wychodzących z katody. Jakikolwiek przedmiot wycięty z blachy wstawiony w drogę tych promieni wywołuje powstanie wyraźnego cienia na szklanej ścianie rury (rys. 21.8). Pod wpływem tych promieni świeci nie tylko szkło. Świecą (fluoryzują) również rozmaite ciała: siarczek cynku, szło uranowe, wolframian wapnia, platynocyjanek baru, kreda i różne inne minerały. Tych fluoryzujących ciał używa się, aby unaocznić bieg promieni, które nazywamy promieniami katodowymi. W tym celu naprzeciwko katody ustawia się zasłonę z blachy (*b*) z wąską szczeliną poziomą

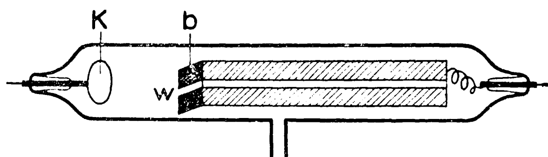


Rys. 21.7. Fotografie wyładowań w gazie rozrzedzonym pod różnymi ciśnieniami

(rys. 21.9). Służy ona jednocześnie za anodę. Za anodą nieco skośnie do osi rury ustawia się pasek z blachy pokryty substancją fluoryzującą, np. siarczkiem



Rys. 21.8. Cień krzyża glinowego na fluoryzującej ścianie rury katodowej



Rys. 21.9. Unaocznienie biegu promieni katodowych za pomocą ekranu fluoryzującego
k—katoda, *b*—ekran, *W*—szczelina w przesłonie

cynku. Po przyłączeniu napięcia między anodą i katodą widać poza szczeliną w anodzie prostą smugę świetlną.

Za pomocą takiego ekranu fluoryzującego można stwierdzić, że z katody płaskiej wychodzi wiązka w przybliżeniu równoległych promieni katodowych. Z katody wklęsłej natomiast otrzymuje się wiązkę zbieżną, skupiającą się w pewnej odległości od katody. Te fakty wykazują, że promienie katodowe wychodzą z katody w kierunku prostopadłym do jej powierzchni.

Gdy na drodze promieni katodowych umieścimy kliszę fotograficzną, zostanie ona wyświetlona tam, gdzie trafią ją promienie katodowe. Po wywołaniu kliszy otrzymujemy w tym miejscu zaczernienie.

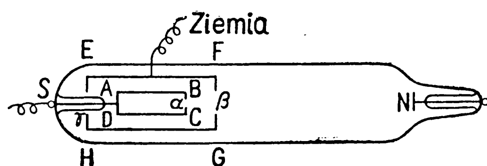
Promienie katodowe niosą energię kinetyczną i pęd, które mogą oddać ciałom napotkanym na drodze. Jeżeli ustawimy np. na ich drodze mały wiatraczek, zacznie się on obracać.

Tam, gdzie promienie katodowe trafiają na przeszkodę, wywiązuje się w znacznej ilości ciepło. Gdy naprzeciwko wklęsłej katody, w miejscu, gdzie promienie katodowe się schodzą, umieścimy blaszkę metalową, może się ona rozgrzać do czerwoności, a nawet stopić.

Z obserwacji Hertza wiadomo, że promienie katodowe mogą przenikać przez cienkie listki glinu. Przez okienko w rurze przykryte naklejonym cienkim listkiem glinu, który zapobiega dostaniu się do wnętrza rury powietrza, można, jak to wykazał Lenard, wypuścić na zewnątrz promienie katodowe.

Lenard wykonał doświadczenie stwierdzające, że promienie katodowe mogą biec w najdoskonalszej próżni, jaką można uzyskać. Zrobił on to w ten sposób, że za okienkiem przykrytym folią glinową, umieszczonym naprzeciwko katody, przykitował rurę szklaną zatopioną na drugim końcu i wypompował z niej jak najdokładniej powietrze. Promienie katodowe przedostające się przez okienko rozchodziły się w próżni wywołując zupełnie identyczne zjawiska jak w rurze, w której zostały wytworzone.

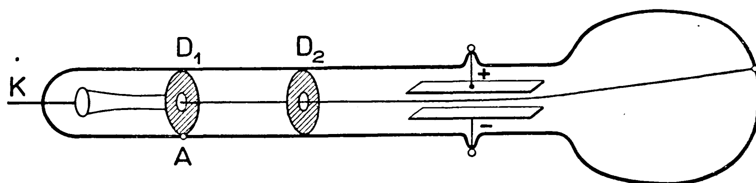
Perrin w roku 1895 wykazał, że promienie katodowe niosą ładunki ujemne. Umieścił on naprzeciwko katody puszkę Faradaya z małym otworkiem tak, że promienie mogły się dostawać do wnętrza puszki. Puszka była osłonięta nieco większą puszką połączoną z ziemią. Puszka *ABCD* była połączona z elektroskopem (rys. 21.10). Po wytworzeniu w rurze promieni katodowych elektroskop ładował się ujemnie. Ładował się nawet wtedy, gdy otworek β w większej puszce został przysłonięty cienkim listkiem glinowym.



Rys. 21.10. Doświadczenie Perrina wykazujące, że promienie katodowe niosą ładunki ujemne

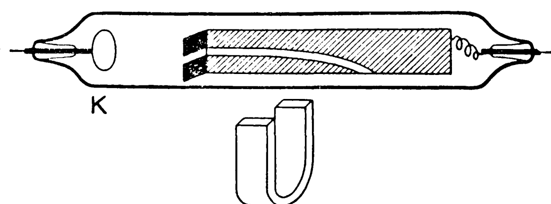
ABCD — puszka Faradaya, *EFGH* — puszka osłonna połączona z ziemią

Gdy na drodze promieni katodowych ustawimy ekran z blachy z małym otworkiem, na przeciwległej ściance rury pojawi się mała plamka świetlna w miejscu, gdzie trafiają promienie katodowe. Znacznie wyraźniejszą plamkę świecącą otrzymamy, gdy przeciwległą ściankę powleczemy jakąś substancją fluoryzującą, np. siarczkiem cynku.



Rys. 21.11. Odchylenie promieni katodowych za pomocą pola elektrycznego

Gdy wewnątrz rury na drodze promieni katodowych umieści się dwie płytki metalowe tworzące kondensator (jak na rys. 21.11) i płytki te połączy się z biegunami baterii, plamka odchyli się w stronę płytki dodatniej. Świadczy to również o tym, że promienie katodowe są strumieniem ładunków ujemnych. Także pole magnetyczne wywołuje odchylenie promieni katodowych (rys. 21.12).



Rys. 21.12. Odchylenie promieni katodowych za pomocą pola magnetycznego

Promienie katodowe mają zawsze te same własności — niezależnie od natury gazu, który wypełnia rurę.

W roku 1899 udało się Wiechertowi (czyt. Wichertowi) po raz pierwszy zmierzyć prędkość promieni katodowych. Pomiary jego wykazały, że prędkość ta zależna jest od napięcia między anodą i katodą i dochodzi do wartości wynoszącej 100 000 i więcej km/sec.

Z tego, że pole elektryczne wywołuje odchylenie całej wiązki, a więc jednakowe odchylenie wszystkich biegnących w promieniach katodowych ładunków, można wnosić, że wiązka składa się z jednakowych cząstek niosących jednakowe ładunki, biegnących z jednakowymi prędkościami. J. J. Thomson odchylał wiązkę promieni katodowych za pomocą pola elektrycznego i magnetycznego i drogą tych doświadczeń, które w dalszym ciągu opiszemy, mógł obliczyć prędkość promieni katodowych oraz stosunek ładunku do masy $\frac{e}{m}$ dla cząstek w promieniach katodowych.

Obecnie dobrze już nam wiadomo, że promienie katodowe to strumień elektronów wyrzucanych z katody i rozpędzanych siłami pola elektrycznego wytworzonego między anodą i katodą. Linie wektora elektrycznego są zawsze normalne do powierzchni przewodnika, przy tym natężenie pola w pobliżu katody przy wyładowaniach w gazach rozrzedzonych jest szczególnie wielkie (duży spadek potencjału, tzw. spadek katodowy). Toteż wylatujące z katody elektrony nabywają już w pobliżu katody wielkiej prędkości w kierunku normalnym do jej powierzchni. Kierunek linii pola elektrycznego w dalszej odległości od katody niewiele już wpływa na ich bieg. Toteż w wielu wypadkach dość obojętną jest rzeczą, gdzie się znajduje anoda.

Elektrony nabywają energii kinetycznej dzięki pracy sił pola. Gdy ładunek e przebiega różnicę potencjałów U, wówczas siły pola wykonują pracę eU. Praca ta idzie na wytworzenie energii kinetycznej biegnących elektronów. Zatem możemy napisać równanie

$$eU = \frac{mv^2}{2}. \tag{21.22}$$

Z tego wzoru, znając napięcie między anodą i katodą, możemy obliczyć prędkość promieni katodowych:

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \tag{21.23}$$

Wszystkie wielkości w tym wzorze muszą być wyrażone w jednostkach tego samego układu. A więc albo w jednostkach elektrostatycznych, albo w elektromagnetycznych. Gdyby natomiast ładunek był wyrażony w kulombach, a napięcie w woltach, wtedy iloczyn eU wypadłby w dżulach. Należałoby wówczas napisać równanie

$$\frac{mv^2}{2} = eU \cdot 10^7 \text{ ergów},$$

skąd łatwo otrzymujemy wzór

$$v \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 5{,}93 \cdot 10^7 \sqrt{U} \text{ woltów}. \tag{21.24}$$

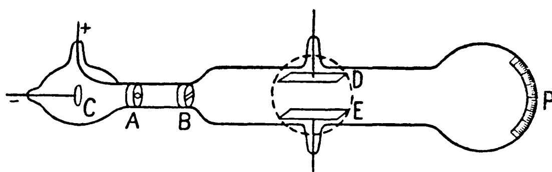
Wzór ten zresztą można stosować tylko przy niezbyt wielkich prędkościach elektronów, a więc do napięć niższych od 10 000 woltów. Bowiem przy prędkościach większych, porównywalnych z prędkością światła masa elektronów rośnie

według wzoru

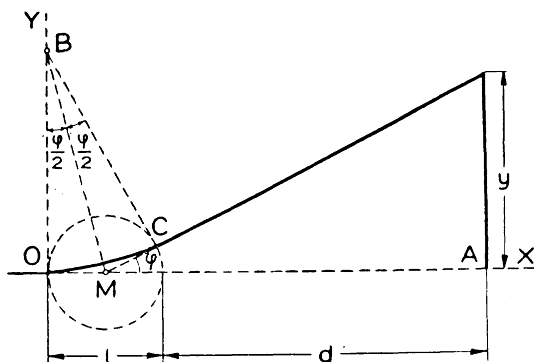
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{21.25}$$

jak to później wyprowadzimy w ustępie o teorii względności. W tym wzorże m_0 oznacza tak zwaną masę spoczynkową, tj. masę, jaką posiada elektron przy małych prędkościach wobec prędkości światła, v oznacza prędkość elektronu, a c — prędkość światła w próżni.

21.7. Pomiar prędkości elektronów i stosunku $\frac{e}{m}$. Jak już wspomniano, J. J. Thomson zmierzył prędkość elektronów w promieniach katodowych oraz stosunek $\frac{e}{m}$ ładunku do masy przez zastosowanie odchylenia promieni katodowych w polu elektrycznym i magnetycznym. Rysunek 21.13 przedstawia zastosowane przez niego urządzenie. W rurze, w której wytwarzane były promienie katodowe znajdowała się przesłona z małym otworkiem przepuszczającym wąski strumień promieni katodowych. Poza przesłoną znajdowały się dwie płytki, między którymi można było wytwarzać pole elektryczne. Za pomocą elektromagnesu można było również wytworzyć pole magnetyczne, którego linie były prostopadłe do linij pola elektrycznego. Na elektrony biegnące przez pole magnetyczne wywierana jest siła prostopadła tak do prędkości elektronów, jak i do linij pola magnetycznego. Pod jej wpływem promienie katodowe odchylają się. Ponieważ siła ta jest stale normalna do prędkości poruszających się cząstek, zatem każda cząstka biegnie w polu magnetycznym po okręgu koła o promieniu



Rys. 21.13. Doświadczenie Thomsona — odchylenie promieni katodowych w polu elektrycznym i magnetycznym. Pomiar stosunku $\frac{e}{m}$
C — katoda, A — anoda, E i D — płytki odchylające, P — ekran fluoryzujący



Rys. 21.14. Odchylenie poruszającego się ładunku w polu magnetycznym

$$\varrho = \frac{mv}{eH}, \tag{21.26}$$

Po wyjściu z pola elektrony będą biec już po linii prostej. Kierunek jej będzie tworzył z pierwotnym kierunkiem biegu kąt φ (rys. 21.14). Aby go wyznaczyć, poprowadźmy układ osi współrzędnych. Oś X poprowadźmy w kierunku biegu nieodchylonej wiązki elektronów, oś Y prostopadle w górę. W odległości d od granicy pola magnetycznego znajduje się ekran fluoryzujący, na którym promienie katodowe wytwarzają plamkę świetlną w punkcie A, gdy pola nie ma. Natomiast przy obecności pola rzędna plamki będzie y. Kierunek biegu odchylonych promieni będzie tworzył z osią X kąt, którego wielkość będzie określona wzorem

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{d + \frac{l}{2}}, \tag{21.27}$$

gdzie d jest odległością ekranu od granicy pola magnetycznego, a l średnicą biegunów. Kąt OBC będzie równy kątowi φ, ponieważ są to kąty o ramionach odpowiednio prostopadłych. Z trójkąta OBM możemy napisać

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{l}{2}}{\varrho} = \frac{l}{2\varrho}.$$

Ponieważ kąt φ jest niewielki, więc w przybliżeniu

$$\operatorname{tg} \varphi \approx 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

A więc otrzymamy

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{\varrho}. \tag{21.28}$$

Przyrównując prawe strony równań (21.27) i (21.28) otrzymamy

$$\frac{l}{\varrho} = \frac{y}{d + \frac{l}{2}},$$

skąd

$$y = \frac{l\left(d + \frac{l}{2}\right)}{\varrho}. \tag{21.29}$$

Podstawiając wartość na ϱ z równania (21.26) otrzymamy

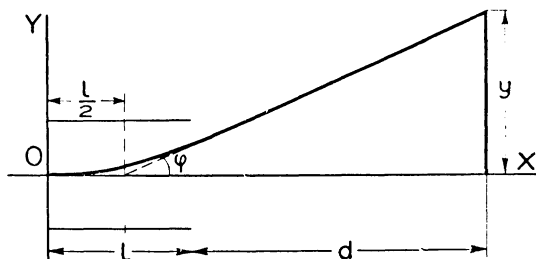
$$y = H \frac{e}{m} \frac{l}{v} \left(d + \frac{l}{2}\right). \tag{21.30}$$

Takie odchylenie plamki świecącej spowodowane jest wzbudzeniem pola magnetycznego.

Przy wytworzeniu pola elektrycznego za pomocą płytek również plamka się odchyla. Odchylenie to będzie zależało od różnicy potencjałów U między

płytkami. Ponieważ pole jest w przybliżeniu jednorodne, elektron będzie w nim biegł jak kamień rzucony poziomo w polu siły ciężkości — po paraboli. Po wyjściu z pola będzie się poruszał dalej na mocy bezwładności po linii prostej. Obliczmy odchylenie plamki, jakiego dozna ona wskutek odchylenia promieni katodowych w polu elektrycznym. Poprowadźmy jak poprzednio oś odciętych poziomo, oś rzędnych pionowo (rys. 21.15). Długość płytek jest taka sama jak średnica pola magnetycznego l. Czas przebiegu elektronu między płytkami będzie

$$t = \frac{l}{v}. \tag{21.31}$$



Rys. 21.15. Odchylenie poruszającego się ładunku w polu elektrycznym

Pod działaniem siły stałej eE (E — natężenie pola elektrycznego) elektron będze się poruszał w kierunku osi Y ruchem jednostajnie przyśpieszonym. Pod koniec droga w tym kierunku przebyta będzie

$$s = \frac{1}{2} at^2. \tag{21.32}$$

Ponieważ według II zasady Newtona

$$ma = eE,$$

skąd

$$a = \frac{eE}{m}, \tag{21.33}$$

więc podstawiając wartości na a i t z równań (21.31) i (21.33) otrzymamy

$$s = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v^2}. \tag{21.34}$$

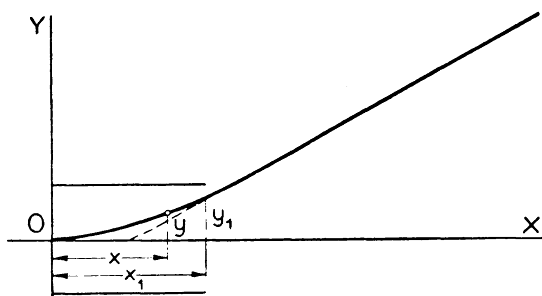
Na kąt φ otrzymamy, jak widać z rysunku

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{d + \frac{l}{2}} = \frac{s}{\frac{1}{2} l}. \tag{21.35}$$

Udowodnimy później, że przedłużenie wstecz promienia elektronów przecina oś X w punkcie znajdującym się w połowie długości płytek. Z równania (21.35) otrzymamy

$$y = 2s \frac{d + \frac{l}{2}}{l} = \frac{e}{m} E \frac{l}{v^2} \left(d + \frac{l}{2}\right). \tag{21.36}$$

Aby udowodnić, że przedłużenie wstecz promienia elektronów przecina oś X w odległości $\frac{l}{2}$ od początku współrzędnych, weźmy pod uwagę znajdujący się między płytkami elektron o odciętej x i rzędnej y (rys. 21.16). Możemy napisać



Rys. 21.16. Odchylenie poruszającego się ładunku w polu elektrycznym

$$x = vt, \qquad y = \frac{1}{2} at^2, \qquad (21.37)$$

gdzie

$$a = \frac{eE}{m}. \qquad (21.38)$$

Eliminując z tych równań t i a otrzymamy

$$y = \frac{1}{2} \frac{eE}{mv^2} x^2. \qquad (21.39)$$

Jest to równanie paraboli. Kąt, jaki tworzy styczna do paraboli, jest określony przez równanie

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{eE}{mv^2} x, \qquad (21.40)$$

zatem

$$\operatorname{tg} \varphi_{x=l} = \frac{eE}{mv^2} l. \qquad (21.41)$$

Równanie stycznej przechodzącej przez punkt x_1, y_1 jest

$$y - y_1 = \operatorname{tg} \varphi (x - x_1).$$

Równanie stycznej przechodzącej przez punkt

$$x_1 = l, \qquad y_1 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v^2}$$

będzie zatem

$$y - \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v^2} = \frac{eE}{m} \frac{l}{v^2} (x - l). \qquad (21.42)$$

Styczna przecina się z osią x, której równanie jest $y = 0$, w punkcie o odciętej określonej równaniem

$$-\frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{l^2}{v^2} = \frac{eE}{m} \frac{l}{v^2} (x - l),$$

skąd otrzymujemy

$$x = \frac{l}{2}, \qquad (21.43)$$

co należało udowodnić.

Otrzymaliśmy wzory na odchylenie promienia elektronów w polu magnetycznym i elektrycznym. Dobierając tak pola, aby wywoływały odchylenia wiązki elektronów w przeciwne strony i regulując natężenia tak, aby się one znosiły, otrzymuje się równanie

$$\frac{eE}{m}\frac{l}{v^2}\left(d+\frac{l}{2}\right)=\frac{eH}{m}\frac{l}{v}\left(d+\frac{l}{2}\right),$$

skąd otrzymujemy wyrażenie na prędkość

$$v=\frac{E}{H}. \tag{21.44}$$

Gdy E i H są wyrażone w jednostkach elektromagnetycznych CGS, prędkość wypadnie w cm/sec.

Ze wzoru (21.36) po podstawieniu wartości na prędkość $v=\frac{E}{H}$ otrzymuje się

$$y=\frac{e}{m}\frac{H^2 l}{E}\left(d+\frac{l}{2}\right), \tag{21.45}$$

skąd

$$\frac{e}{m}=\frac{E}{H^2 l\left(d+\frac{l}{2}\right)}y. \tag{21.46}$$

W ten sposób, mierząc odchylenie w polu elektrycznym i magnetycznym oraz dobierając pola tak, aby następnie odchylenia się znosiły, Thomson zmierzył prędkość elektronów i stosunek $\frac{e}{m}$. Na stosunek ten otrzymuje się liczbę:

$$\frac{e}{m}=1{,}759\cdot 10^7\,\frac{\text{j}\cdot\text{EM}}{\text{g}}$$

albo

$$\frac{e}{m}=5{,}274\cdot 10^{17}\,\frac{\text{j}\cdot\text{ES}}{\text{g}}.$$

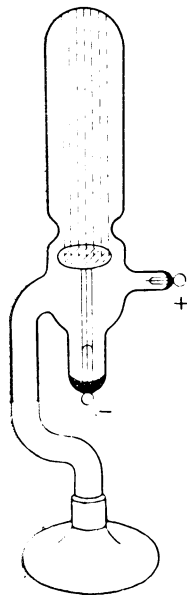
Stosunek ten jest dla promieni katodowych bardzo duży. Jak już o tym mówiliśmy przy omawianiu zjawisk elektrolizy, każdy jon jednowartościowy niesie pojedynczy ładunek elementarny. Jony dwu- i trójwartościowe niosą odpowiednio ładunek $2e$ i $3e$. Masy ich są równe masom atomów lub kompleksów atomów. Stosunek ładunku do masy dla najlżejszego jonu wodorowego jest

$$0{,}955\cdot 10^4\,\frac{\text{j}\cdot\text{EM}}{\text{g}},$$

a więc prawie 1840 razy mniejszy niż stosunek ładunku do masy cząstek w promieniach katodowych. Gdyby to były atomy, musiałyby mieć ładunek 1840 razy większy od ładunku jonów jednowartościowych. Z początku przypuszczano istotnie, że promienie katodowe są strumieniem ujemnie naelektryzowanych

atomów gazu pozostałego w bańce, lecz tak wielki ich ładunek musiał nasuwać wątpliwości. Inne fakty też się nie dały pogodzić z przypuszczeniem, że cząstki biegnące w promieniach katodowych są atomami. W jaki sposób bowiem mogłyby one przenikać przez warstwę powietrza grubości kilku centymetrów, jak w doświadczeniach Lenarda? Przecież droga swobodna atomów gazu w powietrzu pod ciśnieniem atmosferycznym wynosi bardzo mały ułamek mikrona. Nie mogłyby one również przenikać przez blaszkę metalową, która normalnie nie przepuszcza atomów lub drobin gazu. Nasuwa się więc tu wniosek, że są to jakieś bardzo małe cząstki, znacznie mniejsze od atomów i dlatego tak przenikliwe. Hipoteza cząstek znacznie mniejszych od atomów tłumaczy jednocześnie fakt, że stosunek ładunku do masy cząstek promieni katodowych jest tak duży. Została ona postawiona i rozwinięta głównie przez J. J. Thomsona. Za tą hipotezą przemawia również fakt, że prędkość promieni katodowych nie zależy zupełnie ani od rodzaju użytego gazu w bańce, ani od materiału, z którego jest zrobiona katoda. Można przypuszczać, że są to cząstki znajdujące się we wszystkich atomach. Nazwano je elektronami.

21.8. Promienie kanalikowe i anodowe. Jeżeli w rurze, w której wywołuje się wyładowanie w gazach rozrzedzonych, umieścimy katodę w środku rury i zrobimy w niej małe otworki, wówczas przy dostatecznym rozrzedzeniu gazu po jednej stronie katody, po tej mianowicie, po której znajduje się anoda, wytwarzają się niewidzialne promienie katodowe, po przeciwnej zaś jej stronie pojawiają się słabo świecące pasemka wychodzące z tych otworków, czyli kanalików (rys. 21.17). Fizyk Goldstein (czyt. Goldsztajn), który je odkrył, nazwał je promieniami kanalikowymi. Promienie kanalikowe wywołują podobnie jak promienie katodowe fluorescencję ciał, chociaż przeważnie słabszą niż promienie katodowe. Również — jak tamte — działają na kliszę fotograficzną. Pola magnetyczne i elektryczne odchylają promienie kanalikowe w stronę przeciwną niż promienie katodowe. Należałoby stąd wnioskować, że promienie kanalikowe polegają na ruchu cząstek dodatnio naelektryzowanych.

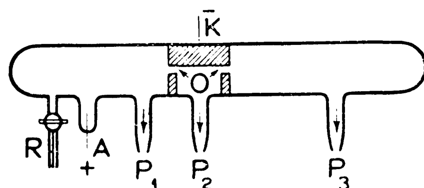


Rys. 21.17. Promienie kanalikowe

Wszystkie te zjawiska są w promieniach kanalikowych bardzo zawiłe i niewyraźne. Przy odchyleniu np. strumienia promieni kanalikowych w polu magnetycznym czy elektrycznym nie otrzymujemy wyraźnego przesunięcia plamki świecącej na ekranie fluoryzującym, lecz rozciągnięcie jej. Świadczy to o tym, że cząstki biegnące mają bądź różne ładunki, bądź różne prędkości.

Jedną z przyczyn komplikującą bardzo zjawiska w promieniach kanalikowych jest obecność resztek gazu, które wypełniają bańkę szklaną i które są przeszkodą w biegu promieni kanalikowych. Dokładne zbadanie ładunku i prędkości cząstek

okazało się dopiero wtedy możliwe, gdy nauczono się wypuszczać promienie kanalikowe w przestrzeń o znacznie lepszej próżni niż ta, w jakiej wytwarzają się promienie kanalikowe. Nie można ich wypuścić przez cienką folię, jak to robił Lenard z promieniami katodowymi, gdyż promienie kanalikowe są nadzwyczaj mało przenikliwe. Aby móc wypuścić promienie kanalikowe w próżnię, postępuje się w następujący sposób: przedziela się bańkę szklaną na dwie lub więcej części (rys. 21.18). Jedną od drugiej oddziela się metalową przegrodą z bardzo małym otworkiem. W jednej części, tam gdzie jest anoda, podtrzymuje się ciśnienie paru setnych milimetra Hg potrzebne do wytworzenia promieni kanalikowych. W razie potrzeby przez wąską włoskowatą rureczkę R dopuszcza się trochę gazu. W katodzie, zazwyczaj grubej, przewierca się nadzwyczaj wąski otworek. Przez ten otworek promienie kanalikowe przedostają się do drugiej względnie trzeciej części bańki połączonych z pompami bardzo szybko wypompowującymi gaz. W ten sposób w pozostałych częściach bańki czy rury można utrzymywać dobrą próżnię konieczną do pomiarów.



Rys. 21.18. Promienie kanalikowe przechodzące do próżni
A — anoda, k — katoda, $P_1P_2P_3$ — rurki do pomp, O — otworek w katodzie

Za pomocą pomiarów odchyleń, jakich doznają promienie kanalikowe w polu magnetycznym i elektrycznym, można było zmierzyć prędkości oraz stosunek ładunku do masy cząstek biegnących w promieniach kanalikowych. Prędkości te są znacznie mniejsze od prędkości promieni katodowych. Na wartość stosunku $\frac{e}{m}$ wypadają mniej więcej takie same liczby, jak dla jonów w elektrolitach. Stąd wniosek, że w promieniach kanalikowych biegną cząstki równorzędnej wielkości.

Doświadczenia z chwytaniem promieni w puszkę Faradaya, podobne do opisanych poprzednio z promieniami katodowymi, stwierdziły, że cząstki biegnące w promieniach kanalikowych niosą ładunki dodatnie.

Wszystkie te doświadczenia doprowadzają do przekonania, że promienie kanalikowe są strumieniem zjonizowanych atomów, względnie drobin gazu, którego resztki znajdują się w bańce. Ponieważ są dodatnio naelektryzowane, rozpędzają się w polu elektrycznym między katodą i anodą. Lecz jony powstają w rozmaitych miejscach między anodą i katodą. Jedne zatem rozpędzają się na krótszej drodze, inne — na dłuższej. Z tego powodu biegnące cząstki w promieniach kanalikowych mają najrozmaitsze prędkości, a wskutek tego tak w polu elektrycznym jak i magnetycznym odchylają się rozmaicie zależnie od swej prędkości.

Rozpędzone jony uderzają z dużą energią w katodę. Pod wpływem tych uderzeń elektrony zostają wyrzucane z metalu, z którego jest sporządzona katoda. Elektrony z kolei rozpędzają się w przeciwną stronę i zderzając się na swej drodze

z drobinami gazu, jonizują je. Nowowytworzone w ten sposób jony dodatnie znowu bombardują katodę wyzwalając nowe ilości elektronów. Jak wykazano doświadczalnie, warunkiem powstawania promieni katodowych jest bombardowanie katody przez zjonizowane atomy gazu. Jeżeli wypompuje się gaz bardzo dokładnie, nie powstaną ani promienie kanalikowe, ani katodowe. Próżnia jest zupełnym nieprzewodnikiem. Promienie katodowe w dobrej próżni mogą powstać tylko wtedy, gdy z katody w jakikolwiek inny sposób wyzwolimy elektrony. Można to zrobić na przykład przez odpowiednie podgrzanie katody. Jeżeli zamiast płytki metalowej umieścimy wewnątrz rury cienki drucik metalowy, którego dwa końce wychodzą na zewnątrz i za pomocą prądu elektrycznego ogrzejemy go do dostatecznej wysokiej temperatury, wówczas z powierzchni drucika wylatują elektrony i rozpędzając się w polu elektrycznym tworzą promienie katodowe. Ruch cieplny wystarcza, aby elektrony wydobyły się przez warstewkę graniczną na zewnątrz metalu.

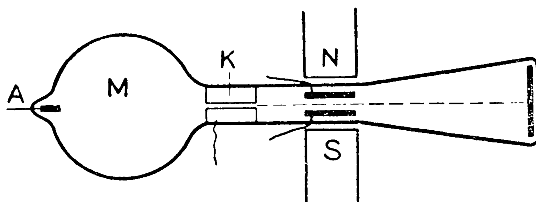
Oczywiście przy użyciu rozżarzonej katody w bardzo dobrej próżni w celu otrzymania promieni katodowych promienie kanalikowe nie powstają. Ładunki przenoszone są wtedy jedynie przez elektrony. Z elektronów wysyłanych przez rozżarzoną katodę korzysta się przy budowie lamp radiowych, oscylografów katodowych oraz nowoczesnych rur rentgenowskich. O szczegółach zjawiska wysyłania elektronów z rozżarzonego metalu będzie mowa później.

Promienie kanalikowe są zatem strumieniem jonów dodatnich, powstających z gazu, którego resztki znajdują się w bańce. Można również wytworzyć strumień jonów dodatnich pochodzących z ciała stałego. Gdy mianowicie na anodzie umieścimy warstwę jakiejś soli i następnie silnie ją podgrzejemy, anoda staje się źródłem strumienia jonów dodatnich zwanych promieniami anodowymi. Aby anodę można było ogrzać, sporządza się ją w sposób następujący: wtapia się w szkło dwa druty, które wewnątrz bańki są połączone cienkim paskiem platynowym. Odnośną sól umieszcza się na pasku platynowym, druty zaś łączy z biegunami baterii. Regulując odpowiednio czerpany z baterii prąd można rozżarzyć pasek platynowy służący za anodę.

Charakter promieni jest ten sam co promieni kanalikowych, różnica polega tylko na sposobie otrzymania jonów dodatnich, no i na tym, że w promieniach anodowych mamy jony nie gazów, tylko rozmaitych pierwiastków stałych. Otrzymywanie takich jonów ma wielkie znaczenie dla badań nad masami rozmaitych atomów, o czym będzie mowa w dalszym ciągu.

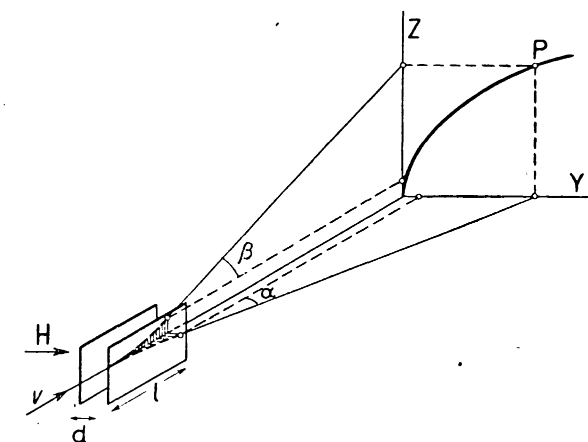
21.9. Promienie kanalikowe w polu elektrycznym i magnetycznym. Obserwacja zachowania się promieni kanalikowych w jednoczesnym polu elektrycznym i magnetycznym doprowadziła do stworzenia najdokładniejszych metod mierzenia mas atomów i w rezultacie do odkrycia nadzwyczaj ważnego faktu, że prawie wszystkie pierwiastki są mieszaninami odmian różniących się masami atomowymi. Pierwsze doświadczenia w tym kierunku wykonał J. J. Thom-

son. Poddawał on promienie kanalikowe wytwarzane w specjalnie skonstruowanej bańce szklanej jednoczesnemu działaniu równoległych pól: elektrycznego i magnetycznego. Rys. 21.19 podaje schemat jego urządzenia. W części M wytwarza się wyładowanie elektryczne w gazie rozrzedzonym. W katodzie K znajduje się wąziutki otworek, przez który przedostaje się również bardzo wąska wiązka promieni kanalikowych. Na jej drodze ustawione są dwie płytki metalowe równolegle, tak że promienie kanalikowe przebiegają między nimi. Elektromagnes wytwarzający pole magnetyczne ustawiony jest tak, aby poprzednio wymienione płytki były równoległe do powierzchni biegunów elektromagnesu.



Rys. 21.19. Promienie kanalikowe w polu elektrycznym i magnetycznym. Doświadczenie J.J. Thomsona (widok przyrządu z góry)

Gdy między płytkami wytworzymy znaczną różnicę potencjałów, siły wywierane przez naelektryzowane płytki na biegnące cząstki wywołują odchylenie cząstki na prawo lub na lewo (zależnie od tego, która płytka ma wyższy potencjał). Jednocześnie działanie pola magnetycznego wywołuje odchylenie cząstek ku górze albo ku dołowi, zależnie od kierunku pola magnetycznego. Odchylenia w ogóle nie są jednakowe dla wszystkich cząstek, zależą od ich prędkości. Lecz odchylenia cząstek wywołane przez pole elektryczne są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu ich prędkości, natomiast pole magnetyczne wywołuje odchylenia odwrotnie proporcjonalne do pierwszej potęgi prędkości. Aby to wykazać, poprowadźmy oś X w kierunku biegu nieodchylonych promieni kanalikowych, oś Z prostopadle do góry i oś Y prostopadle do płaszczyzny rysunku (rys. 21.20).



Rys. 21.20. Promienie kanalikowe w polu magnetycznym i elektrycznym (widok przyrządu z boku)

W polu elektrycznym na poruszający się jon działa siła stała F_y skierowana, powiedzmy, w prawo, dana przez równanie

$$F_y = QE,$$

gdzie Q oznacza ładunek jonu, a E natężenie pola elektrycznego. Pod działaniem tej siły jon nabywa przyśpieszenia w kierunku osi Y określonego równaniem

$$Ma_y = F_y,$$

gdzie M oznacza masę jonu, a a_y — przyśpieszenie. Rozumowanie zupełnie identyczne jak przy wyprowadzaniu odchylenia promieni katodowych w polu elektrycznym daje na odchylenie cząstek

$$y = E\frac{Q}{M}\frac{l}{v^2}\left(d+\frac{l}{2}\right). \tag{21.47}$$

Pole magnetyczne daje odchylenie w kierunku pionowym, tzn. w kierunku osi Z

$$z = H\frac{Q}{M}\frac{l}{v}\left(d+\frac{l}{2}\right). \tag{21.48}$$

Przy załączeniu jednocześnie pola elektrycznego i magnetycznego promienie kanalikowe doznają jednocześnie odchylenia w kierunku osi Y i Z, przy tym odchylenia te zależą od szybkości jonów, które są rozmaite. Eliminując z równań (21.47) i (21.48) prędkość v otrzymamy odchylenia pionowe odpowiadające danym odchyleniom poziomym. Z równania (21.47) możemy napisać

$$\frac{1}{v^2} = \frac{y}{E}\frac{M}{Q}\frac{1}{l\left(d+\frac{l}{2}\right)},$$

zaś z równania (21.48)

$$\frac{1}{v^2} = \frac{z^2}{H^2}\frac{M^2}{Q^2}\frac{1}{l^2\left(d+\frac{l}{2}\right)^2}.$$

Łącząc prawe strony znakiem równości otrzymamy

$$\frac{y}{E}\frac{M}{Q}\frac{1}{l\left(d+\frac{l}{2}\right)} = \frac{z^2}{H^2}\frac{M^2}{Q^2}\frac{1}{l^2\left(d+\frac{l}{2}\right)^2},$$

skąd

$$z^2 = \frac{H^2}{E}\,l\left(d+\frac{l}{2}\right)\frac{Q}{M}\,y.$$

Oznaczając

$$\frac{H^2}{E}\,l\left(d+\frac{l}{2}\right) = C$$

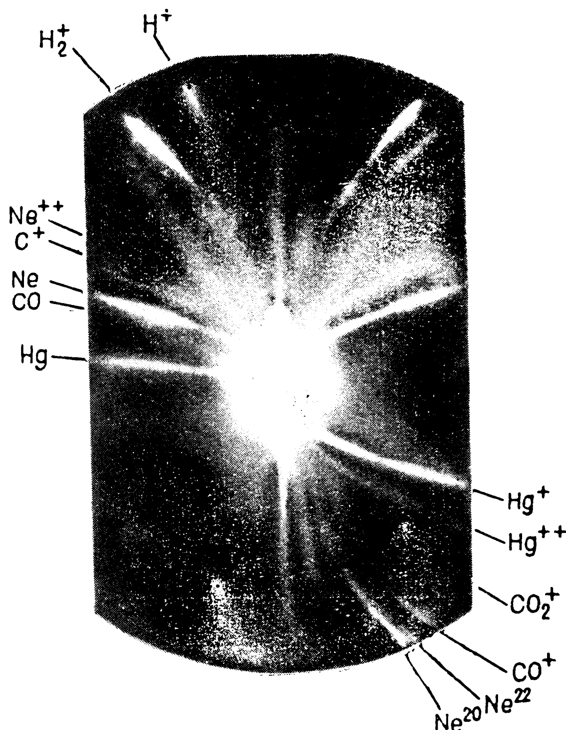
otrzymamy

$$z^2 = C\frac{Q}{M}\,y. \tag{21.49}$$

Jest to równanie paraboli, której parametr zależy od masy jonu M i jego ładunku Q. Wszystkie jony o jednakowych ładunkach i jednakowych masach będą uderzały

o ekran wzdłuż paraboli bez względu na prędkość. Przy ustawieniu w tym miejscu kliszy fotograficznej otrzymamy na niej parabolę — lub kilka parabol, jeżeli w gazie znajdują się jony o różnych masach (rys. 21.21). Ładunek cząstek może być tylko *e*, 2*e*, 3*e* itd. Gdy w bańce mamy tylko jeden gaz, łatwo rozpoznać, która parabola należy do cząstek o pojedynczym, podwójnym czy potrójnym ładunku elementarnym. Thomson przy swych doświadczeniach wykonywanych z neonem stwierdził zjawienie się na kliszy dwóch parabol, których istnienia nie można było wytłumaczyć różnicą ładunku. Thomson wyciągnął od razu daleko idący wniosek, iż możliwe, że mamy tu do czynienia z grupą pierwiastków o podobnych własnościach.

A więc cząstki poruszające się w promieniach kanalikowych w poprzek przez równoległe pola magnetyczne i elektryczne dają na kliszy parabolę, jeżeli mają jednakowe ładunki i masy, lecz różne prędkości. Gdyby masy poszczególnych atomów tego samego gazu różniły się między sobą, to zamiast regularnej krzywej powinnibyśmy otrzymać na kliszy nieregularną plamę. Fakt, że w promieniach dodatnich w jednoczesnym polu magnetycznym i elektrycznym otrzymujemy parabole, a nie plamy, jest pierwszym bezpośrednim doświadczalnym dowodem, że atomy tego samego pierwiastka mają identyczne masy.



Rys. 21.21. Parabole otrzymane przez Thomsona. Obie gałęzie otrzymuje się przy zmianie kierunku pola

Gdy w promieniach dodatnich znajdują się cząstki o różnych masach, otrzymuje się różne parabole. Im masa większa, tym węższa będzie parabola, gdyż tym mniejsze jest odchylenie wywołane przez pole magnetyczne. Gdy na kliszy poprowadzimy prostą pionową $y = \text{const}$, to odcinki zawarte między osią Y i gałęziami różnych parabol będą dane przez równanie

$$z_1^2 = C\frac{Q}{M_1}y_1, \qquad z_2^2 = C\frac{Q}{M_2}y_2 \quad \text{itd.}$$

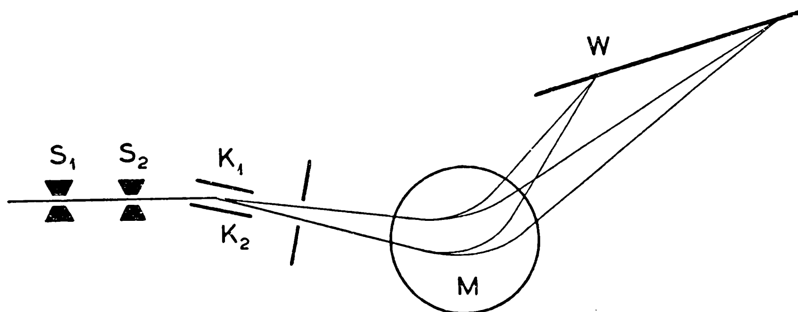
Otrzymujemy stąd

$$\frac{z_1^2}{z_2^2} = \frac{M_2}{M_1}$$

Masy odpowiadające różnym parabolom są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów tych odcinków.

Gdy znamy masę cząstek odpowiadających jednej paraboli, można obliczyć masy cząstek dających inną parabolę. W ten sposób można porównywać ze sobą masy cząstek biegnących w promieniach kanalikowych. Tą właśnie metodą Thomson stwierdził, że w neonie istnieją dwa rodzaje atomów o różnych masach atomowych, jeden o masie dwadzieścia, drugi o masie dwadzieścia dwa.

21.10. Spektrograf masowy. Izotopy. Uczniowi J. J. Thomsona, F. W. Astonowi, udało się opracować metodę wyznaczania mas atomowych znacznie czulszą i dokładniejszą od metody parabol. Stosował on również metodę odchylania biegnących w promieniach kanalikowych jonów w polu elektrycznym i magnetycznym, lecz pola te były prostopadłe jedno do drugiego, tak że pole magnetyczne odchylało wiązkę promieni kanalikowych w stronę przeciwną niż pole elektryczne. Zasadę jego przyrządu wyjaśnia rys. 21.22. Bardzo wąska



Rys. 21.22. Zasada spektrografu Astona

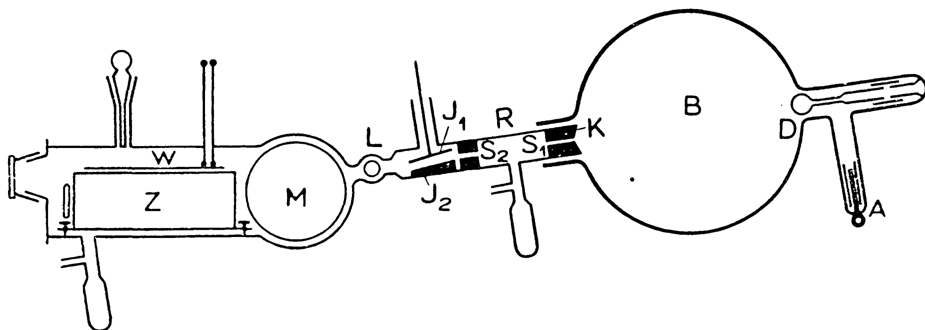
S_1S_2 — szczeliny przepuszczające promienie kanalikowe, K_1K_2 — płytki odchylające, M — pole magnetyczne, W — klisza

wiązka promieni kanalikowych przechodząca przez szczeliny S_1 i S_2 dostawała się między dwie równoległe płytki metalowe K_1 i K_2, między którymi wytworzone było napięcie wynoszące kilkaset woltów. Odchylenie, którego doznają jony w polu elektrycznym, jest, jak to poprzednio wyrachowaliśmy, proporcjonalne do

$$E\frac{Q}{M}\frac{l}{v^2},$$

a więc jest tym mniejsze, im większa jest prędkość. Ponieważ w promieniach kanalikowych znajdują się cząstki o różnych prędkościach, wiązka zostaje rozszczepiona, zamienia się na wiązkę rozbieżną. Następnie wiązka ta dostaje się w pole magnetyczne (prostopadłe do płaszczyzny rysunku). Jony poruszają

się w tym polu po torach kołowych, których promienie krzywizny są proporcjonalne do prędkości. A więc cząstki o większej prędkości będą się w polu magnetycznym mniej odchylały niż cząstki o mniejszej prędkości. Można rachunkiem stwierdzić, że wszystkie cząstki w wiązce o różnych prędkościach, lecz o tym samym stosunku $\frac{Q}{M}$, po przejściu przez pole elektryczne i magnetyczne zbiorą się znowu w jednym miejscu. Gdy w tym miejscu umieści się kliszę fotograficzną, zostanie ona wyświetlona tam, gdzie trafia w nią wiązka jonów. Po wywołaniu otrzymuje się plamkę. Cząstki o innej masie zbiorą się bez względu na prędkość w innym miejscu kliszy *W*. Gdy więc w promieniach kanalikowych znajdują się cząstki o różnych masach i różnych prędkościach, przyrząd Astona skupia w poszczególnych miejscach kliszy czy też ekranu *W* cząstki o jednakowych masach. Gdy znane są masy niektórych cząstek, można z położenia plamek na kliszy wnioskować o masie cząstek, które je wywołały. W optyce używamy analogicznych przyrządów do badania fal świetlnych. Przyrządy te odchylają i rozszczepiają fale światła, a następnie koncentrują je tak, że fale tej samej długości zbierają się w jednym miejscu kliszy fotograficznej, dając na niej prążek. Przyrząd taki nosi nazwę spektrografu. Dlatego też przyrząd Astona podobnie zbierający w jednym miejscu cząstki jednakowej masy nazwano spektrografem masowym, jakkolwiek przeznaczenie, konstrukcja i działanie tego przyrządu są zupełnie inne niż spektrografów optycznych. Rysunek 21.23 przedstawia przekrój spektrografu masowego Astona. W bańce kulistej *B* o pojemności 1 litra

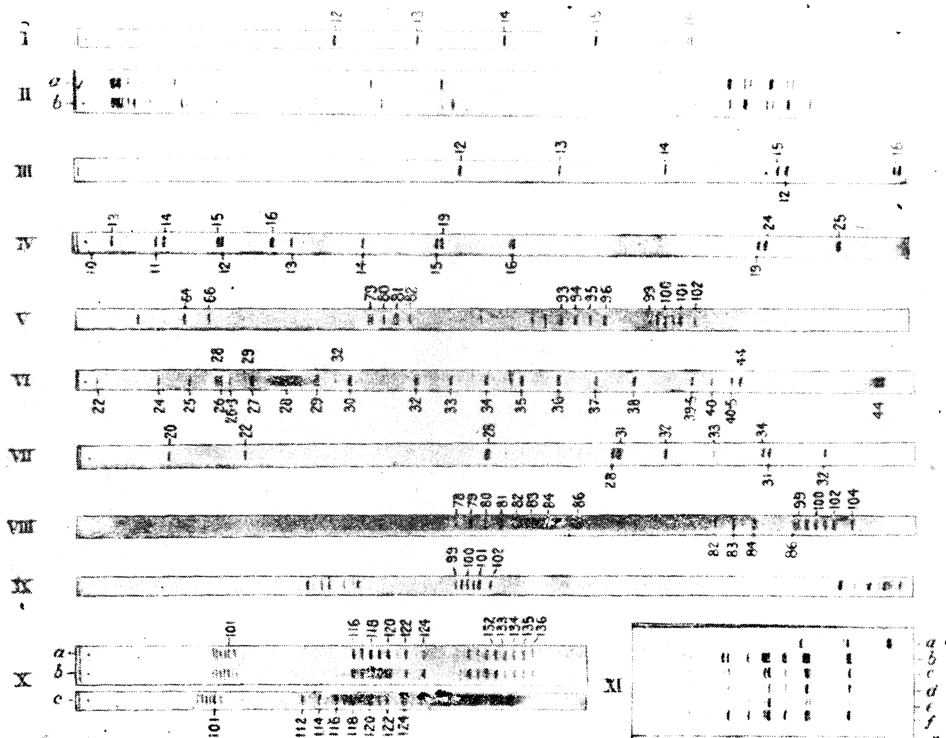


Rys. 21.23. Spektrograf mas Astona

B — rura do wyładowań, *A* — anoda, *K* — katoda, *D* — bańka kwarcowa, J_1 i J_2 — kondensator, *L* — kurek, *M* — bieguny elektromagnesu, *Z* — kamera fotograficzna, *W* — płyta fotograficzna

znajduje się gaz pod niskim ciśnieniem, przez który przepływa prąd elektryczny pod napięciem od 20 000 do 50 000 woltów. Katoda *K* z glinu znajduje się w bocznej rurze *R*. Jest ona wklęsła. Wybiegające z niej promienie katodowe koncentrują się na bańce kwarcowej *D*. Jest to zrobione w tym celu, aby uchronić ścianki bańki szklanej od zbytniego nagrzania. Wprawdzie bańka kwarcowa ogrzewa się silnie, lecz z powodu bardzo trudnej topliwości kwarcu nie powoduje to

żadnych złych skutków. Przez otworek w katodzie średnicy kilku setnych milimetra cząstki dodatnie przedostają się na drugą stronę katody tworząc tam wąziutką wiązkę promieni kanalikowych. Do bańki B gaz był stale dopuszczany przez bardzo mały otworek, natomiast przestrzeń S_1 S_2 była połączona z pompą bardzo szybko wypompowującą gaz. W tej przestrzeni musi być jak najlepsza próżnia w celu uniknięcia zderzenia cząstek biegnących z drobinami gazu. Wprawdzie do tej przestrzeni stale dopływa gaz z bańki B, lecz przez tak wąski otworek,



Rys. 21.24. Linie dawane przez atomy o różnych masach w spektrografie Astona

że pompa stale funkcjonująca mimo to zdoła utrzymać dobrą próżnię w przestrzeni S_1 S_2. Jak widać z rysunku, wiązka dostaje się następnie między dwie płytki metalowe J_1 J_2, między którymi panuje dość znaczne napięcie, wskutek czego ulega ona odchyleniu i rozciągnięciu na wiązkę wachlarzowatą. Wiązka ta przebiega następnie między biegunami wielkiego elektromagnesu, gdzie ulega odchyleniu w przeciwną stronę oraz zamienia się na wiązkę zbieżną. Potem dostaje się między dwie pionowe uziemione płytki metalowe ZZ, wreszcie skupia się na kliszy fotograficznej W. Na kliszy po jej wywołaniu występują prążki w różnych miejscach, odpowiadające różnym masom cząstek biegnących w wiązce promieni kanalikowych (rys. 21.24). Porównując położenie prążków na kliszy można

wyznaczyć dokładnie masy tych cząstek. Za pomocą tej metody udało się Astonowi odkryć, że wiele pierwiastków jest mieszaniną kilku gatunków atomów różniących się masami (oczywiście również i ciężarami). Pierwiastki różniące się tylko masami atomowymi, a poza tym posiadające chemiczne i fizyczne własności prawie identyczne, nazywano izotopami.

Badania Astona stwierdziły jeszcze drugi, nadzwyczaj ważny fakt, mianowicie, że masy atomowe izotopów różnych pierwiastków wyrażają się z dużym przybliżeniem liczbami całkowitymi. Zwykle za jednostkę masy atomowej przyjmuje się $^{1}/_{16}$ masy atomu tlenu. Wtedy masa atomu wodoru wyrazi się liczbą o osiem tysięcznych tylko większą od jedności. Masa atomowa helu wyrazi się w przybliżeniu liczbą 4, węgla — liczbą 12 itd. Już dawno zostało wypowiedziane przez lekarza angielskiego Prouta (czyt. Prauta) przypuszczenie, że atomy wszystkich pierwiastków są zbudowane z cegiełek, którymi są atomy wodoru. Lecz stąd natychmiast można wysunąć wniosek, że w takim razie masy atomowe wszystkich pierwiastków powinny się wyrażać liczbami całkowitymi, ponieważ każdy z atomów mógłby oczywiście zawierać tylko całkowitą liczbę atomów wodoru, którego masa bardzo niewiele różni się od jednostki. Tymczasem pomiary chemiczne dały na masy atomowe wielu pierwiastków liczby bardzo znacznie różniące się od liczb całkowitych. Tak np. drogą chemiczną zmierzona masa atomowa neonu wynosi 20,2 chloru — 35,46, żelaza — 55,84, miedzi — 63,57, cyny — 118,7. Fakt ten nie dał się pogodzić z przypuszczeniem Prouta, toteż hipoteza jego upadła. Lecz odkrycie Astona rzuciło nowe światło na tę sprawę. Dokładne pomiary spektrografem masowym wykazały, że istnieją trzy izotopy neonu: jeden o masie atomowej 20, drugi — 21, trzeci — 22. Gaz neon występujący w przyrodzie jest mieszaniną tych trzech izotopów w pewnym stosunku zmieszanych. Pomiary masy atomowej, w których mamy do czynienia zawsze z olbrzymią liczbą atomów, dają masę średnią. Dlatego otrzymuje się na masę atomową neonu liczbę 20,2. Podobnie istnieją dwa izotopy chloru o masie atomowej, 35 i 37, dwa izotopy żelaza o masach atomowych 54 i 56, dziesięć izotopów cyny o masach atomowych 112, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 122, 124. Prawie wszystkie pierwiastki, z którymi mamy do czynienia stanowią mieszaniny izotopów. Przy wszystkich reakcjach chemicznych izotopy zachowują się prawie zupełnie jednakowo, wskutek czego drogą chemiczną prawie niepodobna ich rozdzielić. Pomiary dają zawsze średnią masę atomu dla tej mieszaniny izotopów. Dlatego nie otrzymuje się na nie liczb całkowitych.

Jak zobaczymy, później przekonano się, że jądra wszystkich atomów zbudowane są z dwóch cząstek elementarnych: protonów i neutronów. Masy ich są prawie równe, mianowicie:

$$\text{masa protonu} = 1{,}00759,$$
$$\text{masa neutronu} = 1{,}00898$$

przy odniesieniu ich do masy izotopu tlenu stanowiącego 99,8% zwykłego tlenu przyjętego za 16. Proton ma zawsze dodatni ładunek równy ładunkowi elementar-

nemu, zatem $+e$, ładunek neutronu równa się zeru. Ładunek jądra równa się liczbie porządkowej pierwiastka w tablicy Mendelejewa. Liczbę ładunków elementarnych w jądrze, równą oczywiście liczbie protonów, oznaczamy literą Z. Będzie ona jednocześnie liczbą porządkową danego pierwiastka. Ładunek jądra określa indywidualność chemiczną danego atomu. Atomy danego pierwiastka mają zawsze jednakowy ładunek jądra. Natomiast liczba neutronów w różnych izotopach jest różna. Protony i neutrony, czyli cząstki wchodzące w skład jądra atomowego, nazywamy nukleonami. Liczbę nukleonów w jądrze nazywamy liczbą masową i oznaczamy literą A. Należy ją odróżniać od masy atomowej, która nawet dla izotopów nie jest dokładnie liczbą całkowitą. Liczby Z i A są natomiast liczbami całkowitymi. Oczywiście liczba neutronów w jądrze będzie równa $A-Z$.

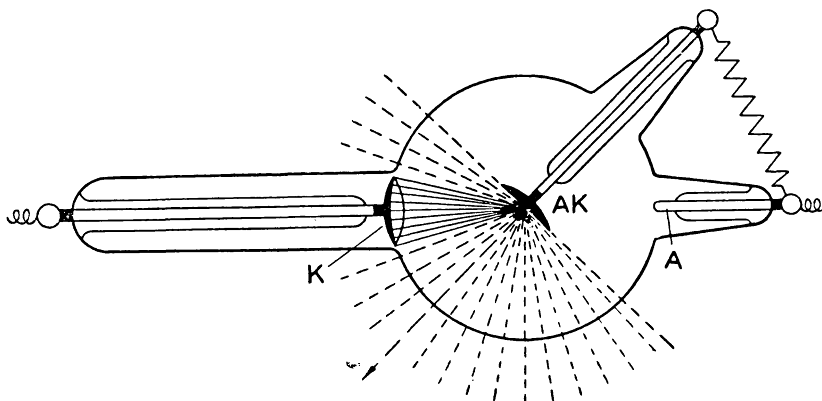
Przyjęto obecnie symbole pierwiastków (izotopów) zaopatrywać w dwa wskaźniki z lewej strony. Dolny wskazuje liczbę porządkową pierwiastka, górny zaś — liczbę masową. A więc np. ${}^{12}_{6}C$ oznacza izotop węgla o liczbie masowej 12, ${}^{14}_{7}N$ — izotop azotu o liczbie masowej 14, ${}^{23}_{11}Na$ — izotop sodu o liczbie masowej 23 itd.

21.11. Promienie Röntgena. Jak wykrył w r. 1895 Röntgen, ścianki rury szklanej w miejscu, gdzie ją trafiają promienie katodowe, są nie tylko źródłem promieni widzialnych, lecz również wysyłają promieniowanie niewidzialne dla oka, wywołujące fluorescencję ekranu pokrytego np. siarczkiem cynku lub platynocyjankiem baru. Również promienie te wywołują wyświetlenie kliszy fotograficznej nawet wtedy, gdy jest ona opakowana w czarny papier lub zamknięta w szczelnej kasetce drewnianej. Wywołują one wreszcie jonizację gazów, przez które przechodzą. Promienie te Röntgen nazwał promieniami X. Dzisiaj nazywają je promieniami X lub promieniami Röntgena.

Jak wykazały doświadczenia, nie tylko szkło bańki trafiane przez promienie katodowe wysyła promienie Röntgena. Wysyła je każde ciało, na które pada strumień promieni katodowych. Przy tym promienie te mają tym większą energię i są tym przenikliwsze, im wyższe jest napięcie wytwarzające promienie katodowe i im większa jest masa atomowa pierwiastka, o który uderzają promienie katodowe. Bardzo przenikliwe promienie wytwarzane przy bardzo wysokim napięciu nazywają się w praktyce promieniami twardymi. Promienie wytwarzane przy stosunkowo niskich napięciach, mniej przenikliwe, nazywamy promieniami miękkimi.

Konstrukcja lampy rentgenowskiej dawniejszego typu jest przedstawiona na rys. 21.25. Do dużej bańki szklanej o średnicy kilkunastu lub więcej cm przylutowane są trzy rury szklane zatopione, w których końce wtopione są druty metalowe. W jednej rurze na metalowym pręcie znajduje się płytka glinowa K kształtu wklęsłej miseczki służąca za katodę. W dwóch pozostałych znajdują się elektrody, z których jedną (A) nazywają anodą, drugą (AK) — antykatodą.

Obie są zwykle połączone metalicznie. Podczas funkcjonowania lampy ważną rolę odgrywa tylko jedna z nich, mianowicie antykatoda. Jest to metalowa płytka lub blok umocowany na metalowym pręcie lub rurze. Płyta ta znajduje się w samym środku bańki. Między katodą i antykatodą wywołuje się wysoką różnicę potencjałów wynoszącą kilkadziesiąt tysięcy woltów. Napięcie to zależy od ciśnienia gazu w bańce. Im mniejsze jest ciśnienie, tym większego potrzeba napięcia do



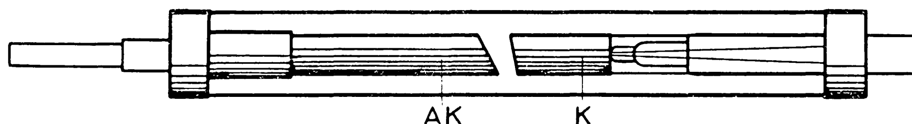
Rys. 21.25. Jonowa lampa Röntgena

przepędzenia prądu przez bańkę. Ciśnienie gazu w lampie rentgenowskiej wynosi zwykle od jednej do kilku tysięcznych mm rtęci. Obecność resztek gazu w lampie rentgenowskiej jest niezbędna, ponieważ bombardowanie jonów gazowych wyzwala elektrony z katody dając początek promieniom katodowym. Gdyby nie było jonów dodatnich bombardujących katodę, nie wytwarzałyby się również promienie katodowe ani promienie Röntgena. Tego rodzaju lampy rentgenowskie nazywamy jonowymi.

Ponieważ promienie katodowe wybiegają z katody w kierunku linij pola elektrycznego, które przy powierzchni katody są do niej normalne, nadaje się katodzie umyślnie kształt wklęsłej miseczki. Dzięki temu otrzymuje się zbieżny strumień promieni katodowych, które koncentrują się na antykatodzie na bardzo małej powierzchni, często nie większej niż 1 mm^2.

W ostatnich czasach lampy jonowe wyszły zupełnie z użycia. Zostały one wyrugowane przez lampy z żarzoną katodą. W takich lampach katodą jest spiralnie zwinięty drucik wolframowy ogrzany do wysokiej temperatury za pomocą prądu o napięciu kilku lub kilkunastu woltów. Drucik ten emituje elektrony. Naprzeciwko katody *K*, w niewielkiej zwykle od niej odległości znajduje się antykatoda *AK*. Ponieważ z drucika elektrony są wyrzucane na wszystkie strony, więc aby je skoncentrować i zamienić na wiązkę skierowaną na antykatodę, otacza się go osłoną metalową w kształcie cylindra lub kubka utrzymywaną na tym samym

potencjale co katoda (rys. 21.26). Gaz w takich lampach jest nie tylko niepotrzebny, ale nawet szkodliwy, gdyż jony gazowe bombardując katodę niszczą ją. Toteż usuwa się go jak najstaranniej. Napięcia stosowane przy takich lampach mogą



Rys. 21.26. Lampa rentgenowska z żarzoną katodą

dochodzić do miliona woltów. Natężenie prądu przewodzonego przez lampę można regulować przez słabsze lub silniejsze żarzenie katody.

Antykatoda przy bombardowaniu elektronami ogrzewa się bardzo silnie. W lampach używanych przy badaniach naukowych i w medycynie przepuszcza się przez nie stosunkowo silne prądy. Ponieważ przeszło 99% energii promieni katodowych zamienia się na ciepło, a mniej niż 1% na promieniowanie rentgenowskie, antykatoda ogrzewa się normalnie tak silnie, że gdybyśmy jej nie chłodzili, musiałaby ulec uszkodzeniu. Toteż wynaleziono różne systemy chłodzenia antykatody. W lampach dużej mocy antykatoda jest osadzona na rurze metalowej, przez którą przepuszcza się prąd chłodnego powietrza, prąd zimnej wody lub oleju. Mimo to powierzchnia antykatody tam, gdzie trafiają ją promienie katodowe, ogrzewa się bardzo silnie. Toteż prawie z reguły umieszcza się w tym miejscu płytkę z wolframu, którego temperatura topliwości wynosi koło 3400°C.

Promienie Röntgena przenikają przez ciała, lecz przy tym przenikaniu są częściowo rozpraszane, częściowo zaś pochłaniane, czyli absorbowane. Stwierdzono, że każde ciało, przez które przechodzą promienie Röntgena, staje się samo źródłem promieni tzw. wtórnych, o takich samych własnościach jak promienie pierwotne.

Przenikanie promieni Röntgena przez ciała materialne jest ich najdziwniejszą własnością. Przenikają one bez trudności przez ciała nieprzeźroczyste dla światła, a więc przez papier, tekturę, drzewo, nawet przez blachy lub płyty metalowe. Jednakże podczas przechodzenia przez substancję ulegają one osłabieniu, czyli absorpcji. Wiązka promieni w przybliżeniu równoległych przechodząca przez jakąś substancję w miarę przenikania przez nią staje się coraz uboższa w energię. Pochodzi to z dwóch przyczyn: 1) część energii ulega rozproszeniu, rozchodzi się na wszystkie strony w postaci wtórnego promieniowania; 2) część energii zamienia się na inne rodzaje energii wskutek jonizacji napotykanych atomów. W rezultacie natężenie wiązki maleje eksponencjalnie, według prawa

$$I = I_0 \, e^{-\mu d}, \tag{21.50}$$

gdzie I_0 jest natężeniem padającej wiązki, e — zasadą logarytmów naturalnych d — grubością warstwy, przez którą przeniknęły promienie, μ — tak zwanym

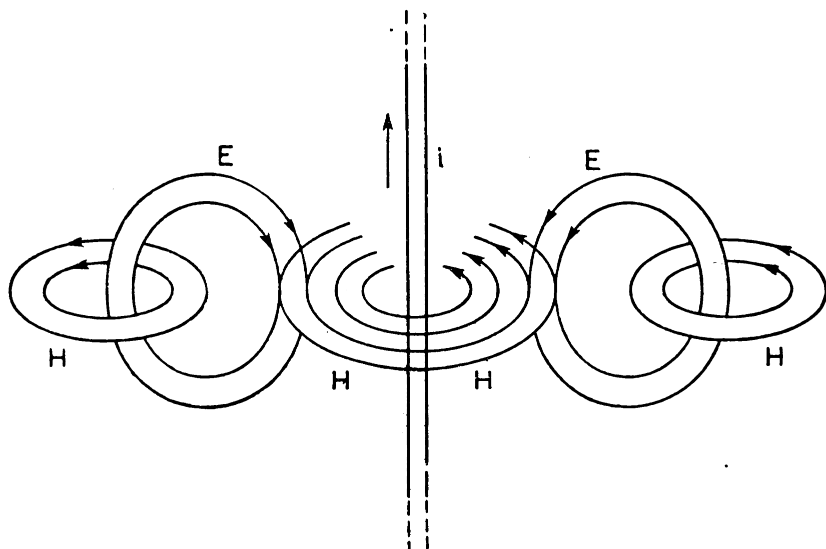
współczynnikiem absorpcji, od którego wartości zależy oczywiście szybkość zanikania promieni. Jak wiadomo z doświadczenia, współczynnik absorpcji μ rośnie bardzo szybko wraz z numerem porządkowym Z pierwiastka. Pierwiastki zatem o małym numerze porządkowym (a więc jednocześnie i o małej masie atomowej) pochłaniają je słabo. Bardzo silnie zaś pochłaniane są przez pierwiastki o dużym numerze porządkowym, a więc stojące blisko końca układu periodycznego, takie jak platyna, złoto, rtęć, ołów. Natomiast nie zależy absorpcja od rodzaju związku chemicznego, do którego wchodzą atomy. Gdy między źródłem promieni Röntgena i ekranem fluoryzującym umieścimy jakiś przedmiot, na ekranie występuje jego cień tym ciemniejszy, im silniej substancja, z której przedmiot jest zbudowany, pochłania promienie. Gdy przedmiotem prześwietlanym jest ciało ludzkie, na ekranie pojawia się słaby cień mięśni zawierających lekkie pierwiastki o małym numerze porządkowym, jak węgiel ($Z = 6$), wodór ($Z = 1$) i tlen ($Z = 8$). Kości zaś, zawierające pierwiastki o większym numerze porządkowym, mianowicie wapń ($Z = 20$) i fosfor ($Z = 15$) dają na ekranie czy też filmie już bardzo wyraźne cienie. Absorpcja zależy również od napięcia, za pomocą którego promienie są wywoływane. Promienie twarde, powstające przy wysokich napięciach, są znacznie mniej absorbowane niż miękkie.

Natura promieni Röntgena przez długi czas pozostawała tajemnicą. Nie ulegają one odchyleniu ani w polu magnetycznym, ani elektrycznym, a więc nie niosą ładunków elektrycznych. Nie jest to więc na pewno strumień cząstek naładowanych jak promienie katodowe lub kanalikowe. Można było przypuszczać, że są to promienie podobne do promieni światła, tym bardziej, że pomiary Marxa stwierdziły, iż promienie te rozchodzą się zawsze z prędkością światła. Lecz przez długi czas nie udawało się wykryć prawie żadnych zjawisk, jakie występują zawsze przy falach, a więc ani odbicia, ani załamania, ani uginania, ani interferencji. Wykryto tylko jedno zjawisko, które przypominało własności promieni światła: stwierdzono mianowicie, że promienie Röntgena mogą być spolaryzowane. Lecz w roku 1912 udało się po raz pierwszy uzyskać interferencję promieni Röntgena. Potem stwierdzono występowanie wszystkich zjawisk, jakie obserwujemy przy falach, a więc załamanie, odbicie i uginanie. Obecnie nie mamy już żadnych wątpliwości, że promienie Röntgena są falami elektromagnetycznymi, tylko o długości fali znacznie mniejszej niż wszystkie dotychczas znane promienie. Stąd pochodziły trudności w stwierdzeniu tych wszystkich zjawisk.

21.12. Emisja i rozpraszanie fal elektromagnetycznych. Jak wiadomo z nauki o prądach elektrycznych, prąd płynący w drucie wytwarza pole magnetyczne, którego linie są okręgami kół o środkach leżących w osi drutu (rys. 21.27). Jeżeli natężenie prądu wzrasta, wzrasta również natężenie pola magnetycznego. Lecz wzrastające pole magnetyczne wywołuje w dalszym otoczeniu pole elektryczne. Zmieniające się pole elektryczne z kolei wywołuje znowu w dalszym otoczeniu powstanie pola magnetycznego itd. Zmiany te, jak wykazał

Maxwell, rozchodzą się w przestrzeni z prędkością światła. Gdy takie zmienne pole elektromagnetyczne natrafi na przewodnik, np. na antenę odbiorczą, wznieca w nim prądy zmienne częstotliwości tej samej, z jaką się zmienia pole. Jest to zjawisko doskonale znane w radiofonii, która z niego korzysta.

Prąd stały w drucie polega na ruchu elektronów ze stałą średnią prędkością. Prąd zmienny, który wywołuje w otoczeniu powstanie fal elektromagnetycznych, będzie polegał na zmiennym ruchu elektronów, na ruchu o zmieniającej się



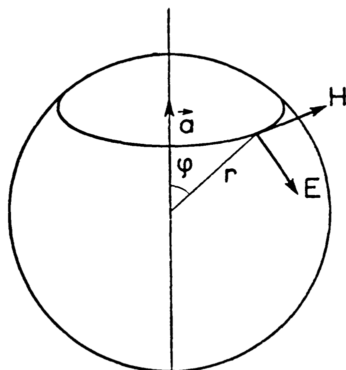
Rys. 21.27. Pole magnetyczne i elektryczne powstające wokół przewodu, w którym płynie prąd o zmieniającym się natężeniu

prędkości. Można to samo powiedzieć o pojedynczym elektronie. Gdy się porusza ze zmienną prędkością, to jest wówczas równoważny zmiennemu prądowi elektrycznemu. W elektrodynamice wykazuje się, że elektron, który ma przyśpieszenie $\vec{a}$ (dodatnie albo ujemne) wypromieniowuje falę elektromagnetyczną, tj. zmienne pole elektryczne i magnetyczne, których natężenia maleją z odległością r od elektronu. Jeżeli przyśpieszenie elektronu jest skierowane tak jak na rys. 21. 28 ku górze, to wartości liczbowe wektorów E i H w odległości r od elektronu dane są wzorem

$$|E| = |H| = \frac{ae}{rc^2}\sin\varphi,$$

gdzie $\vec{a}$ jest przyśpieszeniem elektronu, e — jego ładunkiem, r — odległością, c — prędkością światła, φ — kątem między $\vec{a}$ i $\vec{r}$. E i H wyrażają się tymi samymi liczbami, gdy $|E|$ jest wyrażone w jednostkach ES, a $|H|$ w jednostkach EM.

Wektory E i H biegną z prędkością światła. Jak pokazuje powyższy wzór, natężenie pola jest największe w fali poruszającej się w kierunku prostopadłym do przyśpieszenia $\vec{a}$, natomiast w kierunku przyśpieszenia jest zero. Kierunek wektora E jest ~~zgodny z kierunkiem przyśpieszenia~~ prostopadły do r i do H $\vec{a}$, natomiast wektor H leży stale w płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{a}$.



Rys. 21.28. W otoczeniu elektronu poruszającego się z przyśpieszeniem powstaje fala elektromagnetyczna składająca się z pola elektrycznego (E) i magnetycznego (H)

W przypadku, gdy elektron wykonuje drganie harmoniczne, promieniuje falę elektromagnetyczną sinusoidalną. Biegnące wówczas wektory elektryczny i magnetyczny wyrażają się wzorami:

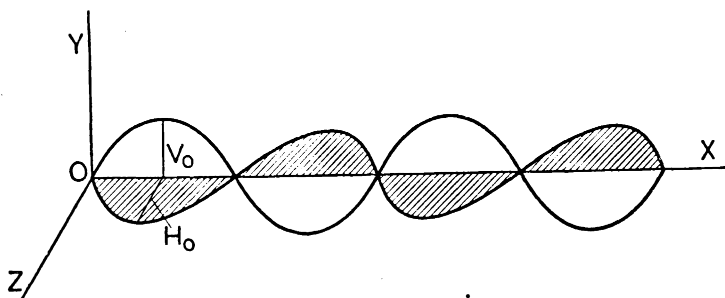
$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ct - x),$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(ct - x).$$

Fala wysyłana przez elektron drgający w pewnym określonym kierunku jest spolaryzowana liniowo. Oba wektory mają zgodne fazy. Bieg fali elektromagnetycznej przedstawia rys. 21.29.

Elektrony rozpędzone w lampie rentgenowskiej wysokim napięciem zostają na antykatodzie gwałtownie zahamowane. Mają więc ujemne przyśpieszenie i wobec tego wypromieniowują fale elektromagnetyczne.

Gdy promienie Röntgena padają na jakiekolwiek ciało, staje się ono samo źródłem tzw. wtórnych promieni rentgenowskich. Łatwo to wytłumaczyć.



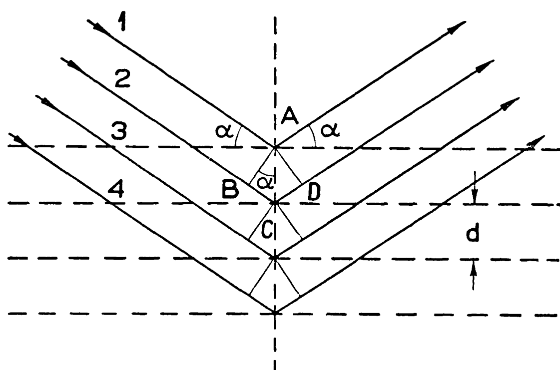
Rys. 21.29. Fala elektromagnetyczna płaska

Fala elektromagnetyczna dobiegająca do elektronów znajdujących się w atomach powoduje ich przyśpieszenie. Będzie to jakby nagłe szarpnięcie elektronów. Elektron zaś, który ma przyśpieszenie, musi promieniować na wszystkie strony

falę elektromagnetyczną. Elektrony znajdujące się w atomach pobudzone zostają do drgania i stają się same źródłami fal rozchodzących się na wszystkie strony. Zjawisko to nazywamy rozproszeniem promieni Röntgena.

21.13. Interferencja promieni Röntgena. Jak już wspomniano w ust. 21. 11, w r. 1912 udało się wreszcie wykryć zjawiska uginania i interferencji promieni rentgenowskich. Nie można jednak w tym przypadku otrzymać widma w taki sam sposób, jak przy świetle widzialnym za pomocą zwykłej siatki dyfrakcyjnej. Jest to narzędzie zbyt grube. W wymienionym roku Laue zwrócił uwagę na to, że sama przyroda daje nam o wiele subtelniejsze siatki w postaci kryształów. Od dawna już przypuszczano, że regularna budowa kryształów jest uwarunkowana regularnym ułożeniem w nich atomów, że atomy są w nich ułożone w periodycznie powtarzających się odstępach, tworząc siatkę przestrzenną. Jeżeli tak jest i jeżeli promienie Röntgena polegają na falowaniu, to fale wychodzące z różnych atomów rozmieszczonych w siatce biegnące w pewnych kierunkach będą się spotykały w fazach zgodnych, w innych zaś — w fazach przeciwnych. Powinniśmy móc zatem obserwować zjawiska interferencji. Taki był bieg rozumowania Lauego. Rzeczywiście, gdy współpracownicy Lauego, Friedrich i Knipping, rzucili wiązkę promieni Röntgena na kryształ ustawiając za nim kliszę fotograficzną, otrzymali na niej szereg regularnie ułożonych plamek świadczących o tym, że w pewnych kierunkach wysyłane przez atomy promienie wzmacniają się, w innych zaś — znoszą.

Metoda Lauego polegająca na prześwietlaniu kryształów ma duże znaczenie dla badań nad ich budową, ponieważ z rozkładu plamek na kliszy można wnioskować o układzie atomów w krysztale. Jeżeli chodzi natomiast o badanie własności samych promieni Röntgena, to ważniejsza jest metoda opracowana przez dwóch fizyków, Braggów: ojca i syna. Polega ona na zjawisku, że wiązka promieni Röntgena rzucona na powierzchnię kryształu jak gdyby odbija się od niego, lecz tylko pod pewnymi określonymi kątami. Nie jest to odbicie tego rodzaju, jak odbicie promieni widzialnych od powierzchni zwierciadła. Jest to zjawisko polegające na interferencji promieni wchodzących w głąb kryształu i rozproszonych od rozmaitych warstw atomów. W krysztale atomy są ułożone prawidłowo w równych odstępach jeden od drugiego tworząc w ten sposób sieć przestrzenną. Atomy są



Rys. 21.30. Selektywne odbicie promieni Röntgena od kryształu. Różnica dróg między promieniem 1 i 2 jest *BCD*

ułożone w płaszczyznach znajdujących się w równych odstępach jedna od drugiej. Odstępy te są rzędu 10^{-8} cm.

Gdy wiązka promieni Röntgena pada na taki układ warstw atomów, ulega w każdej warstwie rozproszeniu. Zatem z każdej warstwy wychodzą na wszystkie strony rozproszone wiązki promieni. W pewnych kierunkach wiązki te wskutek interferencji silnie się wzmacniają. Następuje to wtedy, gdy promienie rozproszone tworzą z warstwami taki kąt α, iż różnica dróg między sąsiednimi promieniami równa się wielokrotności długości fali (rys. 21.30). Oznaczając odstęp płaszczyzn, w których ułożone są atomy, przez d otrzymamy na warunek interferencji

$$n\lambda = 2d \sin \alpha. \tag{21.51}$$

Pod kątem określonym tym równaniem promienie Röntgena ulegają tzw. selektywnemu odbiciu, to znaczy jak gdyby odbijają się, lecz tylko pod tym kątem. Pod innymi kątami zaś promienie ulegają prawie całkowitemu wygaszeniu wskutek interferencji. Znając d i mierząc kąt α możemy obliczyć długość fali. Odstępy atomów w sieci krystalicznej są znane w wielu wypadkach.

Zadania

21.1. Kondensator złożony z dwóch płyt równoległych znajdujących się w odległości 5 mm jedna od drugiej przyłączony jest do baterii, która wytwarza między nimi napięcie 600 woltów. 1. Jakie jest natężenie pola E między okładkami? 2. Jaka będzie siła działająca na malutką kuleczkę oleju o ładunku $28 \cdot 10^{-19}$ C ?

Odpowiedź: $E = 4$ j. ES $= 1200$ V/cm; $F = 3{,}36 \cdot 10^{-8}$ dyn.

21.2. Z jaką prędkością spadałaby w powietrzu malutka kulka oleju o średnicy $2R = 0{,}552\mu$ (gęstość oleju 0,92 g/cm³, gęstość powietrza 0,0013 g/cm³, współczynnik lepkości powietrza $\eta = 1{,}824 \cdot 10^{-4}$ j. CGS)?

Odpowiedź: $v = 0{,}0084$ mm/sec.

21.3. Kuleczka rtęci spada w powietrzu z prędkością $v = 0{,}6$ mm/sec. Jaka jest jej średnica (gęstość rtęci $\varrho = 13{,}55$ g/cm³)?

Odpowiedź: 1,2 μ.

21.4. Jaka jest średnia składowa prędkości elektronów wzdłuż drutu miedzianego o przekroju 1,5 mm², w którym płynie prąd 3 A przy założeniu, że na jeden atom miedzi przypada 1 elektron przewodnictwa? (Uważać, żeby wszystkie wielkości były wyrażone w jednostkach tego samego układu).

Odpowiedź: $v = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ cm/sec.

21.5. Elektron poruszający się z energią kinetyczną 5000 eV wpada w jednorodne pole magnetyczne o natężeniu 50 Oe prostopadle do jego linij. Jaki będzie promień toru elektronu?

Odpowiedź: 4,76 cm.

21.6. Elektron wyzwolony z katody przyśpieszony jest napięciem 300 V. Obliczyć jego prędkość końcową v i energię kinetyczną E_k w ergach.

Odpowiedź: $v = 1{,}03 \cdot 10^9$ cm/sec; $E_k = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ergów.

21.7. Pojedynczo naładowane jony litu 6 i 7 wyrzucone z gorącej anody zostały przyśpieszone napięciem 400 V. Przez otworek w katodzie dostają się w pole magnetyczne jednorodne, którego linie są prostopadłe do ich torów, o natężeniu 800 Oe. Jakie są promienie ich torów?

Odpowiedź: $r = \frac{1}{H}\sqrt{2\frac{MU}{e}}$; 1) 7,9 cm; 2) 9,6 cm.

Pytania dla powtórzenia materiału

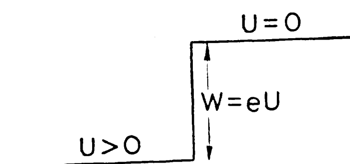
1. Jak stwierdzono, że ładunki występujące w doświadczeniu są wielokrotnościami ładunku elementarnego?
2. Jakie są różnice w budowie atomów rozmaitych pierwiastków? Jaka jest różnica między przewodnikami i izolatorami?
3. Jaki jest związek między natężeniem prądu w przewodniku, a liczbą i prędkością elektronów?
4. Jaka siła działa na ładunki poruszające się w polu magnetycznym? Jak ją obliczyć?
5. Jak się porusza elektron w próżni w polu magnetycznym?
6. Jak się tłumaczy przewodzenie elektryczności przez gazy? Jakie czynniki nazywamy jonizującymi?
7. Na czym polega samoistne wyładowanie w gazach? Jak zależy od ciśnienia?
8. Jakie są własności promieni katodowych? Jaka jest ich istota?
9. Od czego zależy prędkość promieni katodowych? Jak zależy?
10. W jaki sposób zmierzono prędkość elektronów w promieniach katodowych i stosunek $\frac{e}{m}$?
11. Jakie są własności promieni kanalikowych? Jaka jest ich istota?
12. Czym się różnią zjawiska w promieniach kanalikowych od zjawisk w promieniach katodowych? dlaczego?
13. Jak zmierzono prędkości cząstek w promieniach kanalikowych i stosunek ładunku do masy?
14. Jaka jest zasada spektrografu masowego i co wykrył Aston za pomocą tego przyrządu?
15. Kiedy i jak powstają promienie Röntgena? Jakie są ich własności?
16. Na czym polega rozpraszanie fal elektromagnetycznych?
17. W jaki sposób wykryto zjawisko interferencji promieni Röntgena?
18. Jak można zmierzyć długość fali promieni rentgenowskich?

22. Zastosowania techniczne zjawisk związanych z emisją elektronów

22.1. Emisja elektronów z ciał rozżarzonych. Wyrzutnia elektronowa. Każdy przewodnik metaliczny składa się z atomów, które, jak już o tym mówiliśmy, zawierają elektrony. W metalach zewnętrzne elektrony odrywają się z łatwością od atomów i poruszają się swobodnie w przestrzeniach międzyatomowych. Jednak nie mogą one opuścić wnętrza metalu z powodu istnienia sił wywieranych na elektrony zbliżające się do powierzchni. Na granicy przewodnika istnieje zatem pole sił skierowanych normalnie do powierzchni. Jak w innych przypadkach pól sił, tak i tu można zastosować pojęcie potencjału. Kiedy omawialiśmy pole elektryczne, określony został również potencjał względem dowolnego punktu M jako stosunek pracy L (wykonanej przez siły pola przy przeniesieniu ładunku $+q$ z danego punktu do punktu M) — do wielkości przeniesionego ładunku:

$$U = \frac{L}{q}.$$

Dla uproszczenia przedstawienia sprawy będziemy uważali, że elektrony wewnątrz metalu mogą się poruszać zupełnie swobodnie, a więc zaniedbamy pola pochodzące od jonów metali. Wtedy możemy przyjąć pewien średni potencjał wewnątrz metalu za stały. Natomiast w warstewce granicznej metalu istnieje prawie nagły skok potencjału, jak gdyby ściana potencjału, której elektrony przeskoczyć nie mogą. Jeżeli potencjał na zewnątrz przewodnika jest równy zeru, to wewnątrz metalu będzie miał wartość U (rys. 22.1). Potencjał ten będzie dodatni, lecz dla lepszego uzmysłowienia go na rysunku za kierunek dodatni przyjęty jest kierunek w dół. Aby elektron wydobyć z tego zagłębienia potencjału, należałoby wykonać pracę



Rys. 22.1. Potencjał na granicy przewodnika

$$W = eU,$$

zwaną pracą wyjścia. Ponieważ w miarę wzrostu temperatury energia kinetyczna przynajmniej pewnej części elektronów rośnie, więc te elektrony, które uzyskają

energię kinetyczną większą od pracy wyjścia, będą mogły wylatywać z metalu. Doświadczenie wykazuje, że rzeczywiście tak jest. Przy dostatecznie wysokiej temperaturze metal staje się źródłem swobodnych elektronów jak gdyby „wyparowujących" z jego powierzchni. Różne metale mają ściany potencjalne różnej wysokości, toteż emisja elektronów z ich powierzchni zaczyna się przy różnych temperaturach. Tabela 22. 1 podaje pracę wyjścia oraz temperaturę, przy której zaczyna się emisja.

Tabela 22.1

Praca wyjścia oraz temperatura, przy której zaczyna się emisja

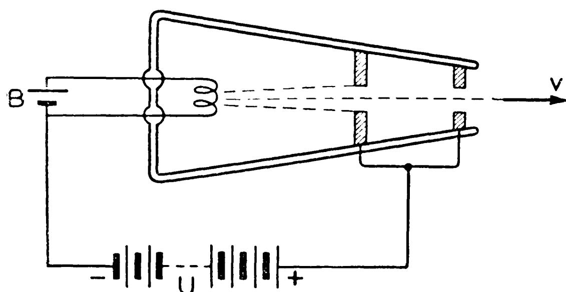
Metal	Praca wyjścia w elektronowoltach	Przybliżona temperatura, w której zaczyna się emisja elektronów
Cez	1,38	
Bar	1,5	
Stront	1,8	530°C
Wapń	2,24	
Wolfram torowany	2,6	1200°
Cyrkon	3,28	
Tantal	4,12	
Wolfram	4,5—4,62	1800°
Platyna	5,4	

Ze względu na to, że emisja elektronów z takich metali, jak bar, stront, wapń rozpoczyna się w stosunkowo niskich temperaturach, metale te mają obecnie szerokie zastosowanie w lampach elektronowych.

W miarę wzrostu temperatury ilość emitowanych elektronów rośnie nadzwyczaj szybko. Według wzoru Richardsona (czyt. Ryczardsona) zmodyfikowanego przez Dushmanna (czyt. Daszmana) na podstawie mechaniki kwantowej, emisja jest proporcjonalna do

$$T^2 e^{-\frac{b}{T}},$$

gdzie T oznacza temperaturę bezwzględną, e — zasadę logarytmów naturalnych, b — stałą, różną dla różnych ciał. Przebieg wzrostu przypomina nieco wzrost ciśnienia pary nasyconej ze wzrostem temperatury.

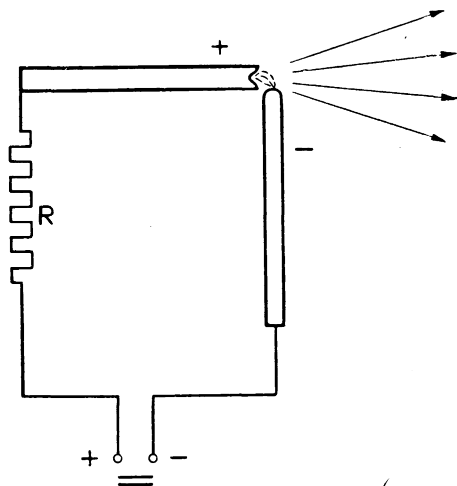


Rys. 22.2. Wyrzutnia elektronowa

W rozmaitych urządzeniach i przyrządach dzisiejszych, aby otrzymać swobodne elektrony używa się drucika, wstążki albo walca z trudno topliwego metalu, które rozżarza się za pomocą prądu elektrycznego. Emitowane elektrony rozpędza

się następnie za pomocą napięcia przyłożonego między elektrodą rozżarzoną i drugą, służącą za anodę. Przez otwór w niej zrobiony można wypuścić strumień rozpędzonych elektronów do przestrzeni, w której są nam potrzebne. Takie urządzenie nazywają wyrzutnią elektronową (rys. 22.2).

22.2. Łuk elektryczny. Gdy dwa pręty węglowe połączone przez opór *R* z jakimś źródłem dostatecznie wysokiego napięcia stałego (110 albo 220 V) zetkniemy ze sobą, a następnie rozsuniemy (rys. 22.3), to mimo to prąd w obwodzie się nie przerwie, lecz płynąć będzie w dalszym ciągu. Jednocześnie między węglami powstaje tzw. łuk elektryczny, smuga stosunkowo słabo świecącego gazu. Końce węgla natomiast rozżarzają się do białości, wydając oślepiające światło. W szczególności świeci koniec węgla dodatniego, w którym w krótkim czasie tworzy się zagłębienie zwane kraterem. Temperatura dochodzi w nim do 4000°C. Koniec węgla ujemnego, znacznie słabiej świecący, pozostaje stale spiczasto zakończony. Podczas palenia się łuku napięcie między końcami węgli wynosi 35 do 40 V. Toteż w obwodzie musi się stale znajdować opór *R*, na którym wytwarza się odpowiedni spadek napięcia. Prąd płynący przez łuk może wynosić od kilku do kilkudziesięciu i więcej amperów.



Rys. 22.3. Łuk elektryczny

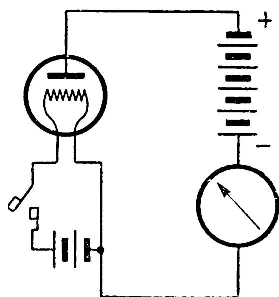
Łuk elektryczny jest odmianą samoistnego wyładowania w gazie. Prąd przechodzi przez gaz jonizowany stale bardzo silnie przez obfity strumień elektronów wyrzucanych przez rozżarzoną katodę. Elektrony bombardują bardzo silnie krater węgla dodatniego wywołując w nim tak wysoką temperaturę.

Łuk elektryczny ma wiele zastosowań. W lampie łukowej węglowej wykorzystuje się światło wysyłane przez rozżarzony krater dodatniego węgla. Łuk można wytworzyć też w parze rtęci. Światło łuku rtęciowego wytwarzanego w rurce kwarcowej jest obfitym źródłem promieni nadfioletowych. Lampy, w których wytwarza się łuk płonący w parze sodu pod dużym ciśnieniem, używane są do oświetlenia ulic. Charakteryzują się one wysoką wydajnością światła.

Łuk wielkiej mocy używany jest w piecach hutniczych do topienia żelaza. Używa się wreszcie łuku do spawania metali.

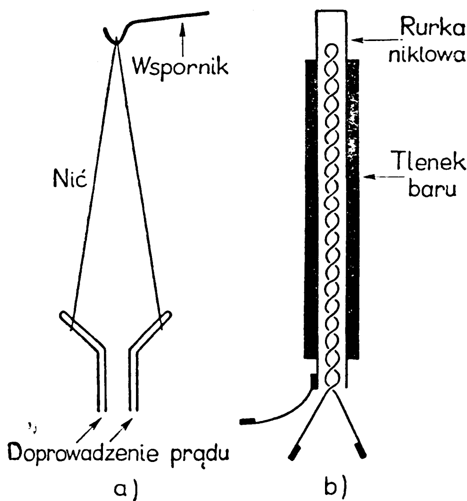
22.3. Lampy elektronowe. Lamy elektronowe, których wynalazek przypada na początek dwudziestego wieku, wywołały prawdziwy przewrót w wielu działach techniki. Mają obecnie nadzwyczaj szerokie zastosowanie w nauce. Są używane w najrozmaitszych odmianach.

Umieśćmy w bańce szklanej drucik z wtopionemi odprowadzeniami na zewnątrz, tak jak w żarówce. Umieśćmy prócz tego drugą elektrodę i wypompujmy bardzo starannie bańkę. W bańce ciśnienie resztek gazu powinno być mniejsze od 10^{-5} Tr. Jeżeli między elektrody włączymy baterię i miliamperomierz (rys. 22.4), to przekonamy się natychmiast, że prąd w obwodzie nie płynie. Próżnia jest bardzo dobrym izolatorem i prądu nie przewodzi. Jeżeli jednak przez drucik przepuścimy prąd wystarczający, aby drucik się rozżarzył, stwierdzimy przepływ prądu przez bańkę, którego natężenie zależy od napięcia między elektrodami. Prąd zaczyna płynąć przez próżnię dzięki emisji elektronów z rozżarzonego drucika. Lampy wykorzystujące ten prąd nazywamy lampami elektronowymi. Rozmaite są obecnie używane rodzaje lamp elektronowych. Różnią się one często konstrukcją i liczbą elektrod, lecz pewne szczegóły ich budowy i działania są im wszystkim wspólne. Zajmiemy się przede wszystkim tymi wspólnymi szczegółami budowy.



Rys. 22.4. Między zimnymi elektrodami w próżni prąd nie płynie. Natomiast zaczyna płynąć po rozżarzeniu jednej elektrodv

K a t o d a. W każdej lampie elektronowej znajduje się elektroda służąca za źródło swobodnych elektronów, będąca zatem katodą. Pod wpływem wysokiej temperatury elektrony emitowane są z jej powierzchni. W większości dzisiejszych lamp metalowa katoda, zrobiona najczęściej z niklu lub stopu niklowego, pokryta jest mieszaniną tlenków baru i strontu (w które zamieniają się przy odpompowywaniu lampy i nagrzewaniu węglany baru i strontu, którymi z domieszką środka wiążącego pokrywa się katodę). Drogą rozmaitych zabiegów, tzw. aktywacji, wywołuje się częściowe wydzielenie się jonów metalicznego baru z tlenku. Taka aktywowana tlenkowa katoda ma pracę wyjścia jeszcze mniejszą od baru metalicznego, może dawać stosunkowo bardzo wielkie prądy emisyjne i pracować przy niskich temperaturach nagrzewania.

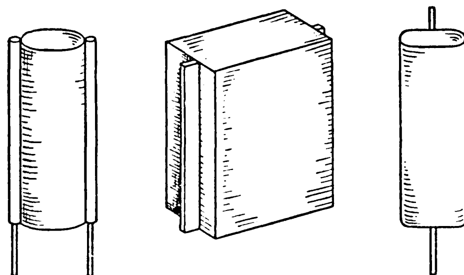


Rys. 22.5. a. Katoda bezpośrednio żarzona, b. Katoda pośrednio żarzona

Katoda bywa albo bezpośrednio, albo pośrednio żarzona. Katoda bezpośrednio żarzona jest to drucik lub wstążeczka niklowa pokryta warstwą emitującą. Od-

powiednio umieszczone sprężynki napinają drucik, który dzięki temu, mimo iż się rozszerza przy ogrzaniu, jest stale prosty i nie może się zetknąć z bliskimi elektrodami (rys. 22.5a).

Katoda pośrednio żarzona zbudowana jest w sposób odmienny. Zawiera ona w środku spiralę z drutu wolframowego pokrytą warstewką tlenku glinowego dla izolacji. Na to jest nasunięta rureczka z niklu lub stopu niklowego pokryta warstewką tlenków baru i strontu (rys. 22.5b). Spirala wolframowa rozżarzona prądem rozgrzewa do czerwonego żaru rurkę, która w ten sposób staje się źródłem elektronów. Katoda ogrzewana jest najczęściej prądem zmiennym o napięciu (skutecznym) 4 lub 6,3 wolta. Lecz używane są do tego celu również niższe lub wyższe napięcia.



Rys. 22.6. Anody lampy elektronowej

Katoda pośrednio żarzona ma tę zaletę, że jej powierzchnia jest powierzchnią ekwipotencjalną.

A n o d a. Druga elektroda pochłaniająca wysyłane przez katodę elektrony, zwana anodą, jest zwykle zrobiona z blachy żelaznej lub niklowej, czasami z siatki metalowej. Ma kształt cylindra, często formę spłaszczonej puszki (rys. 22.6). Otacza ona zwykle katodę. Ponieważ elektrony pod wpływem napięcia wytwarzanego między anodą i katodą bombardują anodę, wydziela się w niej dużo ciepła. Jego ilość jest proporcjonalna do liczby elektronów i do ich energii kinetycznej. Wskutek wywiązywania się znacznych ilości ciepła anoda rozgrzewa się silnie. Odprowadzanie z niej ciepła na zewnątrz odbywa się głównie przez promieniowanie. Aby chłodzenie było skuteczniejsze, często anodę się czerni. W wielkich lampach anoda jest najczęściej chłodzona wodą.

P r ó ż n i a. W lampach elektronowych musi być wytworzona jak najlepsza próżnia. Ciśnienie resztek gazu musi być mniejsze niż 10^{-6} mmHg. Toteż lampy odpompowuje się jak najstaranniej za pomocą pomp dyfuzyjnych. Ważną rzeczą jest, aby droga swobodna elektronów była znacznie większa niż odległość między elektrodami, tak aby prawdopodobieństwo spotkania się elektronów z drobinami gazu było bardzo małe. Podczas odpompowywania powietrza z bańki ogrzewa się elektrody metalowe, jak również bańkę szklaną w celu oswobodzenia gazów zaadsorbowanych na ich powierzchniach, ewentualnie zawartych w częściach metalowych. Ponieważ zupełnie usunąć ich nie podobna i podczas dłuższego funkcjonowania lampy te resztki gazów wydzielają się powoli, psując próżnię, do ich usuwania używany jest tzw. getter. Jest nim zwykle magnez lub bar metaliczny. Przed zamknięciem bańki umieszcza się wewnątrz niej małą pastylkę np. magnezu umieszczoną w małym metalowym trzymadełku. Po odpompowaniu

powietrza ogrzewa się pastylkę tę za pomocą prądów wirowych, wskutek czego magnez wyparowuje, a następnie osiada na ścianie szklanej bańki w postaci metalicznej zwierciadlanej warstewki. Warstewka taka chciwie pochłania gaz wydzielony gdziekolwiek i w ten sposób utrzymuje trwale dobrą próżnię.

Do wewnętrznej powierzchni bańki szklanej często przylepiają się elektrony w tym miejscu, gdzie ją trafią. Wywołuje to powstawanie potencjałów często dość wysokich na powierzchni bańki, co powoduje następnie zmiany torów elektronów. Aby temu zapobiec, pokrywają często wewnętrzną ścianę bańki przewodzącą warstewką węgla.

Aby usunąć wpływ zewnętrznych pól elektrycznych na elektrony, często pokrywa się bańki lampy warstewką metalową. Warstewkę tę następnie się uziemia lub też łączy z katodą.

22.4. Dioda i lampa prostownicza. Dioda oraz lampa prostownicza, które różnią się właściwie tylko celem, do którego się je przeznacza, zawierają dwie elektrody: drucik wysyłający elektrony zwany katodą oraz płytkę chwytającą wysyłane przez katodę elektrony, zwaną anodą. Jeżeli rozżarzymy katodę za pomocą prądu i wytworzymy napięcie między anodą i katodą za pomocą baterii lub innego źródła napięcia, wówczas elektrony biegną w powstałym polu elektrycznym przebiegając przestrzeń między anodą i katodą w znikomo krótkim czasie. Przez lampę płynie prąd, który zgodnie z ogólnie przyjętą umową płynie przeciwnie do kierunku ruchu elektronów, tzn. od anody do katody. Natężenie tego prądu zależy od napięcia. Wytłumaczenie tego faktu jest następujące: ponieważ rozżarzona katoda wysyła elektrony, więc stale pewna ich ilość znajduje się w otoczeniu katody tworząc ładunek przestrzenny. W przestrzeni otaczającej katodę powstaje natężenie pola skierowane od drucika na zewnątrz, które hamuje ruch elektronów. Zwalnianie elektronów powiększa ładunek przestrzenny i jeszcze silniej zwalnia wybiegające elektrony. W rezultacie może się wytworzyć w sąsiedztwie drucika ujemny potencjał względem katody. Część elektronów wraca wskutek tego z powrotem do katody.

Dodatni potencjał anody w miarę wzrastania powoduje wzrost natężenia pola, wskutek czego coraz większa liczba elektronów emitowanych dostaje się w jednostce czasu do anody, a więc natężenie prądu wzrasta. Można teoretycznie wyprowadzić, że przy niskim potencjale anody, gdy część zaledwie emitowanych elektronów dostaje się do anody, natężenie prądu płynącego przez lampę jest proporcjonalne do

$$U^{3/2},$$

gdzie U oznacza potencjał anody względem katody. Jednakże, gdy potencjał anody jest dostatecznie wysoki na to, aby wszystkie elektrony wysyłane przez katodę w jednostce czasu dobiegały do anody, natężenie prądu dalej już nie wzrasta. Będzie to prąd nasycenia.

Według wzoru Richardsona — Dushmanna prąd nasycenia

$$i = AST^2 e^{-11600 \frac{W}{T}}, \qquad (22.1)$$

gdzie S oznacza pole powierzchni katody, e — zasadę logarytmów naturalnych, W — pracę wyjścia. Wartość stałej A waha się w granicach mniej więcej od 60 do 100. Dla wolframu podają jej wartość 100, molibdenu — 65, toru — 70 A cm^{-2} stop^{-2}. Prąd nasycenia katody wolframowej przy normalnie używanej temperaturze żarzenia 2400°K wynosi około 0,4 A/cm^2.

Katody tlenkowe nie dają wyraźnego prądu nasycenia. Liczby podawane na stałą A dla katod tlenkowych znacznie się różnią. Zawarte są w granicach od $2 \cdot 10^{-3}$ do $1 \cdot 10^{-1}$ A cm^{-2} stop^{-2} przy $W \approx$ od 1 do 1,8 V. Im wyższa temperatura katody, tym silniejszy prąd nasycenia. Krzywa przedstawiająca zależność prądu od potencjału anody nazywa się charakterystyką lampy (rys. 22.7). W dolnej części mamy zależność

$$i = kU^{3/2}. \qquad (22.2)$$

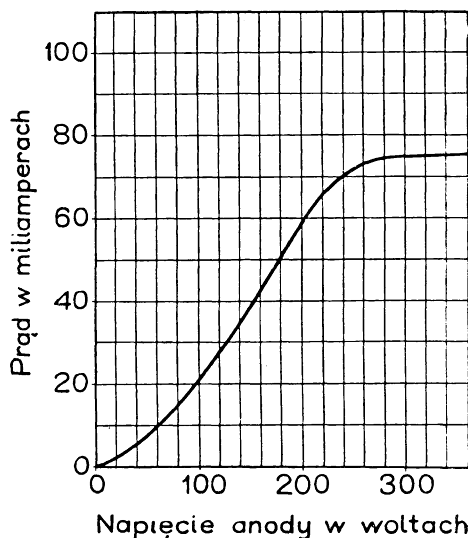
Współczynnik proporcjonalności k zależy od powierzchni katody i od odległości elektrod.

Wartość pochodnej

$$S = \frac{di}{dU} \qquad (22.3)$$

nazywamy nachyleniem charakterystyki. Zwykle wyrażamy je w mA/V. Jak łatwo stwierdzić, różniczkując wartość na i

$$S = \frac{3}{2} k \sqrt{U}.$$

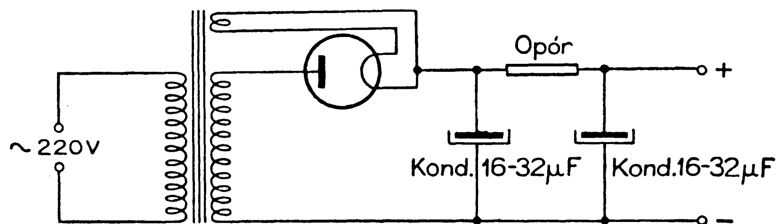


Rys. 22.7. Charakterystyka diody

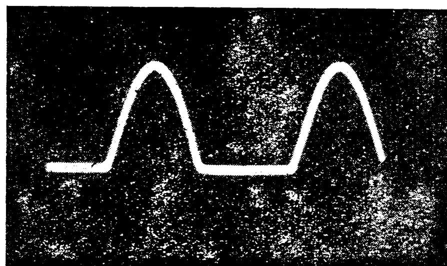
Oczywiście nachylenie charakterystyki jest równe tangensowi kąta, jaki tworzy styczna do charakterystyki z osią odciętych. Przy niskich potencjałach nachylenie charakterystyki szybko się zmienia, przy wysokich potencjałach (poniżej prądu nasycenia) zmienia się nieznacznie, krzywa się zbliża do linii prostej.

Tak diody, jak i lampy prostownicze używane są do tzw. prostowania prądu zmiennego. Ponieważ elektrony są wysyłane tylko przez rozżarzoną katodę, a zimna anoda wysyłać ich nie może, lampa taka przewodzi tylko wtedy, gdy anoda ma dodatni potencjał względem katody. Jeżeli katoda ma potencjał wyższy od anody, prąd przez lampę nie płynie. Lampa taka działa jak wentyl, prze-

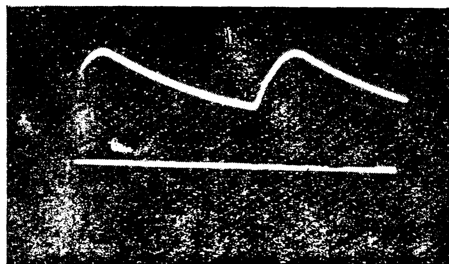
puszcza prąd tylko w jedną stronę. Lamp prostowniczych używa się właśnie w celu otrzymania za pomocą prądu zmiennego czerpanego z sieci oświetleniowej prądu stałego potrzebnego do rozmaitych celów. Rysunek 22. 8 przedstawia układ z tzw. jednokierunkowym prostowaniem, kiedy prąd przepływa przez



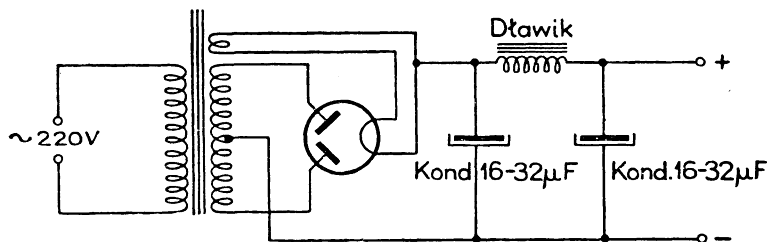
Rys. 22.8. Prostownik o jednokierunkowym prostowaniu



Rys. 22.9. Prąd w obwodzie przy jednokierunkowym prostowaniu



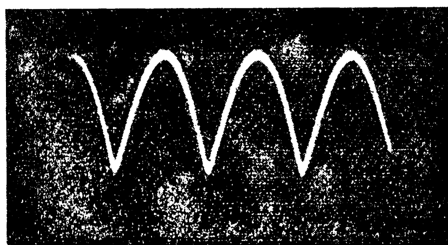
Rys. 22.10. Wyrównujące działanie kondensatora (niezupełne, kondensator jest zbyt małej pojemności, dobrany umyślnie, aby było widoczne jego działanie. Przy dużej jego pojemności otrzymuje się prawie prostą linię)



Rys. 22.11. Prostownik o dwukierunkowym prostowaniu

lampę tylko podczas połowy okresu, podczas drugiej połowy prąd płynąć przez lampę nie może (rys. 22.9). Za pomocą kondensatorów o dużej pojemności i włączonego między nie oporu względnie dławika zmniejsza się wahania napięcia

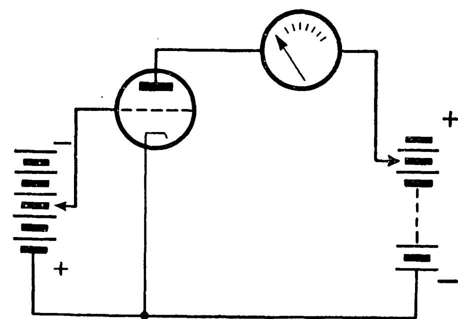
otrzymywanego jednokierunkowego prądu (rys. 22.10). Jednak wahania przy tym sposobie prostowania są dość znaczne. Można go używać wtedy, gdy potrzebny jest prąd o bardzo małym natężeniu. Znacznie korzystniejsze jest tzw. dwukierunkowe prostowanie przedstawione na rys. 22.11. Do tego potrzebna jest lampa prostownicza o dwóch anodach. Wtedy podczas jednej połowy okresu prądu zmiennego prąd płynie od jednej anody do katody, podczas drugiej połowy — od drugiej anody do katody (rys. 22.12). Wyrównujące kondensatory z dławikiem lub oporem między nimi zmiejszają wahania napięcia, które w takim układzie są bardzo małe.



Rys. 22.12. Prąd w obwodzie przy dwukierunkowym prostowaniu

22.5. Trioda. Trioda, czyli lampa o trzech elektrodach, różni się od diody tym, że między katodą i anodą znajduje się trzecia elektroda zwana siatką. Jest to najczęściej spirala zrobiona z jakiegoś drutu trudno topliwego. Odległość między katodą i siatką jest często bardzo mała. Aby siatka bardzo się nie rozgrzewała wskutek bombardowania elektronów, osadza się ją często na pręcikach z metali dobrze odprowadzających ciepło, np. miedzianych.

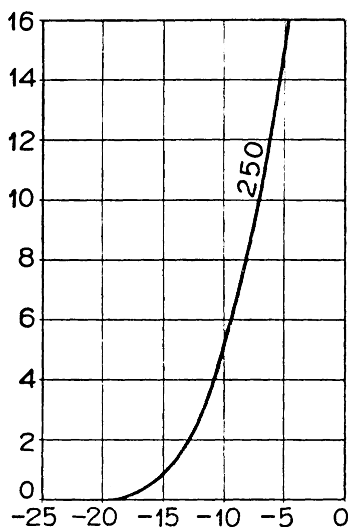
Natężenie prądu płynącego od anody do katody zależy tu od potencjału anody i potencjału siatki względem katody. Ponieważ siatka znajduje się znacznie bliżej katody niż anoda, zatem na natężenie pola w przestrzeni między siatką i katodą siatka ma większy wpływ niż anoda. Rozpędzane przez pole elektrony przelatują między skrętami siatki i dostają się do anody. Bardzo nieznaczna tylko ich część trafia w druciki siatki.



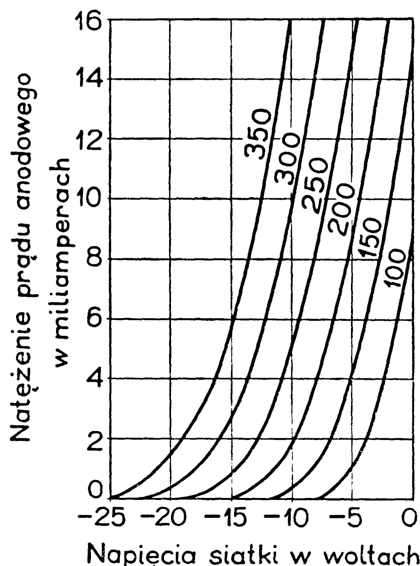
Rys. 22.13. Połączenie do zdjęcia charakterystyki triody

Zwykle, aby przedstawić zależność prądu anodowego od napięcia siatki, robi się wykres, odkładając na osi odciętych potencjał siatki w woltach, na osi rzędnych zaś w miliamperach natężenie prądu anodowego płynącego przy stałym potencjale anody. Otrzymana w ten sposób krzywa nazywa się statyczną charakterystyką triody. Rysunek 22.13 przedstawia połączenie, jakiego się zwykle używa w celu zdjęcia statycznej charakterystyki triody. Krzywa na rys. 22.14 przedstawia taką charakterystykę. Widać z niej, że przy odpowiednio niskim potencjale siatki prąd anodowy przestaje płynąć i lampa, jak często się wyrażają w laboratoriach, jest zablokowana lub zatkana. Przy wyższym potencjale anody

otrzymuje się zupełnie podobną krzywą, tylko przesuniętą więcej w lewo. Rysunek 22.15 przedstawia całą rodzinę charakterystyk odpowiadających rozmaitym potencjałom anody.



Rys. 22.14. Charakterystyka statyczna triody



Rys. 22.15. Rodzina charakterystyk triody

Prąd anodowy i_a w triodzie jest zatem funkcją dwóch zmiennych: potencjału siatki U_s i potencjału anody U_a (liczonych względem katody):

$$i_a = f(U_s, U_a). \tag{22.4}$$

A więc różniczka zupełna

$$di_a = \frac{\partial i_a}{\partial U_s} dU_s + \frac{\partial i_a}{\partial U_a} dU_a. \tag{22.5}$$

$\frac{\partial i_a}{\partial U_s} = S$ nazywamy nachyleniem charakterystyki. Zwykle wyraża się je w mA/V. Zaś

$$\frac{\partial i_a}{\partial U_a} = \frac{1}{R_i}, \quad \text{skąd} \quad R_i = \frac{\partial U_a}{\partial i_a}. \tag{22.6}$$

Tę wielkość nazywamy oporem wewnętrznym lampy. Wyrażamy go — jak zwykły opór — w omach.

Opór wewnętrzny lampy jest wielkością zmienną i w ogólności nie równa się stosunkowi napięcia między anodą i katodą do natężenia prądu anodowego.

Możemy zatem napisać

$$di_a = S\, dU_s + \frac{dU_a}{R_i}. \tag{22.7}$$

Gdy zmienimy potencjał siatki, to można zawsze odpowiednio tak zmienić potencjał anody, aby natężenie prądu anodowego nie uległo zmianie, tzn. aby

$$i_a = \text{const}.$$

W tym przypadku

$$di_a = 0,$$

a więc z równania (22.7) otrzymamy

$$S\,dU_s + \frac{dU_a}{R_i} = 0. \tag{22.8}$$

Stąd zaś otrzymamy

$$\left(\frac{dU_a}{dU_s}\right)_{i_a=\text{const}} = -R_i S. \tag{22.9}$$

Iloczyn $R_i S$ oznaczają zwykle literą μ:

$$R_i S = \mu. \tag{22.10}$$

Nazywa się ta wielkość współczynnikiem wzmocnienia lampy. Jest to liczba wskazująca, ile razy większa musi być zmiana napięcia anodowego od zmiany napięcia siatki, aby wywołać jednakową zmianę prądu anodowego. W triodach współczynnik wzmocnienia wynosi $10 \div 30$. Wartość współczynnika wzmocnienia zależy głównie od odległości siatki od katody. Zależy również od gęstości skrętów spirali i od grubości drutu, z którego jest ona zrobiona.

Odwrotność współczynnika wzmocnienia nazywa się przechwytem i oznacza zwykle literą D:

$$D = \frac{1}{\mu}. \tag{22.11}$$

Przechwyt często wyrażają w procentach:

$$D\% = \frac{1}{\mu} \cdot 100.$$

A więc, gdy np. $\mu = 20$, to $D = 5\%$.

Z równania (22.10) wynika:

$$DSR_i = 1, \qquad SR_i = \frac{1}{D}. \tag{22.12}$$

Wprowadzając D do równania (22.7) otrzymujemy

$$di_a = S\,(dU_s + D\,dU_a). \tag{22.13}$$

Widać jasno z tego wzoru, że na zmianę natężenia prądu anodowego głównie wpływa napięcie siatki, gdyż D jest zawsze znacznie mniejsze od jedności.

Dla prądu mniejszego od prądu nasycenia według Langmuira (czyt. Langmjo) istnieje następująca zależność od napięć anody i siatki:

$$i_a = c\,(U_s + DU_a)^{3/2}. \tag{22.14}$$

Współczynnik c zależy od właściwości katody oraz od geometrycznych stosunków katody i anody. Dla katod tlenkowych możemy napisać następujące wzory: dla katody i anody cylindrycznej

$$c = 2{,}33 \cdot 10^{-6} \frac{S}{d^2} \frac{r_a}{r_k}, \tag{22.15}$$

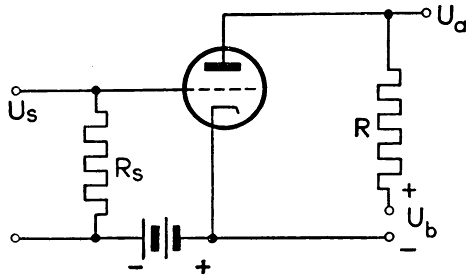
gdzie S jest polem powierzchni katody, d — odległością między katodą i anodą, r_a — promieniem przekroju cylindrycznej anody, r_k — promieniem przekroju katody.

Dla płaskiego układu elektrod

$$c = 2{,}33 \cdot 10^{-6} \frac{S}{d^2}. \tag{22.16}$$

Triody używa się do tzw. wzmocnienia napięć stałych lub zmiennych. Opiszemy tu najprostszy i najczęściej używany typ wzmacniacza oporowego.

Przypuśćmy, że na końcówkach A i B jakiegoś obwodu zmiany napięcia są tak małe, że nie możemy ich zmierzyć za pomocą posiadanych przyrządów. Wtedy łączymy je z katodą i siatką sterującą triody (rys. 22.16). W obwód anodowy włączamy opór R znacznie większy od oporu wewnętrznego lampy R_i, rzędu zwykle 10^5 omów. Przy wzroście potencjału, przypuśćmy punktu B, zmienia się potencjał siatki o dU_s.



Rys. 22.16. Jednolampowy wzmacniacz oporowy

Jeżeli wzrost ten jest dodatni, to również wzrasta i prąd anodowy. Potencjał anody dany jest przez równanie

$$U_a = U_b - i_a R, \tag{22.17}$$

gdzie U_a jest potencjałem anody, U_b — stałym potencjałem baterii (może to być oczywiście napięcie stałe z prostownika), zaś $i_a R$ — spadkiem potencjału na oporze R. Ponieważ prąd i_a wzrasta, potencjał anody musi się obniżyć. Zmiana potencjału będzie dana przez równanie

$$dU_a = -R\,di_a, \quad \text{skąd} \quad di_a = -\frac{dU_a}{R}.$$

Podstawiając tę wartość na di_a oraz $S = \frac{\mu}{R_i}$ do równania (22.7) otrzymamy

$$-\frac{dU_a}{R} = \frac{dU_a + \mu\,dU_s}{R_i},$$

skąd

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_i}\right) dU_a = -\frac{\mu}{R_i} dU_s, \tag{22.18}$$

a więc

$$dU_a = \frac{-\frac{\mu}{R_i}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_i}} dU_s. \tag{22.19}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez R_i otrzymamy

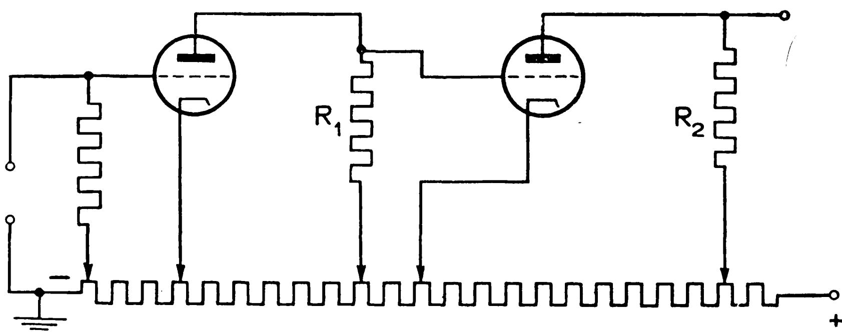
$$dU_a = -\frac{\mu}{1 + \frac{R_i}{R}} dU_s. \tag{22.20}$$

Jeżeli opór R włączony w obwód anodowy będzie dużo większy od oporu wewnętrznego lampy R_i, możemy wtedy stosunek $\frac{R_i}{R}$ pominąć wobec jedności i otrzymamy wzór przybliżony

$$dU_a \approx -\mu\, dU_s \tag{22.21}$$

wykazujący, że zmiana potencjału anody jest μ razy większa od zmiany potencjału siatki. Należy tu zwrócić uwagę na znak minus stojący po prawej stronie równania (22.21). Oznacza to, że przyrost dodatni potencjału siatki wywołuje przyrost ujemny, czyli zmniejszenie się potencjału anody i odwrotnie.

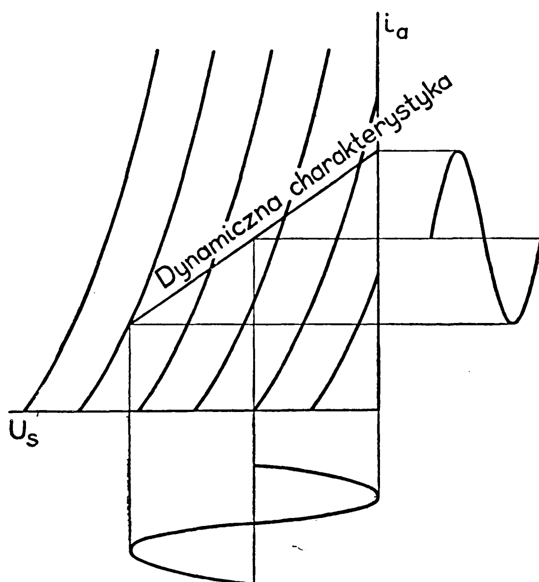
Łącząc anodę z siatką drugiej lampy wzmacniającej można znowu powiększyć μ razy zmiany potencjału anody pierwszej lampy i otrzymać w ten sposób wzmocnienie μ^2-krotne. Jeżeli więc współczynnik wzmocnienia lampy jest np. 30, to



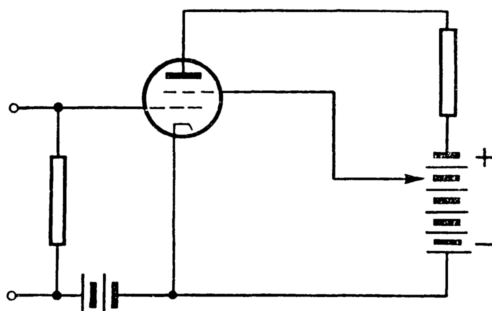
Rys. 22.17. Dwulampowy wzmacniacz oporowy

za pomocą 2 lamp możemy uzyskać wzmocnienie wynoszące 900. Rysunek 22.17 przedstawia taki wzmacniacz napięć. Trzeba tu na potencjometrze dobrać tak potencjały siatki i katody drugiej lampy, aby siatka miała odpowiedni potencjał ujemny względem katody.

22.6. Charakterystyka dynamiczna. Tetroda, pentoda. Układy wzmacniające. Jeżeli w obwodzie anodowym triody znajduje się opór, jak np. we wzmacniaczu oporowym, wówczas przy zmianie potencjału siatki zmienia się jednocześnie potencjał anody. Punkt pracy triody przechodzi zatem od jednej charakterystyki do drugiej. Jak to można stwierdzić z wykresu na rys. 22.18, wzmocnienie jest wskutek tego mniejsze, niż to by wynikało z charakterystyki statycznej. Wykres natężenia prądu w zależności od napięcia siatki sterującej w przypadku, gdy w obwodzie anody znajduje się opór omowy czy też indukcyjny, nazywa się charakterystyką dynamiczną. Nachylenie jej jest znacznie mniejsze niż charakterystyki statycznej. Jest to dużą wadą triody. Lecz ma ona jeszcze inną wadę: dwie elektrody, mianowicie siatka i anoda, stanowią kondensator cylindryczny o pojemności dochodzącej w zwykłych lampach do kilku pF. Przy wzmacnianiu prądów zmiennych jest to nader niepożądana właściwość, gdyż część prądu zmiennego płynie przez pojemność, której opór jest tym mniejszy, im większa jest częstość prądu, co osłabia wzmocnienie. Przy dużych częstościach prądu zmiennego pojemność ta może spowodować samodzielne wytwarzanie przez wzmacniacz prądów zmiennych, tzw. samowzbudzenie, wskutek czego wzmacniacz staje się niezdatny do użytku. Aby te dwie wady usunąć, ulepszono triodę w ten sposób, że dodano do niej czwartą elektrodę, tzw. siatkę osłonną umieszczoną między siatką sterującą i anodą. Lampę taką nazywają tetrodą.



Rys. 22.18. Charakterystyka dynamiczna triody



Rys. 22.19. Połączenia tetrody

Siatkę osłonną łączy się ze stałym potencjałem, zwykle wynoszącym mniej więcej połowę potencjału anody (rys. 22.19). Ponieważ siatka ta jest bardziej zbliżona do katody niż anoda, pole wytworzone między nią i katodą wywiera

większy wpływ na prąd anodowy niż pole między anodą i katodą. Natężenie prądu anodowego w stosunkowo nieznacznym stopniu zależy od potencjału anody. Zatem może się w obwodzie anodowym znajdować opór wywołujący znaczne zmiany potencjału anody przy zmianach potencjału siatki sterującej, a mimo to wzmocnienie będzie prawie takie, jak gdyby anoda miała stały potencjał. Można więc osiągnąć znacznie większe wzmocnienie niż za pomocą triody. Drugą zaletą tetrody jest to, że ponieważ między anodą a siatką sterującą znajduje się siatka utrzymywana na stałym potencjale, zmiany potencjału anody nie wywołują zmian potencjału siatki sterującej. Można powiedzieć, że wskutek osłonięcia siatki sterującej siatką osłonną o stałym potencjale pojemność anoda — siatka sterująca została silnie zmniejszona.

Jednakże tetroda ma jedną poważną wadę łączącą się ze zjawiskiem wyzwalania z anody wtórnych elektronów. Mianowicie przy dostatecznie silnym polu rozpędzone elektrony uderzając o metal wybijają z niego elektrony w ilości przewyższającej często kilkakrotnie ilość pierwotnych elektronów. Jeżeli w obwodzie anody znajduje się duży opór to, jak już o tym mówiliśmy poprzednio, gdy prąd anodowy wzrasta, potencjał anody obniża się i może się stać znacznie niższy niż potencjał siatki osłonnej. W takich przedziałach czasu siły pola będą powodować bieg elektronów wtórnych od anody do siatki osłonnej. Prąd w obwodzie anodowym może się odwrócić. Psułoby to całkowicie prawidłowość wzmocnienia. Toteż lampy te prawie całkowicie wyszły z użycia, zostały zastąpione przez pentody, w których opisana wyżej wada została usunięta. W pentodzie znajduje się jeszcze jedna siatka, umieszczona między drugą siatką i anodą, zazwyczaj połączona z katodą, a więc mająca bardzo niski potencjał. Między anodą i tą siatką zostaje wytworzone silne pole skierowane od anody do siatki. Elektrony doznają w niej działania sił skierowanych ku anodzie. Wskutek tego elektrony wyzwolone z anody wracają do niej z powrotem i prąd się nie odwraca, nawet w okresach, gdy potenciał anody staje się bardzo niski.

Dla pentody analogicznie do wzoru (22.13) dla triody możemy napisać

$$di_a = S(dU_{s1} + D\,dU_{s2} + D_1\,dU_a), \tag{22.22}$$

gdzie D_1 jest bardzo małe, tak że trzeci wyraz w nawiasie możemy często zaniedbać wobec dwóch pierwszych.

Wtedy

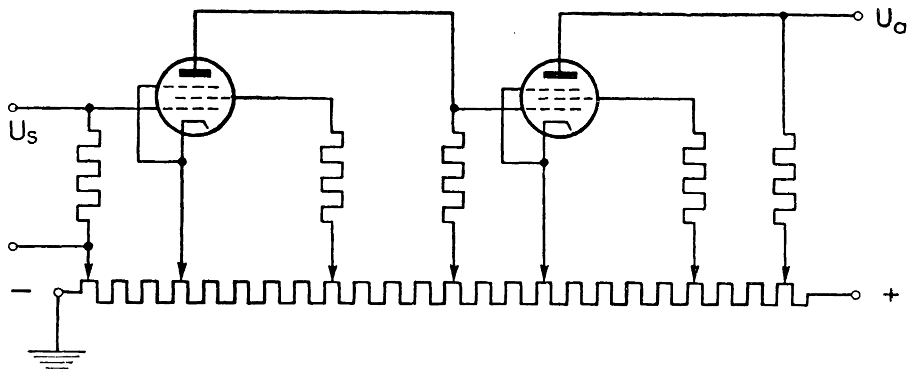
$$di_a = S(dU_{s1} + D\,dU_{s2}). \tag{22.23}$$

W wielu wypadkach napięcie siatki s_2 jest stałe. Wtedy $dU_{s2} = 0$. W tym przypadku

$$di_a = S\,dU_s. \tag{22.24}$$

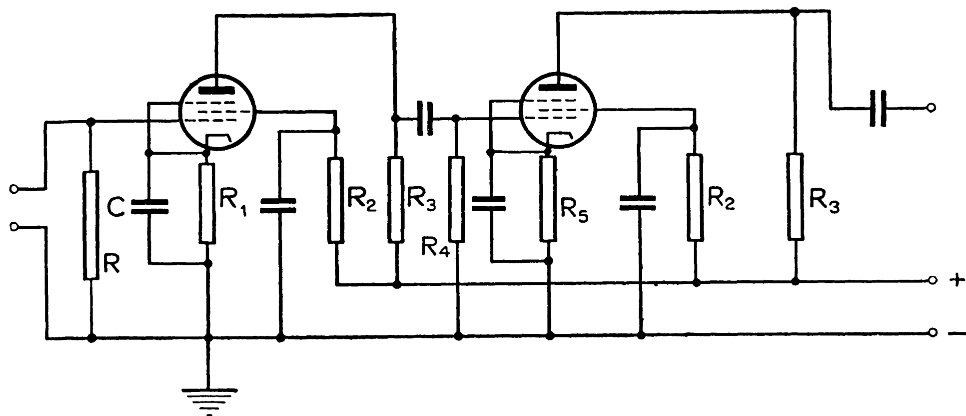
Współczynnik wzmocnienia w pentodach bywa często bardzo duży, rzędu tysiąca.

Rysunek 22.20 przedstawia wzmacniacz napięć stałych i zmiennych o dwóch pentodach, wzmacniający bardzo silnie. Na rysunku 22. 21 znajduje się schemat wzmacniacza napięć zmiennych średniej i wysokiej częstotliwości. W tym ostatnim wzmacniaczu zastosowane jest tzw. automatyczne ujemne napięcie siatki



Rys. 22.20. Wzmacniacz napięć stałych o dwóch pentodach

sterującej. Uzyskuje się je przez włączenie między katodę i ujemny biegun zasilacza (źródła napięcia), który jest zwykle uziemniony, względnie połączony z masą pudła montażowego, oporu R_1 z równoległym kondensatorem C, tak dobranego, aby spadek napięcia na tym oporze, przez który płynie całkowity

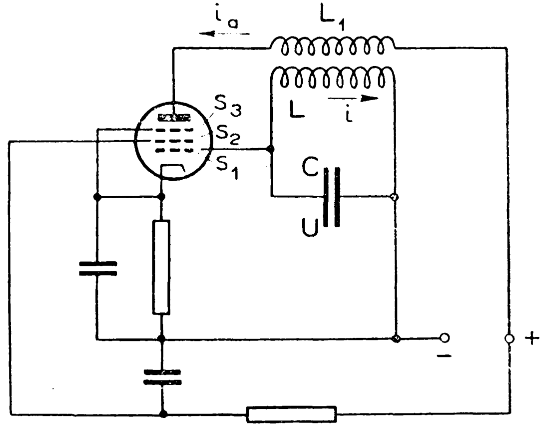


Rys. 22.21. Wzmacniacz napięc zmiennych

prąd anodowy, równał się potrzebnemu napięciu siatki. Siatkę natomiast łączy się z potencjałem 0 (a więc z ziemią lub masą). W ten sposób katoda uzyskuje dodatni potencjał względem siatki, albo odwrotnie — siatka ujemny potencjał względem katody. Kondensator C dostatecznie dużej pojemności (tym większy, im mniejsza jest częstość wzmacnianego napięcia) służy do utrzymania stałego

potencjału katody, który w przeciwnym razie zmieniałby się z częstością prądu anodowego. Opór siatkowy R utrzymuje siatkę sterującą na potencjale zerowym.

22.7. Wytwarzanie drgań elektrycznych za pomocą lampy elektronowej. Układ lampowy wytwarzający drgania elektryczne jest właściwie wzmacniaczem, w którym zmienne napięcie siatki wywołuje w obwodzie anodowym prąd o zmiennym natężeniu działający wstecz na obwód siatki. Prąd anodowy można uważać za sumę prądu stałego i zmiennego. Zmienna składowa będzie miała tę samą częstość co napięcie w obwodzie siatki. Przez sprzężenie, np. indukcyjne obwodu anodowego z obwodem siatki, tzw. sprzężenie zwrotne, zmienna składowa prądu anodowego wywołuje zmienną siłę elektromotoryczną w obwodzie siatki podtrzymując drgania w tym obwodzie. Rozpatrzymy układ przedstawiony na rys. 22.22. Znajdźmy warunek, aby w obwodzie siatki LC były wytwarzane drgania niezanikające. Przyjmiemy pewne upraszczające założenia, aby ułatwić rachunek. Ponieważ napięcie siatki osłonnej s_2 jest stałe, a potencjał anody w pentodzie niewiele wpływa na natężenie prądu anodowego, można przyjąć, że zmiany prądu anodowego i_a wyłącznie zależą od potencjału siatki sterującej. Przyjmiemy następnie, że prąd w obwodzie siatki nie płynie, zatem potencjał siatki U równa się potencjałowi lewej okładki kondensatora C. Wobec wielkiego oporu wewnętrznego lampy opór pozostałego obwodu oraz opór indukcyjny cewki L_1 można pominąć i napisać



Rys. 22.22. Wytwarzanie drgań elektrycznych za pomocą lampy elektronowej
L — cewka, C — kondensator, L_1 — cewka sprzęgająca obwód anodowy z obwodem siatki

$$di_a = S\,dU, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{di_a}{dt} = S\,\frac{dU}{dt}. \tag{22.25}$$

Dla uproszczenia rachunku założymy jeszcze, że nachylenie charakterystyki S jest stałe (charakterystyka prostoliniowa).

Niech w obwodzie LC płynie prąd i. Możemy napisać, że iloczyn oporu przez natężenie prądu równa się sumie działającej w tym obwodzie sił elektromotorycznych:

$$Ri = U - L\frac{di}{dt} \pm M\frac{di_a}{dt}, \tag{22.26}$$

gdzie M oznacza indukcyjność wzajemną cewek L i L_1. Znak przed tym wyrazem może być plus albo minus, zależnie od tego, jak ustawimy cewki jedną względem drugiej (przy obrocie jednej z cewek o 180° siła elektromotoryczna wzbudzana w cewce L zmienia kierunek na przeciwny). Podstawiając wartość (22.25) na $\frac{di_a}{dt}$ otrzymamy

$$Ri = U - L\frac{di}{dt} \pm MS\frac{dU}{dt}. \tag{22.27}$$

Różniczkując zaś to równanie otrzymamy

$$R\frac{di}{dt} = \frac{dU}{dt} - L\frac{d^2i}{dt^2} \pm MS\frac{d^2U}{dt^2}. \tag{22.28}$$

Prąd płynący w obwodzie LC jest związany z napięciem U między okładkami kondensatora C równaniem

$$i = -C\frac{dU}{dt}, \tag{22.29}$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{i}{C} \quad \text{oraz} \quad \frac{d^2U}{dt^2} = -\frac{1}{C}\frac{di}{dt}. \tag{22.30}$$

Podstawiając te wartości na $\frac{dU}{dt}$ i $\frac{d^2U}{dt^2}$ do równania (22.28) otrzymamy

$$R\frac{di}{dt} = -\frac{i}{C} - L\frac{d^2i}{dt^2} \pm \frac{MS}{C}\frac{di}{dt}. \tag{22.31}$$

Stąd po uporządkowaniu wyrazów i podzieleniu równania przez R otrzymamy

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} \pm \frac{MS}{LC}\right)\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0. \tag{22.32}$$

Jeżeli obrócimy cewkę L tak, aby przed wyrazem $\frac{MS}{LC}$ należało postawić znak minus, to dobierając wielkość sprzężenia, a więc indukcyjność wzajemną M tak, aby

$$\frac{R}{L} - \frac{MS}{LC} = 0, \tag{22.33}$$

otrzymamy na i równanie

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{LC}i = 0. \tag{22.34}$$

Oznaczając jeszcze $\frac{1}{LC} = \omega^2$ otrzymamy równanie

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \omega^2 i = 0. \tag{22.35}$$

Jest to zwykłe równanie drgań harmonicznych niezanikających o częstości

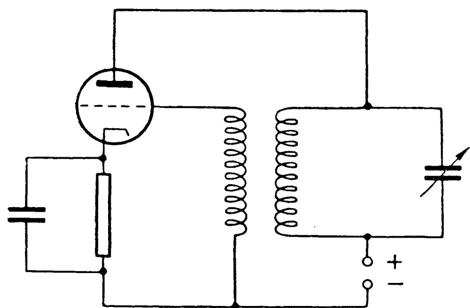
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \tag{22.36}$$

a więc określonej przez wielkość pojemności C i indukcyjności L na podstawie znanego wzoru Kelvina. Aby więc otrzymać drgania niezanikające, musi być spełnione równanie (22.33), czyli trzeba tak dobrać wartość indukcyjności wzajemnej, aby

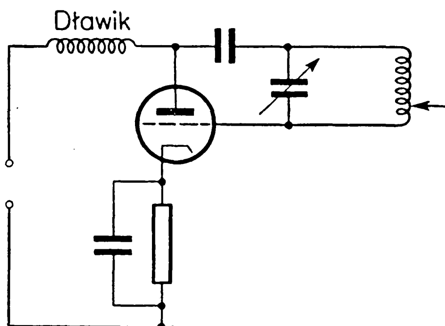
$$M = \frac{RC}{S}, \tag{22.37}$$

co łatwo zrobić przez odpowiednie zbliżenie cewek L i L_1.

Rysunki 22.23 i 22.24 przedstawiają często używane układy wytwarzające drgania elektryczne.



Rys. 22.23. Układ z obwodem drgającym w obwodzie anody

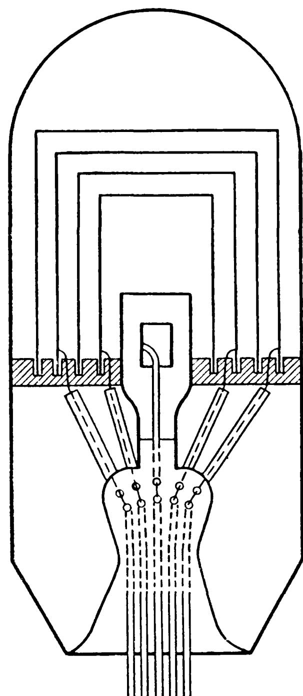


Rys. 22.24. Układ Hartleya

22.8. Lampy napełnione gazem. Różne rodzaje lamp napełnionych gazem używane są w technice laboratoryjnej. Zajmiemy się tu najczęściej stosowanymi odmianami.

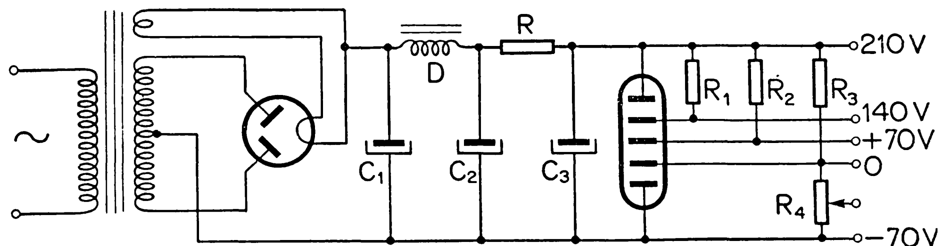
1. L a m p y z z i m n ą k a t o d ą. Najprostszym typem jest zwykła neonówka używana jako lampa sygnalizacyjna, kontrolna, stroboskopowa itp. Ma ona dwie żelazne elektrody. Elektrody w większych lampach mają formę dwóch spiral. Skręty jednej z nich wchodzą między skręty drugiej. Elektrody pokryte są barem, aby ułatwić jarzenie się lamp przy używanych w sieci oświetlenia dość niskich napięciach. Małe lampy mają elektrody zwykle w kształcie pierścieni. Lampy napełnione są najczęściej neonem pod ciśnieniem 10 do 30 Tr, dlatego nazywają je neonówkami. Przy włączeniu odpowiedniego napięcia następuje zapłon lampy, gaz zaczyna się jarzyć przy katodzie. Aby wyładowanie nie przeszło w łukowe, w obwód musi być włączony opór ograniczający natężenie płynącego przez lampę prądu. Najczęściej odpowiedni opór jest wbudowany w cokół lampy. O oporze w obwodzie prądu należy pamiętać, ponieważ wyładowanie łukowe niszczy lampę.

W pewnym zakresie zmiana natężenia prądu płynącego przez lampę powoduje bardzo małe zmiany napięcia na elektrodach. Lampa ma więc pewne własności stabilizujące. Lampa może być używana i na prąd zmienny.



Rys. 22.25. Konstrukcja stabiliwolta

Stabiliwolt. Ponieważ napięcie na elektrodach lampy przy wyładowaniu jarzeniowym, jest w pewnym zakresie napięcia niemal niezależne od natężenia prądu płynącego przez lampę, lampy jarzeniowe używane są do stabilizacji napięcia. Specjalnie do tego budowane lampy nazywają stabiliwoltami. Lampy takie najczęściej mają kilka elektrod, z których każda następna znajduje się wewnątrz poprzedniej (rys. 22.25). Dzięki odprowadzeniom od elektrod na zewnątrz można używać lampy do stabilizacji kilku rozmaitych napięć. Najwięcej u nas używane stabiliwolty mają cztery sekcje po 70 V. Budowane są na rozmaite natężenia prądu. Najczęściej się spotyka na 40 mA i 80 mA. Rysunek 22.26 wskazuje, jak należy włączać w obwód stabiliwolt. Należy włączyć taki opór w obwód, aby przez stabiliwolt szedł prąd o natężeniu równym dwum trzecim nominalnego. Może być zresztą i słabszy, byle nie był mniejszy od 5 mA, gdyż wtedy lampa łatwo gaśnie. Wahania napięcia na elektrodach stabiliwolta wynoszą około 1% (lub mniej) wahań napięcia dostarczanego przez zasilacz.



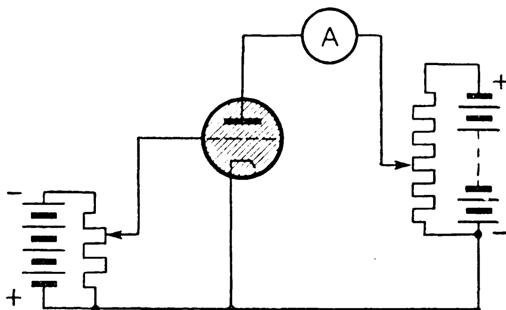
Rys. 22.26. Prostownik ustabilizowany za pomocą stabiliwolta

D — dławik, *R* — opór ograniczający prąd, $R_1 \mp R_2 \mp R_3$ = 100 000 omów, R_3 — potencjometr, C_1, C_2, C_3 — kondensatory elektrolityczne

2. **L a m p y z ż a r z o n ą k a t o d ą.** Opiszemy tylko jeden typ używany często w technice laboratoryjnej. Jest to tzw. trioda gazowana, nazywana również tyratronem. Ma ona katodę żarzoną i napełniona jest gazem pod niskim ciśnieniem, zwykle argonem lub helem. Budowa triody gazowanej jest podobna do zwykłej triody z tą różnicą, że tzw. siatka, środkowa elektroda znajdująca się

między katodą i anodą, jest zrobiona z blachy osłaniającej całkowicie katodę, z kilkoma tylko otworami.

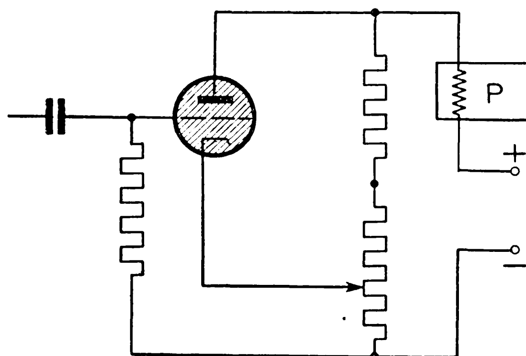
Lampa taka ma zupełnie odmienne własności od zwykłej triody. Zróbmy takie samo połączenie, jak dla badania charakterystyki zwykłej triody (rys. 22.27). Siatkę łączymy z ujemnym biegunem baterii siatkowej. Przy dostatecznie wysokim ujemnym napięciu siatki lampa w ogóle nie przewodzi prądu. Podwyższajmy stopniowo napięcie anodowe. Przy pewnym określonym napięciu anodowym, zależnym od napięcia siatki, następuje nagle zapłon lampy. Natężenie prądu skacze do znacznej wartości. Małe gazowane triody mogą przewodzić prądy wynoszące kilkaset miliamperów. Duże tyratrony nawet wiele amperów.



Rys. 22.27. Połączenie dla badania tyratronu

Po zapaleniu lampy siatka przestaje odgrywać jakąkolwiek rolę. Natężenie prądu przestaje zależeć od napięcia siatki. Aby przerwać prąd w lampie, trzeba bardzo znacznie obniżyć napięcie anodowe, ewentualnie całkowicie przerwać obwód anodowy.

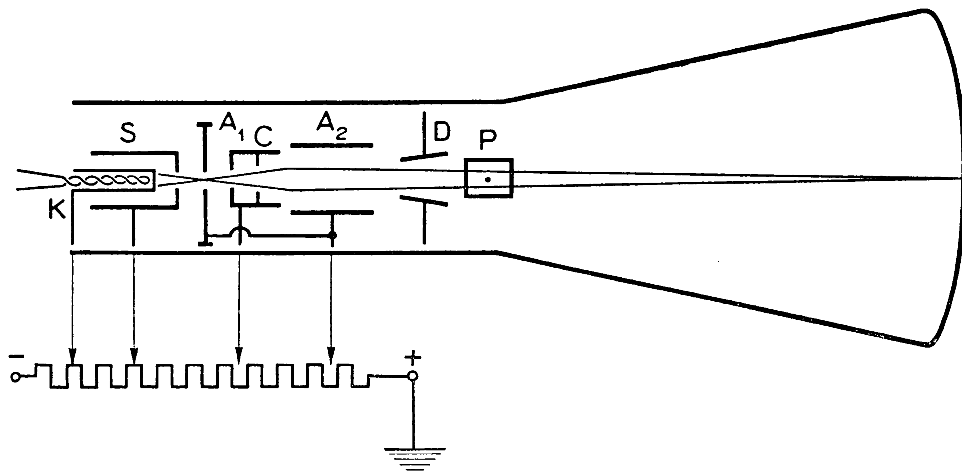
Zapalenie lampy można również spowodować odpowiednim zmniejszeniem ujemnego napięcia lampy. Wystarcza do tego bardzo krótki impuls dodatni na siatce. Dzięki temu lampa może działać jako przekaźnik krótkotrwałych impulsów. Impuls może np. uruchomić umieszczony w obwodzie anodowym przyrząd mechaniczny. Zwykle się tak robi, że sam ten przyrząd przerywa obwód anodowy i lampa gaśnie. Po zgaszeniu następuje szybka dejonizacja gazu, tak że po upływie 10^{-3} do 10^{-4} sec lampa znajduje się już w takim samym stanie, jak przed zapaleniem. Rysunek 22.28 podaje schemat takiego połączenia, w którym lampa gazowana działa jako przekaźnik odpowiadający na krótkotrwałe impulsy.



Rys. 22.28. Tyratron jako przekaźnik
P — przyrząd reagujący na prąd płynący po zapaleniu tyratronu

22.9. Oscylograf katodowy. Oscylograf katodowy jest obecnie niemal niezbędny w każdej pracowni naukowej przy badaniu wszelkich przebiegów szybkich, krótkotrwałych. Budowa jego jest następująca: rura szklana cylindryczna

połączona jest z drugą rurą rozszerzającą się stożkowo (rys. 22.29). Na początku cylindrycznej rury znajduje się katoda K, najczęściej tlenkowa, która emituje termoelektrony. Otacza ją mała puszka metalowa S utrzymywana na niewielkim potencjale ujemnym względem katody, zwana dawniej cylindrem Wehnelta.



Rys. 22.29. Oscylograf katodowy

K — katoda żarzona pośrednio, A_1 — anoda, A_1, C, A_2 — soczewki elektronowe, D, P — płytki odchylające

Nie pozwala ona elektronom rozpraszać się na boki, prócz tego zaś reguluje ilość elektronów wylatujących dzięki działaniu anody z chmury elektronów otaczających katodę i tworzących ładunek przestrzenny. Jest to więc funkcja podobna, jaką spełnia siatka w triodzie regulując prąd anody. Dlatego nazywają ją elektrodą sterującą albo wprost siatką. Rura jest dokładnie odpompowana. Umieszczona w niewielkiej odległości od katody anoda A_1 o wysokim potencjale dodatnim (rzędu 1000 woltów) powoduje wytworzenie pola elektrycznego rozpędzającego elektrony. Anoda ma w środku otwór kołowy, przez który elektrony przelatują na drugą stronę tworząc wiązkę, zwykle lekko rozbieżną. Układ elektrod kołowych lub cylindrycznych z odpowiednimi otworami w środku, tworzący, jak się zwykle mówi, układ soczewek elektronowych, koncentruje wiązkę elektronów, które ogniskują się na bardzo małej powierzchni, niemal w jednym punkcie na końcu rury stożkowej, której dno pokrywa się substancją fluoryzującą. W tym miejscu, gdzie elektrony uderzają o ekran, pojawia się jasno błyszcząca plamka.

Aby wyjaśnić sprawę tzw. optyki elektronowej, za pomocą której ogniskuje się elektrony, weźmiemy najpierw prosty przykład: przypuśćmy, że na drodze biegnących elektronów ustawimy dwie siatki (rys. 22.30) z cienkich drucików metalowych i wywołamy między nimi różnicę potencjałów $\Delta U = U_2 - U_1$. Między siatkami powstanie pole elektryczne o natężeniu E skierowane od potencjału wyższego do niższego, a więc od U_2 do U_1. Przypuśćmy, że elektron pada na

przestrzeń ograniczoną siatką w kierunku tworzącym z normalną do płaszczyzny siatki kąt α. Gdy dostanie się między siatki, działa nań siła eE skierowana przeciwnie do natężenia pola. Poprowadźmy oś X normalnie do płaszczyzny siatek, oś Y prostopadle, do góry. Składowa prędkość elektronu w kierunku osi Y nie ulega zmianie, zatem możemy napisać

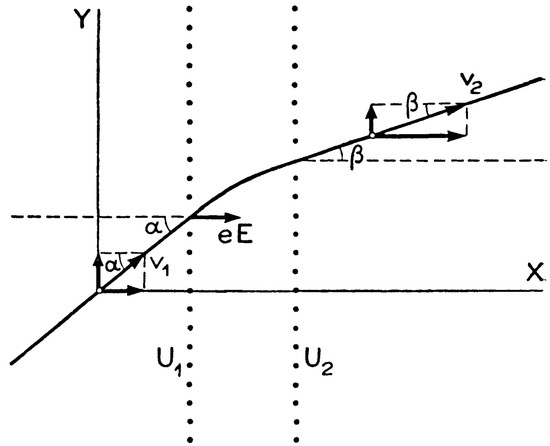
$$v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta,$$

skąd

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_2}{v_1}. \tag{22.38}$$

Prędkość elektronu v_1 przed wejściem w pole przyśpieszające między siatkami jest związana z napięciem U, które nadało im prędkość v_1 równaniem

$$\frac{mv_1^2}{2} = eU. \tag{22.39}$$



Rys. 22.30. Załamanie wiązki elektronów przy przejściu przez dwie płaszczyzny o różnych potencjałach

Po przejściu przez warstwę podwójną o różnicy potencjałów ΔU prędkość elektronu będzie v_2. Przyrost energii kinetycznej elektronu równa się pracy wykonanej przez siły pola, zatem możemy napisać

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = e\Delta U. \tag{22.40}$$

Dzieląc równanie (22.40) przez (22.39) stronami otrzymamy

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 = \frac{\Delta U}{U}, \tag{22.41}$$

skąd

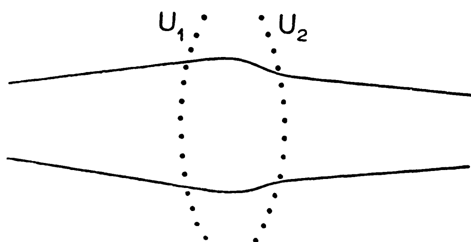
$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{\Delta U}{U}}. \tag{22.42}$$

Łącząc to równanie z równaniem (22. 38) możemy napisać na stosunek $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, który przez analogię do optyki geometrycznej moglibyśmy nazwać współczynnikiem załamania n,

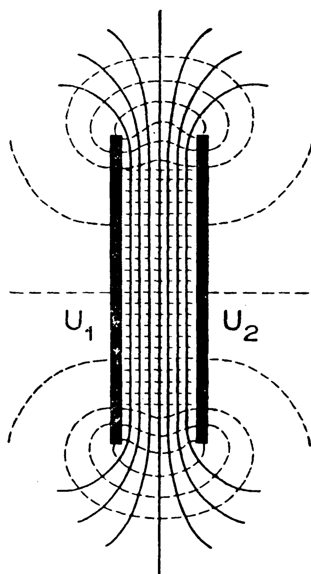
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = \sqrt{1 + \frac{\Delta U}{U}}. \tag{22.43}$$

Współczynnik załamania zależy, jak widać z tego równania, od stosunku $\frac{\Delta U}{U}$. Siatki S_1 i S_2 są powierzchniami ekwipotencjalnymi. Możemy więc powiedzieć,

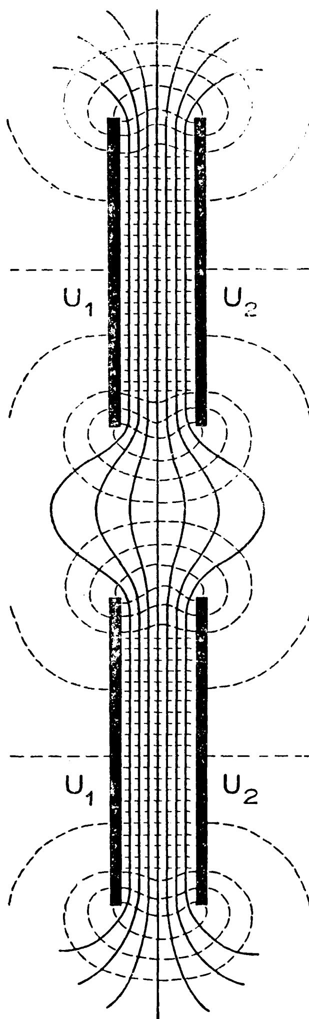
że powierzchnie ekwipotencjalne odgraniczają jak gdyby dziedziny o różnych współczynnikach załamania. Gdybyśmy wzięli np. dwie siatki kształtu soczewkowego (rys. 22.31) o potencjałach U_1 i U_2, to spowodują one załamanie torów,



Rys. 22.31. Załamanie wiązki elektronów przy przejściu przez siatki kształtu soczewkowego o różnych potencjałach



Rys. 22.32. Powierzchnie ekwipotencjalne oraz linie elektrycznego natężenia przy brzegach kondensatora płaskiego

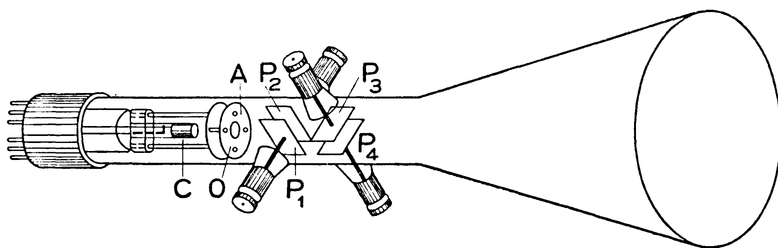


Rys. 22.33. Powierzchnie ekwipotencjalne oraz linie elektrycznego natężenia przy brzegach dwóch zbliżonych kondensatorów płaskich

po których biegną elektrony i skupienie ich w jednym miejscu, które moglibyśmy nazwać ogniskiem soczewki elektrostatycznej. W podobny sposób będzie działał układ powierzchni ekwipotencjalnych kształtu soczewkowego. Aby wyjaśnić,

jak można wytworzyć układ takich powierzchni, weźmy pod uwagę najpierw brzegi kondensatora płaskiego (rys. 22.32). Po naładowaniu kondensatora wytworzy się pole elektryczne, którego linie będą biec jak na rysunku. Zaznaczone są na rysunku liniami kreskowanymi. Powierzchnie ekwipotencjalne normalne do linij sił narysowane są liniami ciągłymi. Jeżeli zbliżymy od dołu drugą parę płyt o takiej samej różnicy potencjałów, linie odkształcą się i przybiorą postać jak na rys. 22.33. Powierzchnie ekwipotencjalne również odkształcą się i przybiorą kształt podobny w przekroju do przekroju soczewki. Jeżeli teraz wyobrazimy sobie, że cały rysunek obraca się około osi poziomej umieszczonej w płaszczyźnie rysunku, to wtedy powierzchnie ekwipotencjalne przybiorą kształt soczewkowy. Jeżeli więc umieścimy dwie przesłony metalowe z otworami w środku dość blisko jedna drugiej i wytworzymy między nimi różnicę potencjałów, to otrzymamy właśnie tego kształtu powierzchnie ekwipotencjalne. Taki układ przesłon działa na elektrony jak soczewka na promienie światła. Strumień rozbieżny elektronów po przejściu przez taką soczewkę zamienia się na strumień zbieżny. Przez odpowiednią zmianę różnicy potencjałów ΔU na przesłonach można zmieniać ogniskową wytworzonej soczewki elektrostatycznej i dobrać ją tak, aby elektrony skupiły się niemal w jednym punkcie. A zmianę różnicy potencjałów wywołuje się w sposób prosty, przez obrót gałki potencjometru umieszczonej zwykle na przedniej ściance obudowy lampy oscylograficznej. Używane są również soczewki elektrostatyczne wytwarzane za pomocą dwóch walców ustawionych osiowo jeden za drugim. Walce bywają tej samej średnicy lub też różnych średnic.

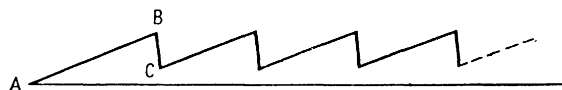
Do dalszych urządzeń oscylografu elektronowego należą płytki odchylające strumień elektronów. Są to jakby dwa małe płaskie kondensatorki ustawione jeden za drugim (rys. 22.34). Jedna para płytek P_1P_2 jest pionowa, druga



Rys. 22.34. Płytki P_1 i P_2 oraz P_3 i P_4 odchylające strumień elektronów w oscylografie
A — anoda, C — cylinder Wehnelta, O — otwór w anodzie przepuszczający elektrony

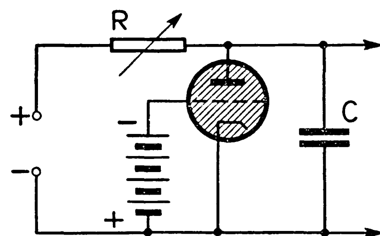
P_3 P_4 — pozioma. Po wytworzeniu między pionowymi płytkami różnicy potencjałów strumień elektronów doznaje w wytworzonym polu elektrycznym odchylenia proporcjonalnego do różnicy potencjałów. Płytki pionowe odchylają świecącą plamkę w kierunku poziomym, płytki poziome — w kierunku pionowym. Do płytek pionowych przyłącza się zwykle przewody idące od tzw. generatora podstawy czasu. Jest to generator lampowy wytwarzający szybkie drgania elektryczne

kształtu zębów piły. Pierwsza część cyklu, *AB* (rys. 22.35) powoduje przemieszczanie się plamki od strony lewej ekranu na prawo. Droga przebywana przez plamkę od lewego krańca ekranu powinna być proporcjonalna do czasu. Druga część, *BC*, powoduje nagły przeskok plamki z powrotem na lewą stronę ekranu, po czym wędrowanie plamki zaczyna się ponownie. Drgania tego rodzaju nazywają się drganiami relaksacyjnymi. Najprościej można je otrzymać za pomocą tyratronu. Schemat odpowiedniego połączenia przedstawia rys. 22.36. Do źródła odpowiednio wysokiego napięcia przyłącza się kondesator *C* przez włączony szeregowo opór *R*.

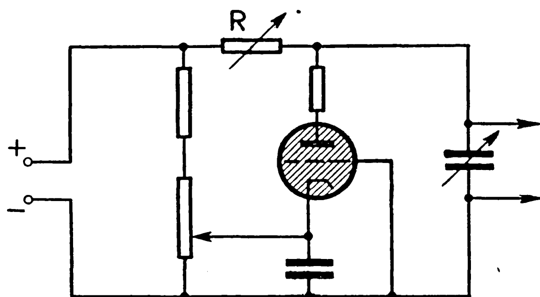


Rys. 22.35. Drgania kształtu zębów piły dawane przez generator podstawy czasu

Równolegle do kondensatora włącza się tyratron. Przez opór *R* ładuje się kondensator *C*. Potencjał jego górnej okładki podnosi się i jednocześnie rośnie potencjał anody tyratronu. Wreszcie w pewnym momencie tyratron się zapala i kondensator w bardzo krótkim czasie rozbraja się przez tyratron niemal całkowicie. Po rozbrojeniu kondensatora tyratron wskutek silnego obniżenia napięcia anody gaśnie, po czym proces ładowania powtarza się. Jeżeli okładki kondensatora połączymy z płytkami odchylającymi lampy oscylograficznej, to podczas ładowania kondensatora plamka będzie wędrowała w prawo, podczas gwałtownego wyładowania — cofa się z powrotem. Rysunek 22.37 przedstawia schemat prostego generatora drgań relaksacyjnych, przy czym nie potrzeba żadnej baterii dodatkowej. Obecnie znamy wiele układów lampowych, które wytwarzają drgania relaksacyjne. Szczególnie ważną rolę odgrywa generator podstawy czasu w odbiornikach telewizyjnych. Gdy ruch plamki jest dostatecznie szybki, gdy jej wędrówka w poprzek ekranu trwa mniej niż $^1/_{10}$ sekundy, oko widzi na ekranie świecący odcinek linii prostej (rys. 22.38). Zależnie od wielkości oporu w obwodzie i pojemności kondensatora można częstotliwość drgań relaksacyjnych zmieniać zwykle

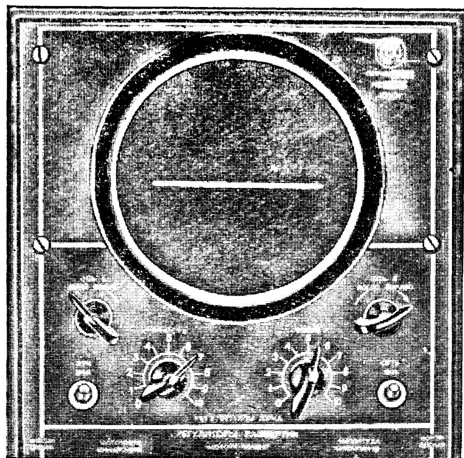


Rys. 22.36. Schemat układu z tyratronem wytwarzającym drgania relaksacyjne

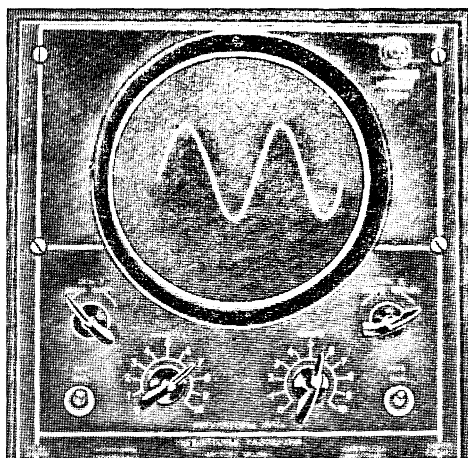


Rys. 22.37. Prosty generator podstawy czasu z tyratronem

w bardzo szerokich granicach. Plamka na ekranie wskutek nadzwyczaj małej bezwładności elektronów może poruszać się z ogromnymi szybkościami dochodzącymi nawet do wielu kilometrów na sekundę. Gdy do drugiej pary płytek przyłożymy jakiekolwiek zmieniające się napięcie, plamka wychyla się w kierunku pionowym, dając wykres zmiany napięcia w czasie. Rysunek 22.39 daje obraz przebiegu drgań sinusoidalnych. Jeżeli okres przesuwania plamki w kierunku poziomym równa się dokładnie okresowi drgań przy-



Rys. 22. 38. Linia otrzymana na ekranie oscylografu wskutek działania generatora podstawy czasu



Rys. 22. 39. Drgania sinusoidalne na ekranie oscylografu

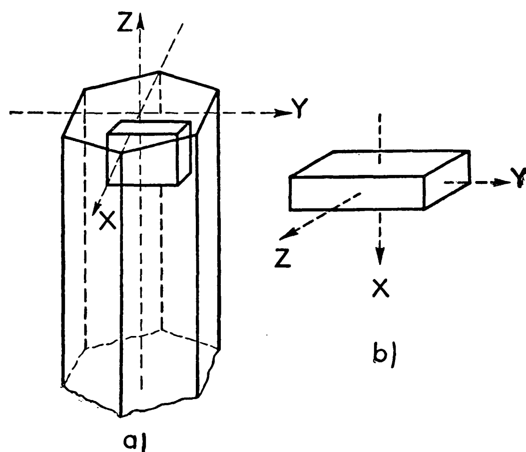
łożonych do płytek odchylających plamkę pionowo, to na ekranie zobaczymy sinusoidę zawierającą jeden grzbiet i jedną dolinę. W przypadku, gdy okres poziomego przesuwania plamki równa się kilku okresom drgania przyłożonego na płytki poziome, zobaczymy sinusoidę zawierającą kilka grzbietów i kilka dolin. Jeżeli okres drgania przebiegu oscylografowego jest bliski, lecz niewspółmierny z okresem generatora podstawy czasu, zobaczymy na ekranie obraz wędrujący w prawo lub lewo. Ponieważ częstość generatora podstawy czasu można zwykle zmieniać w sposób ciągły, można go stopniowo regulować patrząc na ekran. Przy zmianie częstości można zwolnić przesuwanie się obrazu, aż przy zupełnej synchronizacji zobaczymy obraz stojący. Zwykle w generatorze podstawy czasu istnieje urządzenie, które przy dostatecznym zbliżeniu jego częstości do częstości oscylografowanego przebiegu periodycznego automatycznie utrzymuje synchronizację.

22.10. Ultradźwięki. Jak o tym była mowa w akustyce, ciała drgające w powietrzu wytwarzają fale dźwiękowe, które odbiera nasze ucho. Jednak ucho jest wrażliwe na dźwięki mniej więcej w zakresie od 20 Hz do 20 kHz. Oczywistą

jest rzeczą, że drgania sprężyste ciał mogą mieć częstości tak niższe, jak i wyższe. Na częstości wyższe reaguje słuch niektórych zwierząt, np. nietoperzy, ptaków i prawdopodobnie niektórych owadów. Dźwięki o częstości wyższej od dźwięków przez nas słyszalnych nazywamy ultradźwiękami. Uzyskały one ostatnio najrozmaitsze zastosowania techniczne. Zajmiemy się najpierw sposobami ich wytwarzania. Najczęściej wytwarza się je za pomocą kryształów o własnościach piezoelektrycznych. Omówimy więc te własności.

Własności piezoelektryczne kwarcu zostały wykryte przez Piotra Curie. Weźmy pod uwagę kryształ kwarcu, który należy do układu heksagonalnego. Główne osi kryształu X, Y, Z noszą nazwy odpowiednio osi elektrycznej, mechanicznej i optycznej. Jako oscylatorów kwarcowych używa się płytek wyciętych pod rozmaitymi kątami do tych osi. W technice ultradźwiękowej używa się najczęściej płytek wyciętych prostopadle do elektrycznej osi (rys. 22.40). Jeżeli płytkę taką rozciągać w kierunku osi X (a więc w kierunku prostopadłym do największej ścianki), to po stronie dodatniej osi X wytwarza się ładunek dodatni, po stronie przeciwnej — ujemny. Przy ściskaniu płytki ładunek zmienia się na przeciwny. Wielkość ładunku wytworzonego jest dokładnie proporcjonalna do przyłożonej siły:

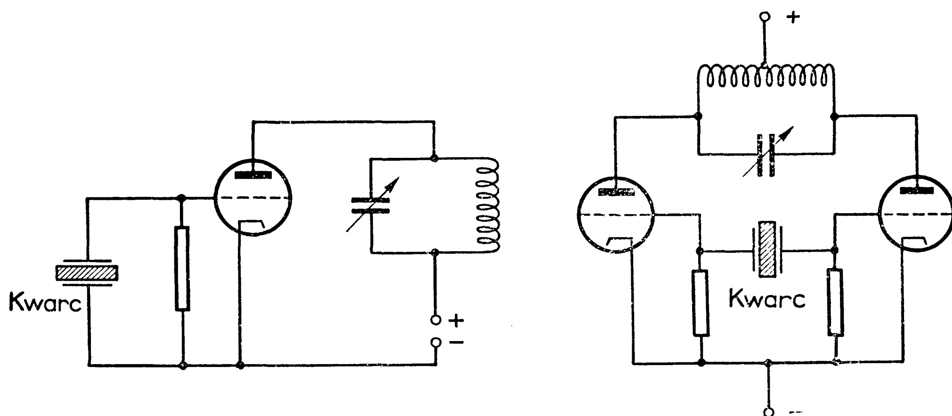
$$Q = kF. \tag{22.44}$$



Rys. 22.40. a) Kryształ kwarcu. Oś elektryczna, mechaniczna, optyczna
b) Płytka wycięta z kryształu

Jeżeli, odwrotnie, umieścimy płytkę krystaliczną w polu elektrycznym, to płytka zmienia nieco swą grubość. Aby to osiągnąć, umieszcza się płytkę kwarcową między dwiema płytkami metalowymi. Przy przyłożeniu różnicy potencjałów między tymi płytkami grubość płytki kwarcowej zmniejsza się. Ta zmiana grubości jest zresztą niewielka. Jeżeli na okładkach metalowych wywołamy zmienne napięcie, płytka kwarcowa zaczyna wykonywać drgania sprężyste. Drgania te stają się bardzo silne, gdy częstość przyłożonych drgań równa się jednej z rezonansyjnych częstości płytki kwarcowej. Drgania potencjału na granicach płytki wywołują powstanie w niej fal sprężystych zgęszczeń i rozrzedzeń, które odbijając się od przeciwległej krańcowej płaszczyzny tworzą fale stojące. Fale stojące mogą powstawać tylko wtedy, gdy na brzegach płytki powstają strzałki, a wewnątrz węzły fali. Na brzegowych płaszczyznach cząstki kryształu wykonują drgania największe, wewnątrz zaś powstają na przemian zgęszczenia i rozrzedzenia. Fale stojące

mogą zatem powstawać tylko wtedy, gdy na grubości płytki układa się nieparzysta liczba połówek fali. Zmienny potencjał na okładkach płytki krystalicznej wywołuje się za pomocą generatora lampowego. Rysunek 22.41 podaje schematy generatorów lampowych sterowanych piezokwarcem. W radiotechnicznych aparatach nadawczych używa się obecnie często płytek piezokwarcowych w celu ustabilizowania częstości drgań. Jeżeli bowiem w obwodzie siatki lampy wytwarzającej drgania elektryczne umieścimy płytkę kwarcową, jak wykazuje rys. 22.41, wówczas



Rys. 22.41. Schematy generatorów sterowanych piezokwarcem

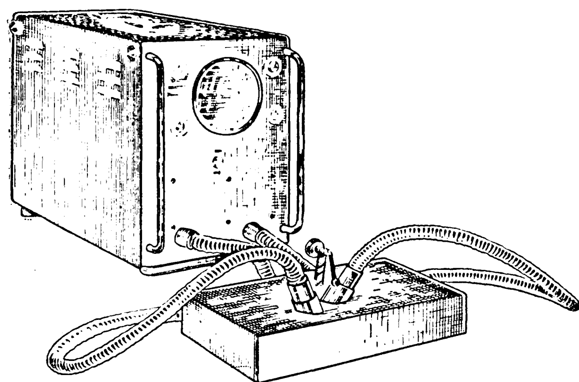
czas wytwarzane drgania mają częstość równą częstości drgania płytki kwarcowej nawet wtedy, gdy obwód jest niezupełnie dostrojony do częstości własnej piezokwarcowego oscylatora. Za pomocą płytek kwarcowych odpowiedniej grubości można wytwarzać drgania o częstości nawet wielu megaherców.

Jeżeli na płytkę kwarcową działa zmienne ciśnienie, wówczas na jej płaszczyznach brzegowych powstają zmienne potencjały, które z łatwością możemy wzmocnić. Takie zmienne ciśnienie będzie wywierane na płytkę, gdy będzie ona zanurzona lub będzie w kontakcie ze środowiskiem, w którym rozchodzą się fale sprężyste. Zatem płytka kwarcowa może być również odbiornikiem fal ultradźwiękowych, nadzwyczaj czułym, gdy jest z nimi w rezonansie.

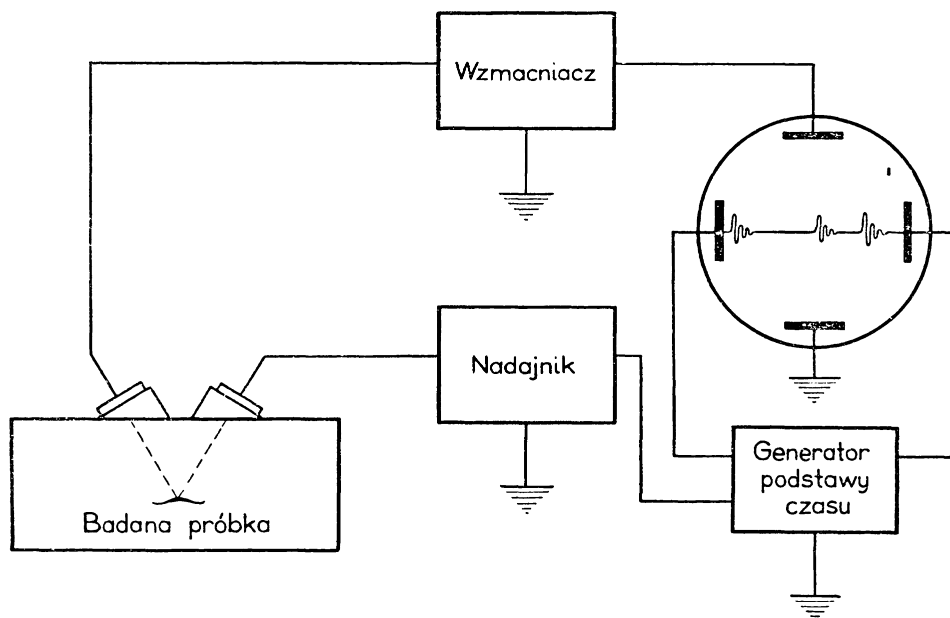
Do wytwarzania drgań ultradźwiękowych używane są również płytki z kryształów tzw. soli Seignette'a oraz tytanianu baru.

Ultradźwięków używa się obecnie między innymi do wykrywania uszkodzeń w materiałach, np. stali. Najczęściej stosuje się tu metodę echa. Polega ona na tym, iż specjalny generator pojedynczym silnym impulsem wywołuje serię zanikających drgań obwodu elektrycznego, w który włączona jest płytka piezokwarcowa. Płytka piezokwarcowa znajduje się między płytkami metalowymi, z których jedna jest silnie przyciśnięta do badanej próbki materiału, np. płyty metalowej, do drugiej zaś doprowadza się napięcie wytwarzane przez zanikające drgania elektryczne. Płytka piezokwarcowa wówczas wykonywa również zanikające

drgania sprężyste wysokiej częstości. Oczywiście płytka ta jest dostrojona do rezonansu z obwodem drgającym. Seria szybko zanikających drgań płytki wywołuje grupę fal biegnącą prostoliniowo w materiale badanym. Jeżeli jest w nim jakieś uszkodzenie, np. pęknięcie, fale odbijają się z powrotem. Obok płytki wysyłającej fale ustawia się w zupełnie takim samym uchwycie drugą płytkę kwarcową takiej samej grubości, jak pierwsza (rys. 22.42). Dobiegający do niej ciąg fal odbitych wywołuje drgania sprężyste płytki, wzbudzające na jej okładkach drgania potencjału. Po odpowiednim wzmocnieniu doprowadza się je do płytek odchylających pionowo plamkę w oscylografie. Grupa fal daje swój obraz na ekranie (rys. 22.43). Również doprowadza się do oscylografu drgania wychodzące z nadajnika. Nadajnik daje impulsy oddzielone równymi odstępami czasu. Można zatem łatwo zsynchro-



Rys. 22.42. Aparat ultradźwiękowy do wykrywania uszkodzeń w materiałach



Rys. 22.43. Wysłana grupa fal ultradźwiękowych oraz odbita grupa fal na ekranie oscylografu

nizować generator podstawy czasu z generatorem impulsów. Wtedy na oscylografie otrzymamy obraz stojący. Zwykle dobiera się tak stosunki, aby obraz grupy wysyłanych fal znajdował się po lewej stronie ekranu. Grupa fal odbitych daje obraz po prawej stronie ekranu. Z odległości między obrazem grupy fal odbitych i obrazem grupy fal wysyłanych możemy obliczyć czas potrzebny na przejście drogi od powierzchni płyty do ukszkodzenia i z powrotem. Z prędkości fal w danym materiale i czasu przejścia drogi można wyliczyć głębokość uszkodzenia. Oczywiście fale odbijają się po raz drugi od dolnej granicznej powierzchni płyty, dając na oscylografie drugi, późniejszy obraz grupy fal.

Zadania

22.1. Jaki będzie prąd nasycenia między anodą i katodą wolframową o średnicy 0,3 mm, długości 3 cm, przy temperaturze 2400° K. Praca wyjścia dla wolframu $W = 4{,}5$V.

Odpowiedź: 58,3 mA.

22.2. Prąd płynący przez diodę przy napięciu anodowym $U_a = 200$ V wynosi 75 mA. Ile elektronów (n) dolatuje do anody w każdej sekundzie i z jaką szybkością uderzają w anodę?

Odpowiedź: $n = 6{,}25 \cdot 10^{18}$, $v = 8{,}385 \cdot 10^{8}$ cm/sec = 8385 km/sec.

22.3. W diodzie przy napięciu 100 V płynie prąd 95 mA. Przy jakim napięciu anodowym prąd ten będzie równy 45 mA.

Odpowiedź: 60,7 V.

22.4. Jakie jest nachylenie charakterystyki diody przy napięciu 100 V, jeżeli prąd przez nią płynący wyraża się wzorem

$$i(\text{mA}) = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\ U^{3/2}.$$

Odpowiedź: $S = 0{,}24$ mA/V.

22.5. W triodzie przy obniżeniu napięcia siatkowego o $dU_s = 0{,}2$ V prąd anodowy zmniejszył się o $di_a = 0{,}5$ mA. Jakie jest nachylenie charakterystyki tej triody?

Odpowiedź: $S = 2{,}5$ mA/V.

22.6. Powiększenie napięcia anodowego triody o 3 V przy niezmiennym napięciu siatki wywołuje powiększenie prądu anodowego o 0,25 mA. Jaki jest opór wewnętrzny tej triody przy tym napięciu?

Odpowiedź: $R_i = 12\,000\ \Omega$.

22.7. Powiększenie napięcia anodowego o 6 V lub napięcia siatki o 0,2 V wywołuje powiększenie prądu anodowego o 0,48 mA. Jakie jest nachylenie charakterystyki S, opór wewnętrzny R_i i współczynnik wzmocnienia μ lampy?

Odpowiedź: $S = 2{,}4$ mA/V, $R_i = 12\,500\ \Omega$, $\mu = 30$.

22.8. W triodzie o współczynniku wzmocnienia $\mu = 8$ przy napięciu anodowym $U_a = 250$ V i napięciu siatki $U_s = -15$ V płynie prąd anodowy $i_a = 10$ mA. Jaki będzie prąd anodowy przy napięciu $U_a = 200$ V i $U_s = -5$ V w założeniu, że prąd jest mniejszy od prądu nasycenia?

Odpowiedź: $i_a = 13{,}7$ mA.

22.9. Napięcie anodowe triody $U_a = +275$ V, współczynnik wzmocnienia $\mu = 15$. Przy jakim napięciu siatki prąd anodowy spadnie do zera?

Odpowiedź: $U_s = -18{,}3$ V.

22.10. Jaki prąd będzie płynął w triodzie przy napięciu anodowym $U_a = 250$ V i napięciu siatki $U_s = -3$ V, jeżeli układ elektrod jest cylindryczny, katoda tlenkowa o powierzchni $S = 2{,}4$ cm², odległość między anodą i katodą $d = 6$ mm, promień katody $r_k = 0{,}8$ mm, współczynnik wzmocnienia $\mu = 20$?

Odpowiedź: $i_a = 3{,}9$ mA.

22.11. Opierając się na równaniu na prąd anodowy

$$i_a = c\left(U_s + \frac{U_a}{\mu}\right)^{3/2}$$

napisać wzory na nachylenie charakterystyki S i opór wewnętrzny R_i.

Odpowiedź: $S = \frac{3}{2}\,c\left(U_s + \frac{U_a}{\mu}\right)^{1/2}$, $\quad R_i = \frac{2\mu}{3c}\left(U_s + \frac{U_a}{\mu}\right)^{-1/2}$.

22.12. W obwodzie anodowym triody o nachyleniu charakterystyki $S = 2{,}4$ mA/V i oporze wewnętrznym $R_i = 12\,500\ \Omega$ włączono opór $R = 25\,000\ \Omega$. Jakie uzyska się wzmocnienie napięciowe na anodzie?

Odpowiedź: 20.

22.13. Jaki opór katodowy należy włączyć w obwód lampy, aby siatka uzyskała względem katody potencjał $-5{,}4$ V, jeżeli przez lampę płynie prąd 36 mA?

Odpowiedź: 150 Ω.

22.14. Obliczyć współczynnik załamania n dwóch płaszczyzn ekwipotencjalnych równoległych o różnicy potencjałów $\Delta U = 200$ V dla elektronów o energii 600 eV.

Odpowiedź: $n = 1{,}15$.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Jakimi sposobami można wyzwolić elektrony z ciał materialnych? Jak w przybliżeniu zależy ilość emitowanych elektronów od temperatury?
2. Jak się tłumaczy zjawisko powstawania łuku elektrycznego?
3. Jakie są zasadnicze części lamp elektronowych i jakie są szczegóły ich budowy?
4. Jak jest zbudowana dioda i do czego się jej używa? Co nazywamy charakterystyką diody? nachyleniem charakterystyki?
5. Jak jest zbudowany prostownik prądu zmiennego?
6. Jak jest zbudowana trioda? Jak wykreślamy statyczną charakterystykę triody? Co nazywamy nachyleniem charakterystyki? oporem wewnętrznym lampy?
7. Jak się określa współczynnik wzmocnienia lampy? przechwyt?
8. Jak zależy prąd anodowy w triodzie od napięć siatki i anody?
9. Jaka jest zasada wzmacniacza oporowego? Jak obliczyć wzmocnienie dawane przez lampę?
10. Co nazywamy charakterystyką dynamiczną lampy? Czym się ona różni od charakterystyki statycznej?
11. Jak jest zbudowana tetroda, jak się ją łączy ze źródłami napięcia i jakie są jej wady?
12. Jak jest zbudowana pentoda? Jaka jest zależność prądu anodowego pentody od napięć na siatkach?

13. Jak jest zbudowany wzmacniacz oporowy z pentodami?
14. Jak można wytworzyć drgania elektryczne za pomocą lampy elektronowej? Jaki jest warunek powstawania drgań? Jaka jest ich częstotliwość?
15. Jak jest zbudowana lampa stabilizująca napięcie?
16. Jak jest zbudowany tyratron? Jakie ma własności?
17. Jak jest zbudowany oscylograf katodowy i pomocnicze do niego urządzenia?
18. Jak można załamać promień elektronów? Od czego zależy współczynnik załamania? Jak są zbudowane soczewki elektronowe?
19. Jak jest zbudowany generator podstawy czasu? Od czego zależy częstotliwość jego drgań?
20. Jakie są własności kwarcu piezoelektrycznego? Do czego używa się płytek piezokwarcowych.
21. Co to są ultradźwięki, jak je można wytwarzać i jakie są ich własności?
22. W jaki sposób stosuje się ultradźwięki do wykrywania uszkodzeń w materiałach?

23. Teoria względności

23.1. Względność w mechanice klasycznej. Jak już o tym wspominaliśmy w kinematyce (patrz 2. 2), możemy mówić zawsze tylko o ruchu jednych ciał względem drugich, gdyż nie znamy ani jednego ciała, o którym moglibyśmy powiedzieć, że znajduje się w spoczynku. Zwykle z ciałem, do którego odnosimy ruch, związujemy układ współrzędnych zwany układem odniesienia, najczęściej układ współrzędnych prostokątnych XYZ. Odległości punktu od trzech płaszczyzn współrzędnych mierzone za pomocą sztywnego pręta, którego długość obieramy za jednostkę długości, są współrzędnymi tego punktu. Współrzędne są w ogólności funkcjami czasu mierzonego za pomocą zegara. Jeżeli funkcje te są znane, to ruch ciała względem układu odniesienia jest opisany. W kinematyce układ odniesienia jest obojętny, chociaż ruch tego samego ciała względem różnych układów odniesienia jest różny. A więc np. dla podróżnego, jadącego wagonem ruchem jednostajnym, upuszczony z okna jakiś przedmiot będzie spadał dla niego po linii prostej (o ile pominiemy opór powietrza), natomiast dla obserwatora stojącego obok toru będzie się poruszał po paraboli.

Inaczej sprawa się przedstawia w dynamice klasycznej. Zasady dynamiki Newtona są np. w układzie współrzędnych związanych z Ziemią słuszne tylko w pewnym przybliżeniu i nie we wszystkich przypadkach. Zasady te wtedy ściśle odnoszą się do ruchów, gdy za układ odniesienia przyjmiemy układ współrzędnych związanych z układem gwiazd stałych. A więc w takim układzie będzie słuszna zasada bezwładności, którą by można wysłowić w sposób następujący: ciało dostatecznie oddalone od wszelkich innych ciał (a więc na które nie działają siły) pozostaje w stanie spoczynku albo — ruchu jednostajnego prostoliniowego. Również będzie słuszna druga zasada Newtona, która mówi, że przyśpieszenie ciała jest proporcjonalne do siły na nie działającej i ma ten sam kierunek. Jak wiadomo zasada ta wyraża się równaniem wektorowym

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

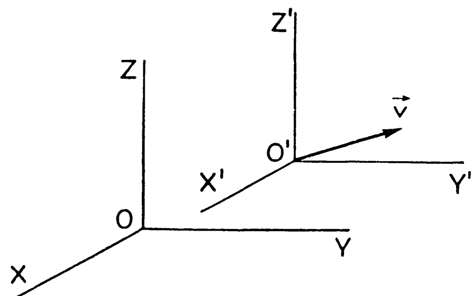
albo też układem trzech równań:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z, \tag{23.1}$$

gdzie $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ są składowymi przyśpieszenia, a X, Y, Z — składowymi siły.

Lecz można sprawdzić, że oba te prawa pozostają w mocy, gdy za układ odniesienia obierzemy układ poruszający się względem poprzedniego bezobrotowo z prędkością stałą.

Przekonajmy się najpierw, że ruch jednostajny dla pewnego obserwatora będzie również prostoliniowym i jednostajnym dla drugiego obserwatora poruszającego się względem pierwszego prostoliniowo i jednostajnie. Przypuśćmy np., że w powietrzu leci ptak jednostajnie i prostoliniowo dla obserwatora stojącego na ziemi. Łatwo się przekonać, że dla obserwatora jadącego pociągiem ruchem prostoliniowym jednostajnym ptak będzie się poruszał również ruchem prostoliniowym jednostajnym, jakkolwiek z inną prędkością.



Rys. 23.1. Układy współrzędnych poruszające się jeden względem drugiego

Niech ptak leci prostoliniowo jednostajnie względem układu XYZ (rys.32.1). Jego ruch w tym układzie będą opisywać równania

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + b_1 t, \\ y &= a_2 + b_2 t, \\ z &= a_3 + b_3 t, \end{aligned}\right\} \qquad (23.2)$$

gdzie a i b są stałe.

W układzie współrzędnych $X'Y'Z'$, który się porusza względem układu XYZ ruchem bezobrotowym jednostajnym prostoliniowym z prędkością v (dla prostoty zakładamy, że jego osie są równoległe do osi układu XYZ) równania ruchu będą:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - v_x t, \\ y' &= y - v_y t, \\ z' &= z - v_z t. \end{aligned}\right\} \qquad (23.3)$$

Podstawiając wartości na x, y, z z równań (23.2) otrzymamy

$$\begin{aligned} x' &= a_1 + (b_1 - v_x) t, \\ y' &= a_2 + (b_2 - v_y) t, \\ z' &= a_3 + (b_3 - v_z) t. \end{aligned}$$

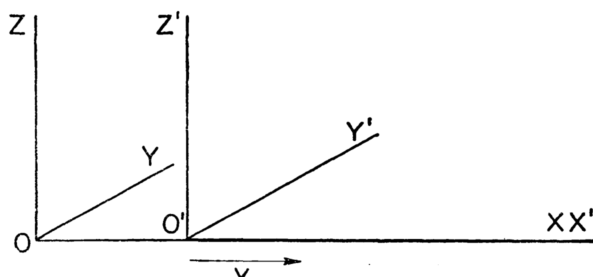
Oznaczając

$$b_1 - v_x = b_1', \qquad b_2 - v_y = b_2', \qquad b_3 - v_z = b_3$$

otrzymamy równania

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1 + b_1' t, \\ y' &= a_2 + b_2' t, \\ z' &= a_3 + b_3' t \end{aligned}\right\} \qquad (23.4)$$

takie same, jak równania (23.2). A więc współrzędne x', y', z' będą również funkcjami liniowymi czasu, ruch w tym układzie będzie również prostoliniowy jednostajny. Można także wykazać, że takim będzie również względem układu, którego osie z osiami poprzedniego tworzą dowolne kąty i który porusza się względem któregokolwiek z poprzednich ruchem jednostajnym prostoliniowym.



Rys. 23.2. Układ X' Y' Z' porusza się w kierunku osi X

Układy, które poruszają się jedne względem drugich ruchem postępowym prostoliniowym jednostajnym, nazywają się układami inercjalnymi albo układami Galileusza.

Weźmy pod uwagę jeszcze prostszy przypadek od poprzedniego: niech układ $X'Y'Z'$ porusza się względem układu XYZ ze stałą prędkością v w kierunku osi X i niech osie X i X' zlewają się ze sobą, a osie Y' i Z' pozostają stale równoległe do Y i Z (rys. 23.2). Wtedy związki między współrzędnymi w tych układach będą następujące:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}\right\} \qquad (23.5)$$

Związki (23.4) przechodzące w szczególnym przypadku w związki (23.5) nazywają się przekształceniami albo transformacjami Galileusza.

Stwierdziliśmy zatem, że pierwsza zasada Newtona pozostaje słuszna dla wszystkich układów Galileusza. Łatwo również stwierdzić, że i druga zasada Newtona nie zmieni się, gdy przejdziemy od jednego układu Galileusza do drugiego. Jeżeli bowiem między współrzędnymi x, y, z i x', y', z' istnieją związki (23.3), to

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

A więc będą prawdziwe i równania:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x'}{dt^2} &= X' = X, \\ m\frac{d^2y'}{dt^2} &= Y' = Y, \\ m\frac{d^2z'}{dt^2} &= Z' = Z, \end{aligned}\right\} \tag{23.6}$$

gdzie przez X', Y', Z' są oznaczone składowe siły mierzonej w układzie $X'Y'Z'$.

Widzimy zatem, że zasady Newtona nie zmieniają się, gdy przechodzimy od jednego układu Galileusza do innego. Mówimy, że zasady Newtona są niezmiennicze względem transformacyj Galileusza. Prawa mechaniki klasycznej są prawdziwe w każdym układzie inercjalnym. Jest to zasada względności mechaniki klasycznej.

Dopóki większość faktów doświadczalnych ujmowała mechanika klasyczna, ta zasada względności wystarczała. Jednakże z rozwojem elektrodynamiki i optyki stało się widoczne, że mechanika klasyczna nie wystarcza do ujęcia zjawisk przyrody. Również zasada względności mechaniki klasycznej stała się niewystarczająca.

23.2. Zasada względności w szczególnej teorii względności. Aby wyjaśnić dlaczego poprzednio wymieniona zasada względności stała się niewystarczająca, przypomnijmy zasadę dodawania prędkości w mechanice klasycznej. Niech po torze kolejowym jedzie wagon z prędkością stałą v_1. Wzdłuż wagonu idzie człowiek w kierunku ruchu wagonu z prędkością v_2 względem wagonu. Prędkość jego względem Ziemi będzie

$$v = v_1 + v_2. \tag{23.7}$$

Gdyby szedł on w przeciwnym kierunku do ruchu wagonu z prędkością v, to jego prędkość względem Ziemi byłaby

$$v = v_1 - v_2. \tag{23.8}$$

Przejdźmy teraz do zjawisk optycznych. Wiemy, że światło w próżni i, praktycznie biorąc, w powietrzu rozchodzi się zawsze we wszystkich kierunkach z jednakową prędkością $c = 300\,000$ km/sec. Lecz to zjawisko powinno się inaczej przedstawiać człowiekowi jadącemu pociągiem. Wyobraźmy sobie bowiem wagon poruszający się po torze prostoliniowym z prędkością v. Przypuśćmy dla dokładności, że powietrze sponad Ziemi zostało usunięte. Dajmy na to, że pociąg jedzie na prawo (rys. 23.3). W takim razie sygnał świetlny wysłany z punktu B powinien dobiec nieco później do punktu C niż do punktu A. Światło w sekundzie przebędzie drogę c, lecz jednocześnie wagon przesunie się w prawo o v

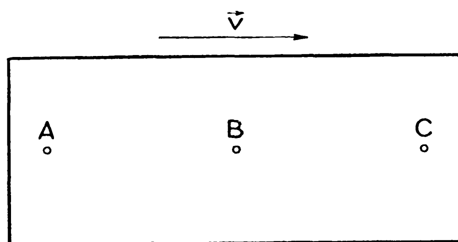
Zatem dla obserwatora w wagonie światło w kierunku punktu C powinno biec z prędkością

$$c_1 = c - v, \tag{23.9}$$

w kierunku przeciwnym zaś z prędkością

$$c_2 = c + v. \tag{23.10}$$

Człowiek jadący wagonem powinien zatem mieć możność wykrycia swego ruchu przez obserwację prędkości rozchodzenia się światła. My na Ziemi znajdujemy się w położeniu obserwatora jadącego pociągiem. Ziemia porusza się po orbicie swej naokoło Słońca. Na krótkim odcinku toru ruch jej możemy uważać za jednostajny. Prędkość tego ruchu wynosi koło 30 km/sec. Jeżeli poprzednie rozumowanie jest słuszne, powinniśmy móc wykryć ruch Ziemi przez obserwację rozchodzenia się światła w różnych kierunkach. Wielokrotnie zostały istotnie wykonane doświadczenia mające na celu wykrycie wpływu ruchu Ziemi na rozchodzenie się światła. Słynne doświadczenie Michelsona i Morleya (czyt. Majkelsona i Morleja) polegało na następującym rozumowaniu: wyobraźmy sobie, że z punktu A został wysłany sygnał świetlny, który w miejscu B odbija się od zwierciadła i wraca z powrotem do punktu A (rys. 23.4). Jeżeli Ziemia porusza się na prawo z prędkością v względem nieruchomego środowiska, w którym rozchodzi się światło, to prędkość światła w kierunku od A do B względem Ziemi będzie

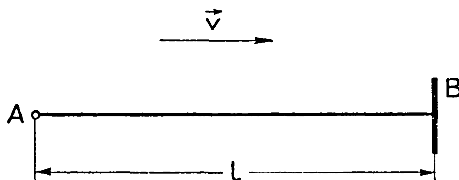


Rys. 23.3. Sygnał świetlny wysyłany w wagonie poruszającym się po torze prostoliniowym

$$c - v,$$

zaś w kierunku od B do A będzie

$$c + v.$$



Rys. 23.4. Bieg światła w kierunku ruchu układu

Niech długość odcinka $AB = l$. Czas potrzebny na przebycie drogi $AB + BA$ będzie następujący:

$$t_1 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2cl}{c^2 - v^2}. \tag{23.11}$$

Dzieląc licznik i mianownik przez c^2 otrzymamy

$$t_1 = \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right). \tag{23.12}$$

Przypuśćmy teraz, że wysyłamy sygnał w kierunku zwierciadła umieszczonego w C również w odległości l od punktu A (rys. 23.5). Światło odbije się i przebiegnie drogę tam i z powrotem w czasie t_2. Lecz jednocześnie Ziemia przesunie się o odległość

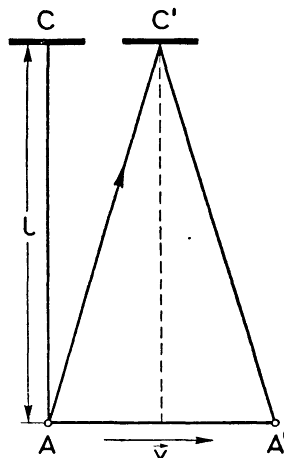
$$AA' = vt_2.$$

Światło ma zatem do przebycia drogę $AC'A'$. Droga AC', jako przeciwprostokątna trójkąta, którego jedną przyprostokątną jest l, a drugą $\frac{1}{2}vt_2$, da się obliczyć ze wzoru

$$AC = \sqrt{l^2 + \frac{1}{4}v^2t_2^2}.$$

Całkowita droga przebyta przez światło będzie

$$2\sqrt{l^2 + \frac{1}{4}v^2t_2^2}. \tag{23.13}$$



Rys. 23.5. Bieg światła w kierunku prostopadłym do ruchu układu

Ponieważ prędkość światła w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu Ziemi jest c, zatem czas t_2 potrzebny na przebycie drogi $AC'A'$ będzie

$$t_2 = \frac{2\sqrt{l^2 + \frac{1}{4}v^2 t_2^2}}{c}, \tag{23.14}$$

skąd otrzymamy

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{23.15}$$

Dzieląc licznik i mianownik przez c otrzymamy

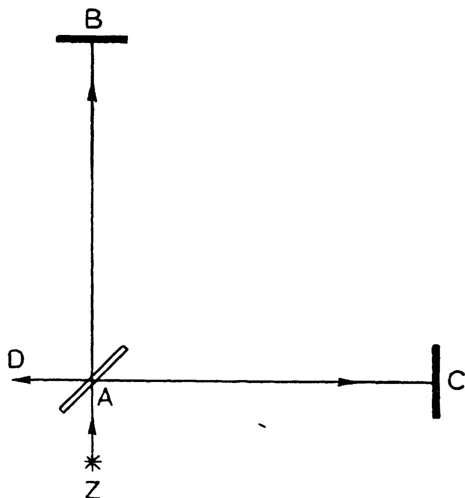
$$t_2 = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{23.16}$$

Zatem różnica czasów

$$t_1 - t_2 = \frac{2l}{c}\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{l}{c}\frac{v^2}{c^2}. \tag{23.17}$$

A więc czas przebycia przez światło tego samego odcinka l w kierunku ruchu Ziemi w środowisku, w którym rozchodzi się światło, jest inny, dłuższy, niż w kierunku prostopadłym do jej ruchu. Powinniśmy to móc wykryć. Odnośne

doświadczenie zostało wykonane właśnie przez Michelsona i Morleya. Zasada ich aparatu była następująca (rys. 23.6): dwa zwierciadełka B i C ustawione były prostopadle jedno względem drugiego w jednakowych odległościach od punktu A. W tym ostatnim punkcie umieszczona była szyba szklana posrebrzona tak cienko, że połowę padającego na nią światła przepuszczała, a połowę odbijała. Promień światła puszczony z punktu Z na szybę przechodził przez nią w połowie, odbijał się od zwierciadełka B i padał na szybę A w kierunku D. Część odbita od szyby padała na zwierciadełko C, odbijała się i padała na szybę A. Część tego światła przechodziła w kierunku D. Dwa promienie, jeden odbity w B, drugi w C, schodziły się w kierunku D dając prążki interferencyjne. Cały przyrząd dla ochrony od wstrząśnień umieszczony był na kamiennym bloku pływającym w zbiorniku z rtęcią. Przy obrocie przyrządu o 90° można było oczekiwać przesunięcia prążków interferencyjnych, jeżeli rzeczywiście dla obserwatora na Ziemi prędkość światła zależy od kierunku ruchu Ziemi. Tymczasem wynik doświadczenia był całkowicie negatywny. Po tym doświadczeniu wykonano jeszcze wiele innych doświadczeń, które powinny były wykazać wpływ postępowego ruchu Ziemi na zjawiska na niej zachodzące. Wszystkie dały wynik całkowicie ujemny.

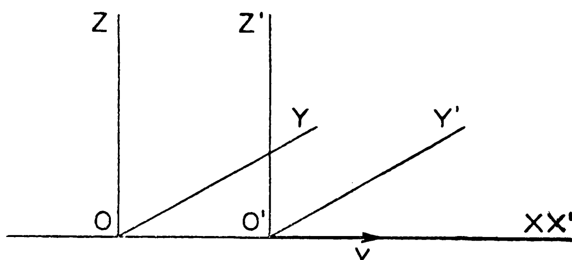


Rys. 23.6. Doświadczenie Michelsona i Morleya

Cóż można stąd wywnioskować? Czyż można przypuścić, że Ziemia jest jedynym ciałem spoczywającym we wszechświecie? Byłoby to nonsensem. W takim razie pozostaje tylko jedna możliwość: że każdy obserwator w jakimkolwiek układzie inercjalnym stwierdzić musi taki sam fakt. Każdy z obserwatorów w dowolnych układach inercjalnych stwierdzi, że dla niego światło rozchodzi się z jednakową i taką samą prędkością we wszystkich kierunkach. Oczywiście każdemu natychmiast nasuwa się pytanie: jakżeż to jest możliwe? Niespodziewana odpowiedź, jaką dał Einstein, jest następująca: jest to możliwe dzięki temu, że każdy z obserwatorów dokonuje pomiarów przy pomocy s w o i c h miar długości, s w o i c h zegarów i s w o i c h jednostek czasu. Lecz jeżeli jeden obserwator dokona pomiarów za pomocą swoich przyrządów, to drugi obserwator poruszający się względem pierwszego ze stałą prędkością powie, iż pierwszy używa innych jednostek długości i czasu niż on i że zdarzenia dla pierwszego równoczesne nie są dla niego równoczesnymi.

Zasada Einsteina będąca podstawą tzw. szczególnej teorii względności jest następująca: we wszystkich układach inercjalnych wszelkie prawa przyrody są identyczne. A zatem i rozchodzenie światła w tych wszystkich układach odbywa się identycznie z tą samą prędkością jednakową we wszystkich kierunkach.

23.3. Transformacje Lorentza. Zobaczymy, jakim warunkom muszą czynić zadość oceny długości, a więc i współrzędnych oraz czasów, przez dwóch obserwatorów poruszających się jeden względem drugiego ruchem jednostajnym, aby rozchodzenie się światła odbywało się dla nich z prędkością stałą c we wszystkich kierunkach.



Rys. 23.7. Układ osi ruchomych i nieruchomych

Wyobraźmy więc sobie dwa układy XYZ i $X'Y'Z'$ (rys. 23.7). Dla uproszczenia rozumowania założymy, że układ $X'Y'Z'$ porusza się w kierunku osi X z prędkością v względem układu XYZ. Osie X' i X schodzą się stale ze sobą. W chwili, gdy początek układu O' schodzi się z punktem O, każdy z obserwatorów zaświeca sygnał świetlny w początku swego układu. Z początku obu układów rozchodzi się fala kulista z prędkością c dla jednego obserwatora i tak samo fala kulista z prędkością c dla drugiego obserwatora. Czoło fali jest zatem kulą o promieniu powiększającym się z prędkością c. Dla obserwatora w układzie XYZ możemy napisać równanie

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \tag{23.18}$$

(promień kuli $R=ct$ rośnie liniowo z czasem).

Dla drugiego obserwatora możemy napisać takie samo równanie

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2. \tag{23.19}$$

Ponieważ układy te są układami Galileusza, zatem tor cząstki swobodnej poruszającej się na mocy bezwładności jest w każdym układzie linią prostą i dla każdego z obserwatorów porusza się ona ruchem jednostajnym. A więc droga przebywana przez tę cząstkę będąca dla jednego obserwatora funkcją liniową czasu musi być i dla drugiego funkcją liniową czasu. Stąd wynika, że związek między współrzędnymi i czasami obu układów musi być l i n i o w y.

Ponieważ płaszczyzna $Y'O'Z'$ w układzie ruchomym ma równanie $x'=0$, a w układzie nieruchomym porusza się z prędkością v, zatem jej równanie w układzie nieruchomym będzie

$$x-vt=0. \tag{23.20}$$

W takim razie związek między współrzędnymi dowolnego punktu x i x' musi być następujący:

$$x' = k(x - vt), \tag{23.21}$$

gdyż wtedy jednocześnie $x - vt$ i x' stają się równe zeru.

Możemy także założyć, że

$$y' = y, \tag{23.22}$$

$$z' = z. \tag{23.23}$$

Wreszcie, ponieważ, jak wyżej wykazaliśmy, związek między współrzędnymi i czasami obu układów musi być liniowy, zatem możemy napisać

$$t' = Ax + Bt. \tag{23.24}$$

Po podstawieniu wartości na x', y', z', t' do równania

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \tag{23.25}$$

równanie to powinno identycznie przejść w równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \tag{23.26}$$

Zatem powinniśmy mieć tożsamość

$$k^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2 (Ax + Bt)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \tag{23.27}$$

albo po uporządkowaniu

$$(k^2 - 1 - A^2 c^2)\, x^2 - 2\,(k^2 v + ABc^2)\, xt + (k^2 v^2 - B^2 c^2 + c^2)\, t^2 \equiv 0.$$

Tożsamość ta zachodzić musi dla dowolnych wartości t i x. Jest to tylko wtedy możliwe, gdy wszystkie współczynniki przy zmiennych równają się zeru. Otrzymamy więc równania

$$k^2 - 1 - A^2 c^2 = 0, \quad k^2 v + ABc^2 = 0, \quad k^2 v^2 - B^2 c^2 + c^2 = 0 \tag{23.28}$$

albo

$$k^2 - 1 = A^2 c^2, \tag{23.29}$$

$$- k^2 v = ABc^2, \tag{23.30}$$

$$k^2 v^2 + c^2 = B^2 c^2. \tag{23.31}$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez trzecie otrzymamy

$$(k^2 - 1)\,(k^2 v^2 + c^2) = A^2 B^2 c^4. \tag{23.32}$$

Podnosząc zaś drugie do kwadratu

$$k^4 v^2 = A^2 B^2 c^4. \tag{23.33}$$

Z równań (23.32) i (23.33) wynika

$$(k^2 - 1)\,(k^2 v^2 + c^2) = k^4 v^2. \tag{23.34}$$

Stąd łatwo otrzymamy

$$k = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.35}$$

Z równania (23.29) otrzymamy

$$A = \pm \frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.36}$$

Następnie z równania (23.31)

$$B = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.37}$$

Ponieważ z równania (24.30) mamy

$$AB = -k^2 \frac{v}{c^2}, \tag{23.38}$$

zatem A i B muszą mieć znaki przeciwne. Lecz B musi być dodatnie, gdyż oczywiście wzrastaniu czasu w jednym układzie musi odpowiadać wzrastanie czasu również w drugim układzie.

A więc otrzymamy w rezultacie

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad A = -\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.39}$$

Zatem otrzymamy

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, \qquad z' = z, \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{23.40}$$

Związki te nazywamy transformacjami Lorentza.

Można się łatwo przekonać, że wyrażenie

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \tag{23.41}$$

po podstawieniu wartości (23.40) na x', y', z', t' przejdzie identycznie w wyrażenie

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \tag{23.42}$$

Podstawiając wartości (23.40) otrzymamy

$$\frac{(x-vt)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}+y^2+z^2-c^2\frac{\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}=$$

$$=\frac{x^2-2xvt+v^2t^2-c^2t^2+2xvt-\frac{v^2}{c^2}v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}+y^2+z^2=$$

$$=x^2+y^2+z^2-c^2t^2.$$

Po rozwiązaniu układu równań (24.40) względem x i t otrzymamy

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\tag{23.43}$$

$$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\tag{23.44}$$

Widać, że związki te różnią się od (23.40) tylko tym, że v jest zastąpione przez $-v$.

Jak łatwo stwierdzić, transformacje Lorentza przechodzą w transformacje Galileusza, gdy założymy, że prędkość światła jest nieskończenie wielka. Wtedy z wzorów (23.40) otrzymamy

$$x'=x-vt,$$

$$t'=t;$$

zegary w obu układach szłyby wtedy identycznie.

W ogólności wszystkie wzory mechaniki relatywistycznej przechodzą we wzory mechaniki klasycznej, gdy przyjmiemy $c=\infty$.

Bardzo często wprowadza się oznaczenie

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\tag{23.45}$$

Wtedy równania transformacyjne Lorentza można napisać w następującej prostej postaci:

$$x'=\beta(x-vt),\qquad t'=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x\right),\tag{23.46}$$

zaś

$$x=\beta(x'+vt'),\qquad t=\beta\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right).\tag{23.47}$$

23.4. Skrócenie długości. Teraz możemy się łatwo przekonać, że długości zmierzone w obu układach nie są jednakowe. Niech układ $X'Y'Z'$ porusza się z prędkością v w kierunku osi X względem układu XYZ. Oczywiście równie dobrze możemy powiedzieć, że układ niekreskowany XYZ porusza się względem kreskowanego. Tylko ze względu na wygodę wysławiania się nazwiemy układ XYZ układem nieruchomym, a układ $X'Y'Z'$ — układem ruchomym. Możemy sobie wyobrazić np., że znajdujemy się w układzie XYZ. Wtedy będzie on dla nas nieruchomy. Przypuśćmy, że obserwator ruchomy, tj. obserwator spoczywający względem układu $X'Y'Z'$, odmierza pewną długość L' na swej osi X'. Współrzędne początku i końca tego odcinka niech będą x_1' i x_2'. Zatem dla niego

$$L' = x_2' - x_1'. \tag{23.48}$$

Obserwator nieruchomy, tzn. spoczywający względem układu XYZ, musi wyznaczyć w swoim układzie punkty o takich odciętych x_1 i x_2, aby początek i koniec odcinka L' w tej samej chwili t mijały te punkty. Ze związków

$$x_1' = \beta\,(x_1 - vt), \qquad x_2' = \beta\,(x_2 - vt) \tag{23.49}$$

otrzymamy

$$x_2' - x_1' = \beta\,(x_2 - x_1).$$

A więc

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\beta} = (x_2' - x_1')\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{23.50}$$

Widać zatem, że długość L dla obserwatora nieruchomego będzie

$$L = L'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{23.51}$$

a więc krótsza.

Lecz to samo obserwator ruchomy powie o długości obserwatora nieruchomego. Powiedzmy, że obserwator nieruchomy odmierzył odcinek

$$L = x_2 - x_1. \tag{23.52}$$

Obserwator ruchomy musi na swojej osi X' zrobić znaczki w punktach o odciętych x_1 i x_2, które są w tej samej chwili t' jego czasu mijane przez punkty o współrzędnych x_1 i x_2.

Lecz

$$x_1 = \beta\,(x_1' + vt'), \qquad x_2 = \beta\,(x_2' + vt'), \tag{23.53}$$

skąd

$$L' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\beta} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{23.54}$$

23.5. Podłużenie czasu. Czas własny. Czas pokazywany przez zegar w danym układzie nazywamy jego *czasem własnym*. Dajmy na to, że obserwator ru-

chomy na swoim zegarze odczytuje dwie chwile t_1' i t_2'. Odstęp między tymi chwilami jest

$$T' = t_2' - t_1'.$$

Niech ten obserwator w swoim układzie znajduje się w punkcie o odciętej x'. Jak oceni ten okres czasu obserwator nieruchomy? Musi on na zegarach w s w o i m układzie, które idą synchronicznie, zanotować chwile, w których zegar obserwatora ruchomego pokazuje chwile t_1' i t_2' (będą to oczywiście inne zegary, gdyż obserwator ruchomy się przesuwa). Mamy

$$t_1 = \beta\left(t_1' + \frac{v}{c^2}x'\right), \qquad t_2 = \beta\left(t_2' + \frac{v}{c^2}x'\right). \tag{23.55}$$

Stąd

$$t_2 - t_1 = \beta\,(t_2' - t_1'), \tag{23.56}$$

czyli

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.57}$$

Zatem przedział czasu T' obserwatora ruchomego obserwator nieruchomy oceni jako dłuższy.

Również obserwator ruchomy oceni przedział czasu T obserwatora nieruchomego jako dłuższy. Niech

$$T = t_2 - t_1. \tag{23.58}$$

Ten przedział czasu jest wskazywany przez zegar nieruchomy w danym punkcie x nieruchomego układu. Obserwator ruchomy musi początek i koniec tego przedziału czasu porównać ze wskazaniami zegarów w układzie ruchomym (w dwóch różnych miejscach układu ruchomego). Według transformacyj Lorentza

$$t_1' = \beta\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x\right), \qquad t_2' = \beta\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x\right), \tag{23.59}$$

skąd

$$T' = t_2' - t_1' = \beta\,(t_2 - t_1) = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.60}$$

23.6. Dodawanie prędkości. Niech v' będzie prędkością punktu względem ruchomego układu w kierunku osi X', zaś v — prędkością tego układu względem układu, który przyjmujemy za nieruchomy. Prędkość w układzie ruchomym

$$v' = \frac{dx'}{dt'}. \tag{23.61}$$

Prędkość rozważanego punktu względem układu nieruchomego będzie

$$u = \frac{dx}{dt}. \tag{23.62}$$

Z równań (23.47) wyrażających transformacje Lorentza możemy napisać:

$$dx = \beta\,(dx' + v\,dt'), \qquad dt = \beta\left(dt' + \frac{v}{c^2}\,dx'\right). \tag{23.63}$$

Zatem

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v}{c^2}\,dx'} = \frac{v + \frac{dx'}{dt'}}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{v + v'}{1 + \frac{v\,v'}{c^2}}. \tag{23.64}$$

Wzór ten zastępuje wzór mechaniki klasycznej

$$u = v + v'. \tag{23.65}$$

Można stwierdzić, że dodając prędkości za pomocą tego relatywistycznego wzoru nigdy nie otrzymamy prędkości większej od prędkości światła.

P r z y k ł a d y. Dodajmy dwie prędkości: $v = \frac{1}{2}c$ i $v' = \frac{1}{2}c$; otrzymamy

$$u = \frac{\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{\frac{1}{4}c^2}{c^2}} = \frac{c}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}c.$$

Niech $v = \frac{1}{2}c$, $v' = c$; otrzymamy

$$u = \frac{\frac{1}{2}c + c}{1 + \frac{\frac{1}{2}c^2}{c^2}} = \frac{\frac{3}{2}c}{\frac{3}{2}} = c.$$

23.7. Zasady dynamiki w szczególnej teorii względności. Jak widać z poprzedniego, zasady kinematyki, np. zasada dodawania prędkości, są inne w kinematyce relatywistycznej niż w kinematyce niutonowskiej. Powstaje pytanie, jak się rzeczy mają z dynamiką w teorii względności? Czy np. równania Newtona zachowują swą ważność? Według zasady względności równania dynamiki powinny być niezmiennicze wobec transformacyj Lorentza, tzn. nie powinny ulegać zmianie przy przekształceniach Lorentza. Okazuje się jednak, że równanie Newtona

$$\frac{d}{dt}(mv) = F, \tag{23.66}$$

(gdzie m oznacza stałą masę poruszającego się ciała) nie jest niezmiennicze

względem transformacyj Lorentza. Zatem równania Newtona muszą być zmodyfikowane. Ażeby znaleźć równania, które by zastąpiły równania Newtona, spróbujemy iść następującą drogą: zrobimy mianowicie założenie dopuszczalne, że równania Newtona zachowują ważność, jeżeli prędkość punktu równa się zeru. Weźmy więc pod uwagę punkt P', którego prędkość w układzie kreskowanym $X'Y'Z'$ w chwili $t' = 0$ równa się zeru (lecz przedtem i potem jest odmienna od zera). Układ kreskowany porusza się względem niekreskowanego w kierunku osi X z prędkością stałą v. Dla prostoty rozumowania założymy jeszcze, że siła działająca na ten punkt jest skierowana wzdłuż osi X'. Dla punktu P' będziemy mogli napisać równanie

$$m_0 \frac{d^2x'}{dt'^2} = F', \tag{23.67}$$

gdzie m_0 oznacza masę tego punktu, w danej chwili spoczywającego w układzie $X'Y'Z'$.

Jeżeli ogólnie prędkość punktu P' w układzie kreskowanym oznaczymy przez u' to prędkość jego względem układu niekreskowanego wyrazi się wzorem (patrz wzór 23.64)

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'\,v}{c^2}}. \tag{23.68}$$

Stąd na przyśpieszenie znajdziemy

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}\right) = \frac{\frac{du'}{dt}}{1 + \frac{u'v}{c^2}} - \frac{(u' + v)\frac{v}{c^2}\frac{du'}{dt}}{\left(1 + \frac{u'v}{c^2}\right)}. \tag{23.69}$$

Dla chwili $t' = 0$ mamy $u' = 0$, zatem otrzymamy

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t'=0} = \frac{du'}{dt} - \frac{v^2}{c^2}\frac{du'}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{du'}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{du'}{dt'}\frac{dt'}{dt}. \tag{23.70}$$

Ponieważ $t = \beta\left(t + \frac{v}{c^2}\,x'\right)$, zatem

$$\frac{dt}{dt'} = \beta\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt'}\right). \tag{23.71}$$

Lecz w chwili $t' = 0$ jest $\frac{dx'}{dt'} = u' = 0$, a więc

$$\left(\frac{dt}{dt'}\right)_{t'=0} = \beta, \quad \left(\frac{dt'}{dt}\right)_{t'=0} = \frac{1}{\beta}. \tag{23.72}$$

Podstawiając tę ostatnią wartość do równania (23.70) otrzymamy

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t'=0} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{du'}{dt'}\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta^3}\left(\frac{du'}{dt'}\right)_{t'=0}.$$

Zatem dla chwili $t' = 0$ mamy związek

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \beta^3 \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{23.73}$$

A więc w układzie niekreskowanym zamiast równania Newtona musimy napisać równanie

$$m_0 \beta^3 \frac{d^2x}{dt^2} = F. \tag{23.74}$$

Ponieważ w chwili początkowej $t' = 0$ punkt P' nie poruszał się względem układu kreskowanego, zatem względem układu niekreskowanego miał prędkość v równą prędkości układu kreskowanego.

Uważając więc teraz v za prędkość rozważanego punktu wykonajmy następujące różniczkowanie:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{\frac{dv}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\frac{v^2}{c^2}\frac{dv}{dt}}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{v^2}{c^2}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^3} = \beta^3 \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{23.75}$$

Równanie (23.74) możemy teraz napisać w postaci następującej:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = F. \tag{23.76}$$

To równanie zastępuje w dynamice relatywistycznej równanie Newtona

$$\frac{d}{dt}(mv) = F.$$

Pęd wyrazi się wobec tego w mechanice relatywistycznej wzorem

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.77}$$

Interpretujemy to ostatnie równanie w ten sposób, że przyjmujemy, iż masa poruszającego się ciała wyraża się wzorem

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{23.78}$$

a więc nie jest stała, lecz zależy od prędkości i gdy prędkość v dąży do c, masa dąży do nieskończoności; m_0 nazywamy masą spoczynkową. Jest to wartość masy, jaką ma ciało przy prędkości $v = 0$ lub przy prędkościach bardzo małych, w porównaniu z prędkością światła.

Ruchy ciał, jakie możemy obserwować na Ziemi, są tak powolne, że zmiany masy są niedostrzegalne. Nawet gdybyśmy wzięli jako przykład ciało poruszające się z prędkością równą prędkości Ziemi po orbicie, wynoszącą 30 km/sec, to na jego masę otrzymalibyśmy

$$m = m_0 \cdot 1{,}000\,000\,005,$$

różnica byłaby więc niedostrzegalna. Zmianę masy można spostrzec dopiero przy prędkościach porównywalnych z prędkością światła. Takie prędkości osiągają elektrony lub jony gazowe rozpędzane wysokimi napięciami. Odnośne pomiary najzupełniej potwierdziły powyższy wzór.

23.8. Masa a energia. Jak wiemy, zasada zachowania energii mówi, że praca wykonana nad układem równa się przyrostowi jego energii:

$$E_2 - E_1 = L. \tag{23.79}$$

Zastosujmy tę zasadę do cząstki swobodnej o masie m_0 znajdującej się w spoczynku. Przypuśćmy, że zaczyna na nią działać siła F w kierunku osi X na drodz: dx. W takim razie cząstka nabędzie energii kinetycznej. Według zasady zachowania energii przyrost energii kinetycznej równa się wykonanej przez siłę pracye

$$dE_k = F\,dx, \tag{23.80}$$

lecz według równania (23.76)

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right), \tag{23.81}$$

zaś $dx = \frac{dx}{dt}\,dt = v\,dt$, zatem

$$dE_k = v\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)dt = \frac{m_0 v \frac{dv}{dt}}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^3}dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)dt =$$

$$= d\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = d\,(mc^2) = c^2 dm. \tag{23.82}$$

Scałkujmy obie strony od chwili początkowej do t:

$$\int_0^t dE_k = c^2 \int_{m_0}^{m} dm$$

(gdyż w chwili początkowej masa była m_0). Po scałkowaniu otrzymamy

$$E_k = (m - m_0)\, c^2. \tag{23.83}$$

Zważywszy, że

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

więc wprowadzając tę wartość do wzoru (23.83) otrzymamy znany w teorii względności wzór na energię kinetyczną:

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \tag{23.84}$$

Rozwińmy wyrażenie w mianowniku według wzoru na dwumian Newtona:

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \dots$$

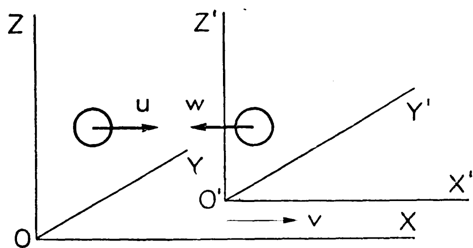
W takim razie na energię kinetyczną otrzymamy

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots, \tag{23.85}$$

a więc energia kinetyczna znika dla $v = 0$, a dla $c = \infty$ wzór ten przechodzi w zwykły wzór dynamiki klasycznej.

Jak wykazuje wzór (23.81), różnica energii między poruszającym się i spoczywającym ciałem równa się różnicy mas poruszającego się i spoczywającego ciała pomnożonej przez c^2. Wyraz m_0c^2 moglibyśmy nazwać energią wewnętrzną punktu materialnego, a wyraz mc^2 — jego energią całkowitą.

Aby zrozumieć znaczenie wyrazu m_0c^2, weźmy jako przykład zderzenie centralne całkowicie nieelastyczne dwóch kul o równych masach, o prędkościach $u = v$ i $w = -v$ w układzie, który nazwiemy nieruchomym (rys. 23.8). Po zderzeniu stracą one całkowicie energię, prędkości ich będą równe zeru. Weźmy teraz układ poruszający się względem pierwszego z prędkością v na prawo. Dla obserwatora



Rys. 23.8. Zderzenie całkowite nieelastyczne dwóch kul

w układzie ruchomym układ nieruchomy porusza się z prędkością — v. Prędkości kul w układzie ruchomym przed zderzeniem będą

$$u' = 0 \qquad w' = \frac{-v-v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = -\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}},$$

po zderzeniu zaś

$$u_1' = -v, \qquad w_1' = -v.$$

Zastosujmy do zderzenia się kul prawo zachowania pędu. Możemy napisać, oznaczając łączną masę obu kul przez M:

$$mu' + mw' = -Mv,$$

czyli

$$m \cdot 0 - \frac{2mv}{1+\frac{v^2}{c^2}} = -Mv, \tag{23.86}$$

gdzie M oznacza masę łączną obu kul po zderzeniu. Oczywiście

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.87}$$

Ponieważ druga kula poruszała się z prędkością w' w układzie ruchomym, zatem jej masa w układzie ruchomym

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{w'^2}{c^2}}}. \tag{23.88}$$

Podstawiając wyrażenia (23.87) i (23.88) do wzoru (23.86) otrzymamy

$$\frac{2m_0}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{w'^2}{c^2}}} = \frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{23.89}$$

skąd otrzymamy

$$\frac{M_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{4\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}}} = \frac{2m_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{23.90}$$

Skąd wreszcie otrzymujemy

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{23.91}$$

Ze wzoru (23.91) widać, że masa obu kul po zderzeniu nie równa się masie kul przed zderzeniem, lecz jest od niej większa. Przyrost masy

$$\Delta M = M_0 - 2m_0 = 2m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = \frac{\Delta E}{c^2} \qquad (23.92)$$

równa się zniszczonej przy zderzeniu energii kinetycznej podzielonej przez c^2. Odwrotnie,

$$\Delta E = \Delta M c^2. \qquad (23.93)$$

Energia kinetyczna, która zniknęła, powiększa masę. Możemy to uogólnić i powiedzieć, że energia E doprowadzona pod jakąkolwiek postacią powiększa masę o wielkość $\frac{E}{c^2}$, zaś energia wydana przez układ związana jest ze zmniejszeniem masy o $\frac{E}{c^2}$.

Zmiany energii ciał są zwykle zbyt małe, aby można było stwierdzić zmiany masy z tym związane. Lecz w jądrach atomowych, gdzie ilości energii doprowadzane lub wydawane są bardzo wielkie, zmiany mas są wyraźne. Ponieważ czynnik c^2 ma bardzo dużą wartość, łatwo stwierdzić, że masa jest równoważna ogromnym ilościom energii. Na przykład 1 gram masy jest równoważny w przybliżeniu $(3 \cdot 10^{10})^2$ ergów $= 2,15 \cdot 10^{10}$ kcal. Dla porównania można przytoczyć, że 1 kg dobrego węgla daje około 6000 kcal, zatem 1 g masy dostarczyć by mógł tyle energii, ile jej otrzymalibyśmy przy spaleniu trzech i pół milionów kg węgla.

Odwrotnie, każdej energii E musimy przypisywać masę

$$m = \frac{E}{c^2}. \qquad (23.94)$$

Zatem i promieniowaniu też należy przypisać takąż masę

Nietrudno obliczyć, że Słońce przez promieniowanie traci corocznie wiele milionów tonn swojej masy.

Zadania

23.1. Dwaj obserwatorzy A i B mijają się z prędkością 18 000 km/sec jeden względem drugiego. Jak oceni obserwator A długość 1 km odmierzoną przez obserwatora B w jego układzie (przyjąć prędkość światła c = 299 793 km/sec)?

Odpowiedź: 998,2 m.

23.2. Zjawisko odbywa się w ciągu 1 μsec w układzie, który zbliża się do Ziemi z prędkością 299 790 km/sec. Jak oceni długość trwania tego zjawiska obserwator na Ziemi?

Odpowiedź: 223,6 μsec.

23.3. Znaleźć wypadkową prędkości 50 000 km/sec i 100 000 km/sec skierowanych w tę samą stronę (można przyjąć $c = 300\,000$ km/sec).

Odpowiedź: 142 130 km/sec.

23.4. Jaka będzie prędkość elektronu rozpędzonego napięciem milion woltów? Jak się powiększy masa elektronu przy tej prędkości (przyjąć prędkość światła $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, masa spoczynkowa elektronu $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ g)?

Wskazówka: Praca sił pola $L = mc^2 - m_0c^2$; wyrazić następnie m przez masę spoczynkową.

Odpowiedź: $v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m_0c^2 + L}\right)^2} = 0{,}94\,c$; $m = 2{,}93\ m_0$.

23.5. Jak wzrośnie masa protonu rozpędzonego napięciem $U = 10^8$ woltów (masa spoczynkowa protonu $m_{po} = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g).

Odpowiedź: $m_p = 1{,}225\ m_{po}$.

23.6. Ile energii (w ergach i kilowatogodzinach) moglibyśmy otrzymać z 100 g masy przy jej całkowitej zamianie na energię (przyjąć $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec)?

Odpowiedź: $9 \cdot 10^{22}$ ergów $= 2{,}5 \cdot 10^9$ kWh.

23.7. Ile masy traci Słońce w przeciągu minuty, jeżeli 1 cm^2 powierzchni Ziemi otrzymuje od Słońca okrągło 2 cal energii promieniowania na minutę (odległość Ziemi do Słońca można przyjąć okrągło $150 \cdot 10^6$ km/?

Odpowiedź: $\Delta E = -263 \cdot 10^9$ kg/min $= -263 \cdot 10^6$ tonn/min.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Jaka jest zasada względności w mechanice klasycznej? Jakie układy nazywamy układami Galileusza?
2. Jaka jest zasada względności w szczególnej teorii względności? Czym jest ona uzasadniona?
3. Z jakich założeń wyprowadza się transformacje Lorentza? jak je otrzymać?
4. Na czym polega i jakim wzorem się wyraża skrócenie długości w poruszającym się układzie? podłużenie czasu?
5. Jak się dodaje prędkości w teorii względności? Jaką charakterystyczną cechę posiada odnośny wzór teorii względności?
6. Czym się różni wyrażenie drugiej zasady Newtona w teorii względności od wyrażenia jej w mechanice klasycznej?
7. Jaka jest treść zasady równoważności masy i energii? Jak otrzymać odnośny wzór?
8. Jakie jest wyrażenie na energię kinetyczną w teorii względności?

24. Kwanty energii

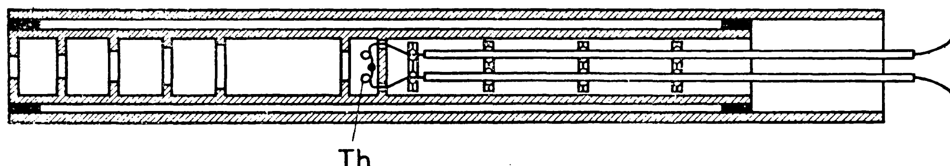
24.1. Promieniowanie ciała czarnego. Kwanty promieniowania. Jak już mówiliśmy o tym w pierwszej części książki, ciała ciemne ogrzane, np. kulka metalowa czy też kawałek żelaza, wysyłają tzw. promieniowanie cieplne. Promieniowanie to polega na wysyłaniu fal elektromagnetycznych, dłuższych od fal światła widzialnego. W miarę wzrostu temperatury promieniowanie wzrasta, lecz wciąż jest niewidzialne. Dopiero w temperaturze około 800°K, tzw. temperaturze czerwonego żaru, spostrzegamy, że kulka zaczyna świecić w ciemności. Barwa wysyłanego światła jest ciemnoczerwona. Lecz kulka nie przestaje wysyłać i promieniowania niewidzialnego o dłuższej fali. Przy dalszym wzroście temperatury zaczyna świecić coraz silniej, a jednocześnie barwa światła zmienia się na pomarańczową, żółtą i na końcu białą. Promieniowanie wysyłane przez wszystkie ciała w rozmaitych temperaturach nazywamy promieniowaniem temperaturowym.

Jeżeli to promieniowanie rozłożymy za pomocą np. pryzmatu kwarcowego, to prócz widma widzialnego stwierdzimy poza końcem fioletowym istnienie promieniowania niewidzialnego dla oka, zwanegon nadfioletowym, oraz poza czerwonym końcem widma — również istnienie promieniowania niewidzialnego zwanego promieniowaniem podczerwonym. Ilość energii przenoszonej w sekundzie przez promieniowanie zawarte w pewnym przedziale długości fal $\lambda, \lambda + \Delta\lambda$ można mierzyć za pomocą np. czułego poczernionego termoelementu lub bolometru.

Emisja promieniowania różnych ciał zależy od wielu czynników i w ogólności w bardzo zawiły sposób zależy od indywidualnych właściwości ciał. Tylko ciało doskonale czarne wykazuje prawidłowość i stosunkowo prostą zależność mocy wypromieniowanej od różnych czynników. Jeżeli chodzi o całkowitą energię wypromieniowywaną w sekundzie, to w tym wypadku zależy ona jedynie od temperatury. Ujmuje to prawo Stefana—Boltzmanna, o którym była mowa w I części książki.

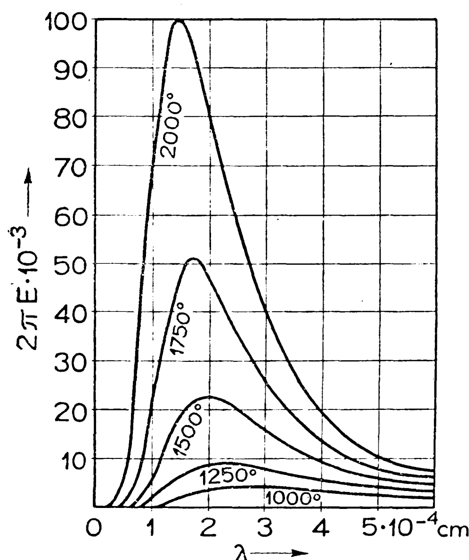
Lecz w promieniowaniu ciała czarnego mamy fale rozmaitej długości. Dla teorii bardzo ważną rzeczą jest stwierdzić, jaka energia przypada na rozmaite długości fal. Odnośne pomiary zostały wykonane przez Lummera i Pringsheima, którzy rozkładali promieniowanie wysyłane przez ciało doskonale czarne za

pomocą pryzmatów z kwarcu i fluorytu (gdyż szkło pochłania niektóre gatunki promieniowania) i badali — głównie za pomocą bolometru (przyrząd oparty na fakcie zmiany oporu poczernionego paska folii platynowej przy zmianie temperatury) — ilość energii przenoszonej przez fale zawarte w pewnym wąskim przedziale. Rysunek 24.1 przedstawia ciało doskonale czarne zbudowane przez



Rys. 24.1. Ciało doskonale czarne Lummera i Pringsheima
Th — ogniwo termoelektryczne służące do pomiaru temperatury

Lummera i Pringsheima (czyt. Pringshajma), za pomocą którego można było badać promieniowanie wysyłane przez nie w wysokich temperaturach. Rura porcelanowa poczerniona wewnątrz ogrzewana była prądem płynącym przez otaczającą ją rurę platynową. Przegródki widoczne na rysunku służyły do lepszego zatrzymywania promieniowania.



Rys. 24.2. Zależność natężenia promieniowania od długości fali w widmie promieniowania wysyłanego przez ciało czarne

Rozkład energii wysyłanej w jednostce czasu w widmie promieniowania ciała czarnego w zależności od długości fali i od temperatury dają krzywe na rys. 24.2. Jak widać z tych krzywych, ciało ogrzane wysyła dużo energii w postaci promieniowania podczerwonego. Przy wyższych temperaturach wzrasta ilość energii przypadającej na fale krótsze. Krzywa ma bardzo wyraźne maksimum, po czym bardzo szybko spada po stronie fal krótkich.

Próbowano wielokrotnie wyprowadzić drogą teoretyczną wzór, który by dawał rozkład energii w widmie ciała czarnego. Opierano się przy tym na prawach klasycznej elektrodynamiki. Ponieważ promieniowanie polega na wysyłaniu fal elektromagnetycznych, więc najwidoczniej w ciałach muszą istnieć ładunki, które mogą drgać dając początek falom. Wiadomo było już od dawna, że w atomach znajdują się elektrony, im zatem należało przypisać wzbudzenie promienio-

wania. Według klasycznej elektrodynamiki elektron poruszający się ruchem przyśpieszonym wysyła falę elektromagnetyczną kulistą, która w każdej sekundzie przenosi przez dowolną powierzchnię kulistą otaczającą elektron energię proporcjonalną do kwadratu przyśpieszenia. Jeżeli przyjmiemy, że elektron drga ruchem harmonicznym wewnątrz atomu, to ponieważ w ruchu harmonicznym stale istnieje przyśpieszenie (prócz oddzielnych dwóch chwil podczas każdego okresu), musi on wysyłać falę kulistą.

Jeżeli wyobrazimy sobie powłokę z dowolnego nieprzenikliwego dla promieniowania materiału, wewnątrz pustą, utrzymywaną w stałej wszędzie temperaturze T, to elektrony drgające w atomach będą wysyłać promieniowanie, które będzie pochłaniane przez inne atomy. Po pewnym czasie wewnątrz powłoki ustali się promieniowanie, które nazywamy promieniowaniem zrównoważonym. Wówczas każda część wewnętrznej powierzchni, każdy atom będzie tyleż energii pochłaniał, ile jej wysyła. Stosując prawa klasycznej elektrodynamiki do promieniowania zrównoważonego Rayleigh (czyt. Reili), a następnie Jeans (czyt. Dżinz), wyprowadzili wzór na gęstość energii u_λ (energii przypadającej na jednostkę objętości) wewnątrz zamkniętej powłoki o temperaturze T dla długości fali zawartej w przedziale λ, $\lambda + d\lambda$. Jest on następujący:

$$u_\lambda \, d\lambda = kc\,T\lambda^{-4}\,d\lambda. \tag{24.1}$$

Gdybyśmy zrobili w powłoce mały otworek, to otworek ten promieniowałby jak powierzchnia ciała doskonale czarnego. Według wzoru Rayleigha—Jeansa ilość energii $J_\lambda\,d\lambda$ przypadającej na przedział fal λ, $\lambda + d\lambda$, wypromieniowywanej w sekundzie przez jednostkę pola, jest

$$J_\lambda \, d\lambda = 2\pi kc\,T\lambda^{-4}\,d\lambda, \tag{24.2}$$

gdzie $k = 1{,}380 \cdot 10^{-16}$ erg · stop.$^{-1}$ jest to tzw. stała Boltzmanna, a c — prędkość światła w próżni.

Lecz widać od razu, że wzór ten nie może być zgodny z doświadczeniem, gdyż nie daje on żadnego maksimum. Według tego wzoru energia przypadająca na coraz krótsze fale byłaby coraz większa i rosłaby bezgranicznie dla $\lambda \to 0$. Tymczasem krzywa doświadczalna ma wyraźne maksimum, po przekroczeniu którego energia szybko maleje wraz z malejącą długością fali.

W roku 1896 Wien (czyt. Win) uczyniwszy pewne hipotezy, według których rozkład częstości promieniowania powinien być analogiczny do makswelowskiego rozkładu prędkości drobin w gazie, wyprowadził wzór

$$J_\lambda \, d\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \, d\lambda, \tag{24.3}$$

gdzie e jest zasadą logarytmów naturalnych, a c_1 i c_2 są to stałe.

Lecz wzór ten w przybliżeniu zgadza się z doświadczeniem tylko dla krótkich fal (poza maksimum) promieniowania temperaturowego. Natomiast wzór Rayleigha—Jeansa stosuje się znowu w przybliżeniu do fal długich, podczerwonych

W roku 1900 Planck wyprowadził wzór, który bardzo dobrze zgadzał się z danymi doświadczalnymi:

$$J_\lambda\, d\lambda = c_1 \frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}\, d\lambda, \tag{24.4}$$

gdzie stała $c_1 = 3{,}74 \cdot 10^{-5}$ erg · cm² · sec⁻¹, $c_2 = 1{,}439$ cm · stop. Można stwierdzić, że dla fal długich i wysokich temperatur wzór ten przechodzi we wzór Rayleigha—Jeansa. Gdy mianowicie $\lambda T \gg c_2$, to przy rozwinięciu na szereg funkcji $e^{\frac{c_2}{\lambda T}}$:

$$e^{\frac{c_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{c_2}{\lambda T} + \frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{\lambda T}\right)^2 + \ldots, \tag{24.5}$$

możemy zaniedbać dalsze wyrazy rozwinięcia począwszy od trzeciego. Otrzymamy wtedy

$$J_\lambda\, d\lambda = c_1 \frac{\lambda^{-5}}{\frac{c^2}{\lambda T}}\, d\lambda = \frac{c_1}{c^2}\, \lambda^{-4}\, T\, d\lambda. \tag{24.6}$$

Dla fal krótkich, gdy $\lambda T \ll c_2$, jest $e^{\frac{c_2}{\lambda T}} \gg 1$ i można wtedy opuścić w mianowniku jedność wobec dużej wielkości $e^{\frac{c_2}{\lambda T}}$.

Otrzymamy wtedy

$$J_\lambda\, d\lambda = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} d\lambda, \tag{24.7}$$

a więc wzór Wiena.

Jak wyżej wspomniano, wzór Plancka bardzo dobrze zgadza się z doświadczeniem. Lecz dla jego wyprowadzenia Planck musiał poczynić pewne założenia sprzeczne z klasyczną elektrodynamiką. Przyjmował on tak jak i jego poprzednicy, że fale elektromagnetyczne są wysyłane przez elektrony drgające w atomach, które można uważać za oscylatory harmoniczne. Według klasycznej elektrodynamiki energia takich oscylatorów może się zmieniać w sposób ciągły, mogą one wysyłać fale elektromagnetyczne, jak również absorbować energię padających na nie fal elektromagnetycznych w sposób ciągły. Planck dla otrzymania swego wzoru musiał założyć, że oscylatory mogą posiadać energię równą tylko wielokrotności pewnej najmniejszej porcji energii ε, a więc

$$\varepsilon, 2\varepsilon, \ldots, n\varepsilon, \ldots$$

Przy tym oscylator energię promieniowania może wysyłać również tylko porcjami, tzw. kwantami. Przy wysłaniu energii oscylator przechodzi od jednego stanu do drugiego skokiem. Wielkości kwantów energii promieniowania, tych jak gdyby atomów energii, nie są jednakowe, zależą od częstości promieniowania. Mianowicie

$$\varepsilon = h\nu, \tag{24.8}$$

gdzie h jest wielkością stałą mającą wymiar: energia · czas (iloczyn energii przez czas nazywamy działaniem). Wymiar tej wielkości równa się wymiarowi momentu pędu. Stała ta nazywana jest obecnie stałą Plancka. Wielkość tej stałej jest dobrze obecnie znana z rozmaitych pomiarów. Mianowicie

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}\ \text{erg} \cdot \text{sec}.$$

Ponieważ $\lambda = \frac{c}{\nu}$, zatem możemy również napisać

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}. \tag{24.9}$$

Jak widać z tego wzoru, kwanty promieniowania są tym mniejsze, im fale są dłuższe. W falach radiowych są tak małe, że nieciągłość nie daje się wcale odczuwać. W falach świetlnych są już wyraźne, a dochodzą do bardzo znacznych wielkości w promieniach rentgenowskich. Tabela 24. 1 podaje energię kwantu dla fal różnej długości.

Stałe c_1 i c_2 we wzorze Plancka wyrażają się przez stałą Boltzmanna k i stałą h w sposób następujący:

$$c_1 = 2\pi h c^2, \qquad c_2 = \frac{h}{k}\, c,$$

gdzie $c = 2{,}99793 \cdot 10^{10}$ cm/sec; jest prędkością światła w próżni.

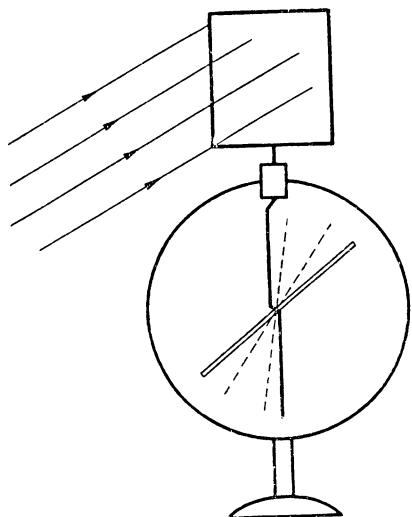
Tabela 24.1

Energia kwantów promieniowania

Długość fali	Energia $h\nu$	
	w ergach	w elektronowoltach
10 m	$1{,}98 \cdot 10^{-19}$	$1{,}24 \cdot 10^{-7}$
7000 Å (światło czerwone)	$2{,}83 \cdot 10^{-12}$	1,77
4000 Å (światło fioletowe)	$4{,}96 \cdot 10^{-12}$	3,10
1 Å (promienie Röntgena)	$1{,}98 \cdot 10^{-8}$	$1{,}24 \cdot 10^{4}$
0,001 Å	$1{,}98 \cdot 10^{-5}$	$1{,}24 \cdot 10^{7}$

24.2. Zjawisko fotoelektryczne. Zjawisko to zostało wykryte przez Henryka Hertza przy doświadczeniach nad wywoływaniem fal elektromagnetycznych. Zauważył on mianowicie, że światło nadfioletowe padające na przerwę iskrową ułatwia wyładowanie. Następnie Stoletow w Moskwie i Hallwachs w Niemczech stwierdzili, że światło nadfioletowe padające na ujemnie naładowany przewodnik powoduje utratę ładunku, nie powoduje zaś rozładowania ciała dodatnio naelektryzowanego. Bardzo łatwo wykonać doświadczenie wykazujące to zjawisko. Weźmy wyczyszczoną i poamalgamowaną płytkę z blachy cynkowej i umieśćmy ją na gałce elektroskopu. Naelektryzujmy ją za pomocą laski ebonitowej potartej kawałkiem wełny, a więc ujemnie. Wskazówka elektroskopu, czy też jego listki

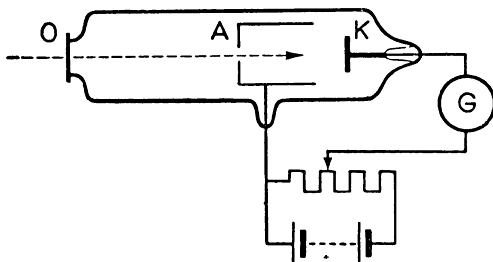
odchylą się. Skierujmy teraz strumień światła z lampy łukowej (bez soczewki szklanej) na powierzchnię płytki (rys. 24.3). Natychmiast wychylenie elektroskopu zacznie się szybko zmniejszać, co jest dowodem wyładowania płytki. Naelektryzujmy następnie płytkę za pomocą laski szklanej potartej kawałkiem skóry. W tym przypadku płytka uzyska ładunek dodatni. Teraz mimo naświetlenia światłem lampy łukowej płytka się nie wyładuje. Płytka traci więc ładunek pod wpływem światła, gdy jest ujemnie naładowana, nie traci go zaś, gdy ma ładunek dodatni.



Rys. 24.3. Zjawisko fotoelektryczne

Jeżeli skierować silny strumień światła nadfioletowego na płytkę metalową nienaelektryzowaną, to ładuje się ona dodatnio.

Nie ulega więc wątpliwości, że pod wpływem światła metale tracą ładunek ujemny. Pomiary stosunku $\frac{e}{m}$ za pomocą pomiarów odchylenia w polu magnetycznym wykazały, że wylatujące ładunki są elektronami. Do studiowania tego zjawiska fizycy stosowali często następujące urządzenie: bańka szklana zawierająca dwie elektrody A i K (rys. 24.4) była zaopatrzona w przykitowane okienko z płytki kwarcowej O (płytka kwarcowa przepuszcza dobrze światło nadfioletowe). Bańkę odpompowuje się jak najstaranniej. Między płytkę A i K włącza się baterię wytwarzającą między nimi różnicę potencjałów. Po naświetleniu płytki K promieniami nadfioletowymi zaczyna płynąć przez bańkę prąd, którego natężenie powiększa się ze wzrostem napięcia baterii, jeżeli płytka K jest katodą. Przy pewnym określonym napięciu osiąga stan nasycenia. Jest to dowodem, że wszystkie elektrony wyzwolone przez światło w jednostce czasu dobiegają do anody. Doświadczenie wykazało, że ten prąd nasycenia, a więc i liczba elektronów wyzwalanych przez światło jest dokładnie proporcjonalna do natężenia światła. Natomiast prędkości wyrzucanych elektronów zupełnie nie są związane z natężeniem padającego światła. Aby móc ocenić prędkość wyrzucanych elektronów, stosuje się napięcie przeciwnie przyłożone: plus do katody, minus do anody. Wtedy prąd między



Rys. 24.4. Prąd fotoelektryczny w próżni. Pomiar maksymalnej prędkości elektronów

elektrodami maleje i przy dostatecznie wysokim napięciu U przestaje płynąć zupełnie. Wtedy zatem pole zatrzymuje wszystkie elektrony. Im większa prędkość emitowanych elektronów, tym większe musi być przyłożone napięcie wstrzymujące w myśl równania

$$eU = \frac{mv^2_{max}}{2}. \tag{24.10}$$

Z równania tego, znając U, można określić prędkość emitowanych elektronów. Pomiary wykazały, że prędkość maksymalna tzw. fotoelektronów zależy jedynie od długości fali światła, którym płytka K jest naświetlona. Ten niezrozumiały na pozór fakt został wyjaśniony przez Einsteina, według którego prędkość emitowanych fotoelektronów dana jest przez równanie

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - W, \tag{24.11}$$

gdzie $\frac{mv^2}{2}$ oznacza energię kinetyczną emitowanego elektronu, $h\nu$ — energię padającego kwantu promieniowania, W — pracę wyjścia. Aby wydobyć elektron z warstewki granicznej, tak aby się on znalazł na zewnątrz metalu, trzeba wykonać pracę rzędu kilku elektronowoltów. Zatem dla metali możemy napisać równanie

$$\frac{mv^2}{2} + W = h\nu. \tag{24.12}$$

Według równania Einsteina kwant światła padający na powierzchnię metalu zostaje w całości pochłonięty, jego energia zaś zostaje zużyta na 1) wykonanie pracy wyjścia i 2) nadanie elektronowi prędkości określonej równaniem (24.12). Jeżeli się naświetla powierzchnię metalu promieniowaniem o coraz dłuższej fali, czyli o coraz mniejszej częstości, wtedy dochodzi się wreszcie do takiej częstości ν_0, przy której energia kwantu będzie dokładnie równa pracy wyjścia:

$$h\nu_0 = W. \tag{24.13}$$

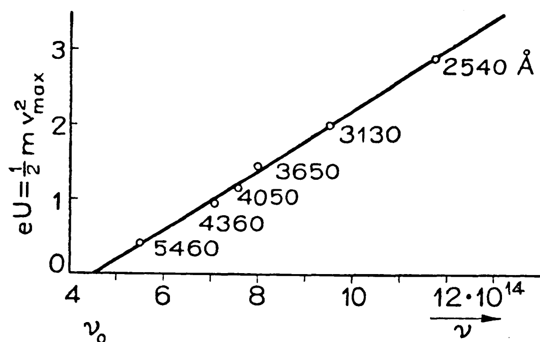
Przy jeszcze mniejszej częstości fotoelektrony nie będą w ogóle emitowane. Istotnie, doświadczenie stwierdza, że zjawisko fotoelektryczne jest wywoływane jedynie przez promieniowanie o częstości większej od pewnej częstości granicznej ν_0, czyli o fali krótszej od pewnej fali granicznej λ_0.

Podstawiając wartość (24.13) do równania (24.12) otrzymujemy

$$\frac{mv^2_{max}}{2} = h(\nu - \nu_0). \tag{24.14}$$

To równanie wykazuje, że energia $\frac{mv^2_{max}}{2}$ jest liniową funkcją częstości padającego promieniowania.

Millikan wykonał w r. 1916 bardzo dokładne doświadczenia, w których badał zależność energii kinetycznej fotoelektronów od częstości padającego promieniowania. Stwierdził on, że istotnie energia kinetyczna fotoelektronów jest liniową funkcją częstości promieniowania. Ze swoich pomiarów mógł Millikan wyliczyć wartość stałej Plancka h w sposób następujący: jeżeli na osi odciętych odkładać częstości użytego światła, a na osi rzędnych — maksymalną energię kinetyczną fotoelektronów, to otrzymuje się zgodnie z równaniem (24.14) linię prostą, która przecina oś odciętych w punkcie ν_0 (rys. 24.5). Tangens kąta nachylenia tej prostej do osi odciętych daje wielkość h, którą w ten sposób można wyznaczyć. Zamiast $\frac{mv^2_{max}}{2}$ zwykle odkłada się na osi rzędnych iloczyn eU, gdzie U jest napięciem sprowadzającym prąd przenoszony przez fotoelektrony do zera, ponieważ U łatwo zmierzyć bezpośrednio, a e jest znane z innych pomiarów. Millikan posługując się zbyt małą wartością na ładunek elektronu otrzymał na h wartość $6{,}59 \cdot 10^{-27}$ erg · sec. Po poprawieniu wartości na e otrzymuje się



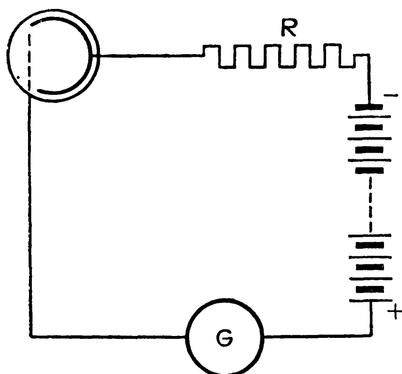
Rys. 24.5. Zależność maksymalnej prędkości fotoelektronów od częstości padającego promieniowania. Wyznaczenie h

$$h = 6{,}62 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec.}$$

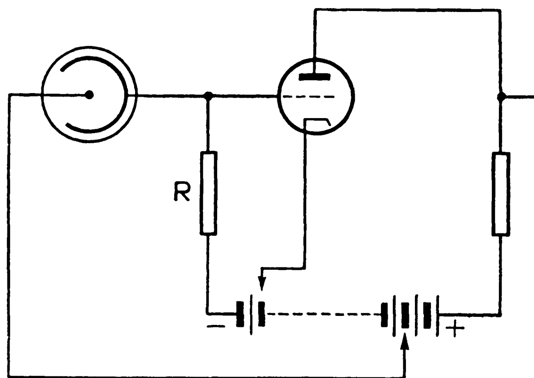
Liczba ta, zgodna w zupełności z wynikami pomiarów z innych dziedzin, świadczy o słuszności równania Einsteina.

24.3. Komórka fotoelektryczna. Zjawisko fotoelektryczne znalazło praktyczne zastosowanie w przyrządach zwanych komórkami fotoelektrycznymi. Komórka fotoelektryczna jest zbudowana w sposób następujący: w bańce szklanej lub kwarcowej kulistego lub cylindrycznego kształtu, wypróżnionej, połowa lub większa część powierzchni pokryta jest metalem łatwo emitującym pod wpływem światła elektrony. Najczęściej do tego celu używane są metale alkaliczne potas i cez. Do celów telewizyjnych używa się zazwyczaj komórek cezowych, wrażliwych na te same gatunki światła, na które najbardziej wrażliwe jest oko ludzkie. Wtopiony do bańki drucik łączący się z warstewką światłoczułą jest wyprowadzony na zewnątrz. Naprzeciwko światłoczułej warstwy znajduje się drucik metalowy, od którego również idzie odprowadzenie na zewnątrz. Wnętrze bańki jest najczęściej dokładnie opróżnione z powietrza. Komórkę łączy się z baterią jak na rys. 24.6. Gdy w obwód zostanie włączony czuły galwanometr, wychyla się on przy naświetleniu komórki i wykazuje przepływ prądu proporcjo-

nalnego do natężenia padającego na komórkę światła. Zmienne natężenia światła można przetworzyć na zmienne prądy elektryczne, za pomocą których uzyskuje się zmienny potencjał na oporze, jak na rys. 24. 7, a następnie można wzmocnić te wahania potencjału za pomocą wzmacniacza lampowego.



Rys. 24.6. Komórka fotoelektryczna z galwanometrem



Rys. 24.7. Komórka fotoelektryczna ze wzmacniaczem

24.4. Fotony. Jak już o tym mówiliśmy, przy wyprowadzeniu wzoru na promieniowanie ciała doskonale czarnego Planck uczynił rewolucyjne założenie, że energia promieniowania może być emitowana i absorbowana tylko porcjami, kwantami. Na dalszy rozwój naszych pojęć odnoszących się do promieniowania wpłynęły nowo odkryte i zbadane zjawiska, przede wszystkim zjawisko fotoelektryczne. Jak to już poprzednio opisaliśmy, gdy fala o odpowiedniej częstości ν pada na powierzchnię metalu, zaczynają z niego wylatywać elektrony, zwane fotoelektronami, których prędkość określona jest wzorem

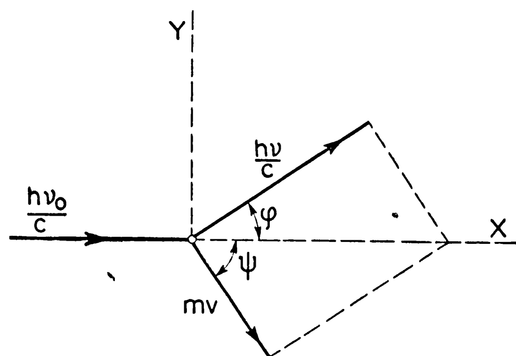
$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - W, \tag{24.15}$$

gdzie przez W oznaczyliśmy pracę wyjścia z powierzchni metalu. Zatem energia kwantu pochłoniętego $h\nu$ musi być co najmniej równa pracy wyjścia W. Gdybyśmy przyjęli założenie, że energia kwantów wysyłanych przez atomy rozchodzi się na wszystkie strony, że przenosi ją fala kulista, to łatwo obliczyć, że przy bardzo słabym promieniowaniu energia przypadająca na tak małą powierzchnię jak powierzchnia atomu może być znacznie mniejsza od pracy wyjścia. Zatem przy odpowiednim osłabieniu promieniowania fotoelektrony nie powinny być wcale emitowane. Doświadczenie tego wniosku nie potwierdza. Promieniowanie bez względu na to, czy jest silne, czy też bardzo słabe, zawsze wywołuje emisję fotoelektronów, a tylko ich ilość zależy od natężenia światła.

Można by przypuścić, że w danym malutkim obszarze gromadzi się energia pochłaniana z padającej fali, dopóki nie wystarczy jej ilości do wyrwania elektronu

z powierzchni. Robiono doświadczenia, przy których promieniowanie użyte do wzbudzenia zjawiska fotoelektrycznego było tak słabe, że według obliczeń trzeba by czasu rzędu kilkudziesięciu minut albo nawet kilku godzin, aby w danym malutkim obszarze nagromadziła się dostateczna energia. Tymczasem zjawisko fotoelektryczne rozpoczyna się natychmiast, gdy tylko promienie padną na naświetlaną powierzchnię. Energia nie może być zatem równomiernie rozłożona na całą powierzchnię kulistą stanowiącą czoło fali, musi być ona skoncentrowana w pewnych bardzo małych obszarach czoła fali. Subtelne doświadczenia Joffego nad zjawiskiem fotoelektrycznym wywoływanym przez bardzo słabe promieniowanie Röntgena również wykazały, że energia kwantów musi być skoncentrowana w bardzo małej przestrzeni. Inne zjawiska, również niezrozumiałe z punktu widzenia równomiernego rozkładu energii na całe czoło fali, jak np. zjawisko Comptona, o którym będzie mowa poniżej, potwierdziły te przypuszczenia. Przyjmujemy zatem obecnie, że kwanty energii wysyłane przez promieniujące atomy są jak gdyby pociskami biegnącymi w określonym kierunku. Nazywamy je *fotonami*. Każdy foton niesie energię $h\nu$. Jak wynika z zasady równoważności energii i masy, należy każdemu fotonowi przypisać masę $\frac{h\nu}{c^2}$ oraz pęd $\frac{h\nu}{c}$, gdzie c oznacza prędkość światła w próżni.

24.5. Zjawisko Comptona. W r. 1922 H. A. Compton (czyt. Kompton) odkrył zjawisko, które dało się wytłumaczyć tylko za pomocą korpuskularnego ujęcia natury promieniowania. Zjawisko to jest następujące: jeżeli naświetlimy jakieś ciało promieniami Röntgena, to ciało to staje się wtórnym źródłem rozproszonych promieni rentgenowskich. Przy naświetlaniu grafitu krótkofalowymi (twardymi) promieniami Compton stwierdził w promieniowaniu rozproszonym istnienie dłuższych fal, a więc o mniejszej częstości niż promienie padające. Prawie jednocześnie Compton i Debye (czyt. Debaj) podali wytłumaczenie tego zjawiska opierając się na czysto korpuskularnym pojmowaniu promieniowania. Przeprowadzimy tu dla ilustracji sposobu rozumowania uproszczony rachunek (ścisły rachunek opiera się na relatywistycznych wzorach na pęd i energię elektronu).



Rys. 24.8. Zderzenie fotonu z elektronem

Postępujemy przy rachowaniu tak, jak gdyby foton i elektron były kulami doskonale sprężystymi, które się ze sobą zderzają, przy czym zachowana jest zasada zachowania pędu i zasada zachowania energii. Foton zatem o energii

$h\nu_0$ uderza w spoczywający elektron (rys. 24.8). Wskutek zderzenia elektron zostaje odrzucony z prędkością v pod kątem ψ do pierwotnego kierunku fotonu, foton zaś zbacza o kąt φ od swego pierwotnego kierunku. Przy zderzeniu foton oddaje część swego pędu i energii elektronowi. Ponieważ energia ε fotonu jest związana z jego częstością ν wzorem $\varepsilon = h\nu$, zatem zmniejszenie energii uzewnętrznia się jako zmniejszenie częstości, czyli podłużenie długości fali.

Napiszmy odnośne równania: pierwsze wyrażać będzie zasadę zachowania energii

$$h\nu_0 = h\nu + \frac{mv^2}{2}. \qquad (24.16)$$

Następnie musimy napisać, że suma składowych pędu w kierunku ruchu fotonu oraz w kierunku do niego prostopadłym przed zderzeniem równa się sumie składowych pędu po zderzeniu

$$\frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu}{c}\cos\varphi + mv\cos\psi, \qquad (24.17)$$

$$0 = \frac{h\nu}{c}\sin\varphi + mv\sin\psi. \qquad (24.18)$$

Oznaczmy $h\nu_0 = \varepsilon$, zaś $h\nu = \varepsilon - \Delta\varepsilon$. Możemy wtedy równania (24.16), (24.17) i (24.18) przepisać w następującej postaci:

$$\varepsilon = \varepsilon - \Delta\varepsilon + \frac{mv^2}{2}, \qquad (24.19)$$

$$\frac{\varepsilon}{c} - \frac{\varepsilon - \Delta\varepsilon}{c}\cos\varphi = mv\cos\psi, \qquad (24.20)$$

$$-\frac{\varepsilon - \Delta\varepsilon}{c}\sin\varphi = mv\sin\psi. \qquad (24.21)$$

Podnosząc dwa ostatnie równania do kwadratu i dodając otrzymamy

$$\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon - \Delta\varepsilon}{c}\right)^2 - 2\,\frac{\varepsilon(\varepsilon - \Delta\varepsilon)}{c^2}\cos\varphi = m^2v^2. \qquad (24.22)$$

Z równania (24.19) możemy napisać

$$m^2v^2 = 2m\,\Delta\varepsilon. \qquad (24.23)$$

Wstawiając tę wartość do równania (24.22) i zaniedbując $\Delta\varepsilon$ wobec ε otrzymamy

$$\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2(1 - \cos\varphi) = m\,\Delta\varepsilon, \qquad (24.24)$$

skąd

$$\Delta\varepsilon = \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 \frac{1 - \cos\varphi}{m}. \qquad (24.25)$$

Podstawiając z powrotem $\varepsilon = h\nu_0$ otrzymamy:

$$-h\,\Delta\nu = \frac{(h\nu_0)^2}{mc^2}(1-\cos\varphi), \tag{24.26}$$

$$-\Delta\nu = \frac{h\nu_0^2}{mc^2}(1-\cos\varphi). \tag{24.27}$$

Wprowadzając teraz długość fali

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} \tag{24.28}$$

i zważywszy, że

$$\Delta\lambda = -\frac{c}{\nu_0^2}\Delta\nu, \tag{24.29}$$

otrzymamy

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi), \tag{24.30}$$

gdzie

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = 0{,}0242\ \text{Å}. \tag{24.31}$$

Jest to tzw. długość komptonowskiej fali dla elektronu. Można zatem napisać

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1-\cos\varphi).$$

Na prędkość odrzuconego elektronu z wzorów (24.23) i (24.25) otrzymamy

$$v = 2\frac{h\nu_0}{mc}\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{24.32}$$

Ten ostatni jest tylko wzorem przybliżonym. Rachunek relatywistyczny daje na przesunięcie fali wzór

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1-\cos\varphi), \tag{24.33}$$

gdzie m_0 jest tzw. masą spoczynkową elektronu, prędkość zaś można wyliczyć z wzoru na energię kinetyczną odrzuconego elektronu:

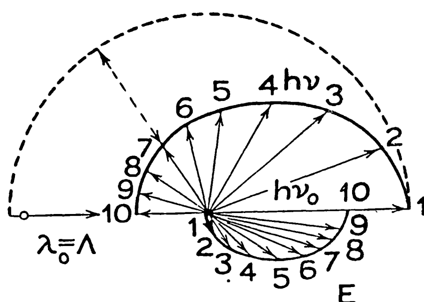
$$E_k = h\nu_0\frac{2\dfrac{h\nu_0}{m_0c^2}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{1+2\dfrac{h\nu_0}{m_0c^2}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}. \tag{24.34}$$

Przy tym kąt odrzutu elektronu ψ jest związany z kątem φ równaniem

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{1}{1+\dfrac{h\nu_0}{m_0c^2}}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}. \tag{24.35}$$

Wzory te najzupełniej zgadzają się z wynikami pomiarów. Zatem możemy powiedzieć, że w zjawisku Comptona fotony zachowują się zupełnie jak kule przy zderzeniu sprężystym. Zjawisko to jest tym wyraźniejsze, im fala krótsza. Rysunek 24.9 podaje wielkości rozproszonych fotonów oraz odpowiadające im prędkości odrzuconych elektronów.

Rozumowanie powyższe można stosować do przypadków, gdy fotony zderzają się z elektronami tak słabo związanymi z atomami, że ich energię wiązania można zaniedbać wobec energii fotonu. Wtedy tylko można je uważać za swobodne. W przeciwnym razie przy zderzeniu się z elektronem, który jest bardzo silnie związany z atomem o dużej masie, nie zachodzi wymiana pędów i energii, rozproszony foton ma taką samą długość fali jak padający. Toteż w rozproszonych promieniach rentgenowskich obserwuje się tak promieniowanie o nie zmienionej fali, jak i o zmienionej. Promieniowanie o zmienionej długości fali ma tym większe natężenie, im lżejsze są rozpraszające atomy, a więc im słabiej związane są elektrony.



Rys. 24.9. Rozkład energii rozproszonych fotonów i odrzuconych elektronów w zjawisku Comptona

Zadania

24.1. Próg fotoelektryczny dla wolframu jest 2300 Å. Jaka jest maksymalna energia kinetyczna elektronów wyrzucanych z powierzchni wolframu przez promieniowanie nadfioletowe o długości fali $\lambda = 1800$ Å?

O d p o w i e d ź: 1,5 eV.

24.2. Przy oświetleniu powierzchni miedzi światłem należącym do linii widmowej $\lambda = 2537$ Å lampy rtęciowej, potencjał hamujący elektrony ma wartość 0,24 V. Jaka jest praca wyjścia W oraz próg fotoelektryczny λ_0 dla miedzi?

O d p o w i e d ź: $W = 4{,}65$ eV, $\lambda_0 = 2669$ Å.

24.3. Praca wyjścia dla cezu $W = 1{,}38$ eV. Jaki jest próg fotoelektryczny dla cezu i jaką maksymalną prędkość będą miały elektrony wylatujące pod wpływem światła czerwonego o długości fali $\lambda = 6500$ Å?

O d p o w i e d ź: 9128 Å; $E_k = 0{,}53$ eV; $v = 4{,}3 \cdot 10^7$ cm/sec = 430 km/sec.

24.4. Jaką energię będą miały fotony promieniowania nadfioletowego o długości fali 2400 Å oraz światła pomarańczowego o długości fali 6000 Å (można przyjąć na prędkość światła $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec; $h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg · sec)? Wyrazić energię w ergach i elektronowoltach.

O d p o w i e d ź: 1) $8{,}3 \cdot 10^{-12}$ ergów = 5,2 eV; 2) $3{,}31 \cdot 10^{-12}$ ergów = 2,1 eV.

24.5. Przy jakiej temperaturze T średnia energia ruchu cieplnego równa jest energii fotonów promieniowania podczerwonego o długości fali $\lambda = 10\,000$ Å?

O d p o w i e d ź: $T = 9594$°K.

24. 6. Znaleźć pęd fotonu o długości fali $\lambda = 5000$ Å. Obliczyć pęd drobiny wodoru w temperaturze 300°K i porównać z pędem fotonu. Ile razy pęd fotonu będzie mniejszy od pędu drobiny? Wskazówka: Wyrazić pęd drobiny przez jej energię kinetyczną.

Odpowiedź: Pęd fotonu $1{,}32 \cdot 10^{-22}$ g · cm/sec; pęd drobiny wodoru $= \sqrt{2E_kM} = \sqrt{3kTM} = 6{,}45 \cdot 10^{-19}$ g · cm/sec. Koło 4900 razy.

24.7. Przy jakiej długości fali pęd fotonu równa się pędowi drobiny wodoru przy temperaturze 300° K?

Odpowiedź: $\lambda = 1{,}03$ Å.

24.8. Porównać energię fotonu o długości fali $\lambda = 6600$ Å z energią drobiny wodoru przy temperaturze 300° K.

Odpowiedź: Energia fotonu $= 3 \cdot 10^{-12}$ erga, energia drobiny wodoru $= 6{,}2 \cdot 10^{-14}$ ergów.

24. 9. Wiązka promieni rentgenowskich o długości fali $\lambda = 0{,}708$ Å rozpraszana jest przez blok węgla. Jaka będzie zmiana długości fali promieniowania rozproszonego (komptonowskiego) pod kątem 90°

Odpowiedź: $\Delta\lambda = 0{,}0242$ Å.

24.10. Jaki będzie kąt ψ między torem odrzuconego elektronu i padającym fotonem w poprzednim zadaniu i jaka będzie energia kinetyczna elektronu?

Odpowiedź: $\psi = -44°\ 14'$; $E_k = 9{,}58 \cdot 10^{-10}$ ergów $= 599$ eV.

24.11. Promienie rentgenowskie o długości fali $\lambda = 0{,}124$ Å padają na blok węgla. Jaka będzie długość fali rozproszonego promieniowania w kierunku przeciwnym do kierunku padania (180°) i jaka będzie energia odrzuconego elektronu?

Odpowiedź: $\lambda' = 0{,}172$ Å; $E_k = 2{,}816 \cdot 10^4$ eV.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Jakie są własności promieniowania ciała czarnego? Jakie założenia trzeba przyjąć, aby wytłumaczyć prawa emisji promieniowania ciała czarnego?
2. Na czym polega zjawisko fotoelektryczne? Od czego zależy ilość i prędkość emitowanych elektronów? Jak się ta zależność wyraża?
3. Jak jest zbudowana komórka fotoelektryczna? Jak się ją łączy ze wzmacniaczem?
4. Jaka jest treść pojęcia fotonu? Jaka jest energia, pęd i masa fotonu?
5. Na czym polega zjawisko Comptona? Jak można obliczyć zmianę długości fali przy rozproszeniu comptonowskim?

25. Widma liniowe. Budowa atomów

25.1. Zagadnienie linii widmowych. W rozdziale 19.26 mówiliśmy już o liniach widmowych. Gdy gaz lub para zostaną pobudzone do świecenia np. przez przepływ prądu elektrycznego, to światło przez nie wysyłane i rozszczepione na składniki w spektroskopie daje ciąg ostrych, wąskich linii, świadczących o tym, że w tym świetle istnieją fale tylko o pewnych określonych długościach. Długość wysyłanej fali w próżni albo w powietrzu związana jest z częstością drgania wzorem

$$\lambda = \frac{c}{\nu},$$

gdzie c jest prędkością światła w powietrzu, a ν — częstością drgania wzbudzającego fale. Od czasów teorii Maxwella i sprawdzenia jej przez Hertza wiemy, że fale świetlne są falami elektromagnetycznymi. Jak łatwo stwierdzić, długości fal świetlnych odpowiadają nadzwyczaj wielkim częstościom drgania. Weźmy jako przykład falę światła barwy pomarańczowej 6000 Å $= 6 \cdot 10^{-5}$cm. Prędkość fali światła w przybliżeniu jest

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}.$$

A więc częstość drgania wzbudzającego tę falę wynosi

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}}{6 \cdot 10^{-5} \text{ cm}} = 5 \cdot 10^{14} \text{ sec}^{-1}.$$

Już dawno nie ulegało wątpliwości, że wysyłanie fal świetlnych należy przypisać drgającym w atomach elektronom. Ale powstaje natychmiast pytanie: jeżeli elektron drga z pewną częstością wysyłając fale określonej długości, to skąd się bierze tak wiele linii widmowych? Przypuszczano z początku, że elektron może drgać z różnymi częstościami na podobieństwo struny drgającej. Wiemy, że struna drga zwykle tak, że wydaje nie tylko ton zasadniczy o najniższej częstości f, ale również tzw. tony harmoniczne o częstościach $2f$, $3f$ itd. Lecz dwukrotnie większej częstości drgania odpowiada dwa razy krótsza fala, trzy razy większej częstości — trzy razy krótsza fala itd. Tymczasem już w przypadku najprostszego atomu, wodoru obserwujemy zupełne odstępstwo od takich stosunków. Czerwona linia wodoru ma długość w przybliżeniu 6563 Å. Odpowiada ona częstości $\nu =$

$= 4{,}571 \cdot 10^{14}$. Następna częstość $2\nu = 9{,}142 \cdot 10^{14}$ powinna dawać falę dwa razy krótszą, a więc 3281,5 Å, następna — $3\nu = 13{,}713 \cdot 10^{14}$ powinna powodować powstanie fali 2188 Å itd., tymczasem w spektroskopie obserwujemy linie 4861 Å, 4340 Å. To znaczy, że długości wysyłanych fal najwidoczniej podlegają zupełnie innemu prawu, o którym będzie mowa w następnym paragrafie.

25.2. Model atomu Bohra. Jak już wspomniano, wodór pobudzony do świecenia wysyła światło, które zbadane za pomocą spektroskopu okazuje się złożone z czterech linii widzialnych: czerwonej, niebieskiej i dwóch fioletowych. Oznacza się je zwykle symbolami: H_α, H_β, H_γ H_δ. Ich długości fal są następujące:

H_α	H_β	H_γ	H_δ
6562,78 Å	4861,32 Å	4340,46 Å	4101,74 Å

W roku 1885 Balmer znalazł wzór empiryczny, który daje długości fal odpowiadające tym liniom. Wzór ten był następujący:

$$\lambda = 3645{,}6 \cdot 10^{-8} \frac{n^2}{n^2 - 4} \text{ cm}. \tag{25.1}$$

Dawał on bardzo dokładnie wszystkie znane wówczas długości fal linij wodoru przy podstawieniu za n kolejnych liczb całkowitych począwszy od 3. Wzór ten daje tzw. serię linij zwaną serią Balmera. Obecnie piszemy ten wzór w nieco innej postaci:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{25.2}$$

gdzie $n = 3, 4, 5, \ldots$, a stała $R = 109\,677{,}69 \text{ cm}^{-1}$ nosi nazwę stałej Rydberga

Już Balmer przypuszczał, że w widmie wodoru muszą istnieć linie o długościach fali wynikających z wzoru

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 4, 5, 6, \ldots \tag{25.3}$$

Istnienie takich linij w podczerwieni istotnie wykazał później Paschen (czyt. Paszen). Jest to tak zwana seria Paschena.

Następnie stwierdzono również, że istnieje w widmie wodoru seria, nazwana serią Lymana (czyt. Lajmana), której długości fal wyznacza wzór

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 2, 3, 4, \ldots \tag{25.4}$$

Na mocy tak zwanej zasady kombinacji Ritza można było przypuszczać, że wzór

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad \text{gdzie} \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, 3, \ldots \\ n &= 2, 3, 4, \ldots \\ n &> k. \end{aligned} \tag{25.5}$$

powinien dawać wszystkie możliwe serie widmowe wodoru.

W r. 1913 fizyk duński Niels Bohr stworzył teorię, z której zdołał wyprowadzić powyższe wzory. Jakkolwiek jego teoria ma dziś znaczenie tylko historyczne i mechanika kwantowa oddaje własności atomu o lepszej zgodności z doświadczeniem, to jednak wielka poglądowość jego modelu atomu, wyrażone w niej rewolucyjne postulaty sprzeczne z klasyczną mechaniką i elektrodynamiką oraz doniosła rola, jaką jego teoria odegrała w rozwoju fizyki atomu, sprawiają, że warto się z nią zapoznać. Punktem wyjścia teorii Bohra był model atomu Rutherforda, według którego cała prawie masa atomu skupiona jest w jądrze o bardzo małych rozmiarach w porównaniu do rozmiarów atomów. Wokół jądra krążą elektrony. W atomie wodoru jądro zwane protonem zawiera jeden elementarny ładunek dodatni $+e$. Wokół jądra krąży jeden elektron po torze kołowym.

Rozpatrzmy szczegółowo taki najprostszy model atomu: a więc elektron o masie m i ładunku $-e$ krąży wokoło jądra o ładunku $+e$ i masie M, przytrzymywany na torze przez przyciąganie kulombowskie. Według prawa Coulomba jądro i elektron przyciągają się z siłą

$$F = \frac{e^2}{r^2}. \tag{25.6}$$

Siła ta utrzymuje elektron na torze kołowym, zatem jest siłą dośrodkową. A więc

$$F = \frac{mv^2}{r}, \tag{25.7}$$

gdzie v oznacza prędkość elektronu na torze.

Otrzymujemy więc równanie

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}. \tag{25.8}$$

Założenia, jakie wprowadził Bohr w swojej teorii są następujące:

1. Pierwsze założenie Bohra: moment pędu albo kręt elektronu mvr musi być całkowitą wielokrotnością wielkości $\frac{h}{2\pi}$, gdzie h jest stałą Plancka. A więc

$$mvr = n\frac{h}{2\pi}, \quad \text{gdzie} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{25.9}$$

Z równania (25.8) otrzymujemy

$$mv^2r = e^2. \tag{25.10}$$

Dzieląc równanie (25.10) przez (25.9) otrzymamy

$$v = \frac{2\pi e^2}{nh}. \tag{25.11}$$

Podstawiając tę wartość do równania (25.9) otrzymamy

$$m\frac{2\pi e^2}{nh}r = n\frac{h}{2\pi}, \tag{25.12}$$

skąd

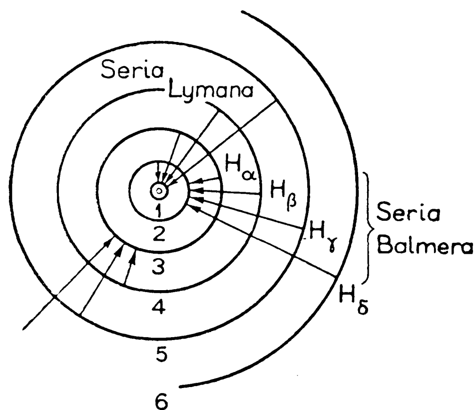
$$r = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e^2}. \tag{25.13}$$

Promień pierwszej, najbliższej orbity będzie dany przez wzór

$$r_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2},$$

drugiej $r_2 = \dfrac{4h^2}{4\pi^2 m e^2}$, trzeciej $r_3 = \dfrac{9h^2}{4\pi^2 m e^2}$ itd.

A więc istnieje tylko pewien ciąg wybranych torów, po których może krążyć elektron. Ich promienie są proporcjonalne do kwadratów kolejnych liczb całkowitych (rys. 25.1). Przy poruszaniu się po jednym z tych torów elektron nie traci energii, nie wysyła promieniowania. Założenie to jest sprzeczne z elektrodynamiką klasyczną, według której elektron poruszający się ruchem przyśpieszonym (a w tym wypadku ma przyśpieszenie dośrodkowe) powinien wypromieniowywać fale elektromagnetyczne.



Rys. 25. 1. Atom Bohra

Normalnie elektron krąży po pierwszym, najbliższym torze. Jego promień jest jednocześnie promieniem atomu w jego normalnym stanie. Lecz jakakolwiek przyczyna, np. bombardowanie elektronami przy wyładowaniu w gazie rozrzedzonym, może go przerzucić na jeden z dalszych torów. Mówimy, że wtedy atom znajduje się w stanie wzbudzonym.

Energia takiego układu złożonego z protonu i elektronu składa się z energii potencjalnej i kinetycznej. Jak już o tym mówiliśmy w ust. 3. 15, wartość energii potencjalnej zależy od tego, do jakiego stanu układu się ją odnosi. Zazwyczaj energię układu złożonego z jądra i elektronu odnosimy do takiego ich stanu, w którym elektron jest całkowicie oddzielony od jądra, znajduje się w nieskończoności.

Energia atomu w stanie, gdy elektron porusza się po torze o promieniu r, względem tego jego stanu, gdy elektron znajduje się w nieskończoności, równa się pracy wykonanej przez siły pola przy przeniesieniu elektronu z odległości r do nieskończoności ze znakiem przeciwnym:

$$E_p = -\int_r^\infty F\,dr, \tag{25.14}$$

gdzie

$$F = \frac{e^2}{r^2}. \tag{25.15}$$

Zatem

$$E_p = -\int\limits_r^\infty \frac{e^2}{r^2}\,dr = \frac{e^2}{r}\Bigg|_r^\infty = -\frac{e^2}{r}. \tag{25.16}$$

Na energię potencjalną wypada liczba ujemna, ponieważ za stan odniesienia Przyjęliśmy stan największej energii układu.

Energia kinetyczna elektronu jest

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \tag{25.17}$$

Z równania (25.10)

$$mv^2 = \frac{e^2}{r}. \tag{25.18}$$

po podstawieniu tej wartości na mv^2 do wzoru (25.17) otrzymamy na energię kinetyczną

$$E_k = \frac{e^2}{2r}.$$

A więc energia całkowita układu będzie

$$E = E_p + E_k = -\frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{2r} = -\frac{e^2}{2r}. \tag{25.19}$$

Po podstawieniu zaś wartości (25.13) na r otrzymamy wzór

$$E = -\frac{2\pi^2 me^4}{n^2h^2}. \tag{25.20}$$

Elektron krążący po jednym z dalszych torów pozostaje na nim zwykle przez czas bardzo krótki, po czym przeskakuje na tor bliższy. Podczas tego przeskoku energia atomu zmniejsza się. Według zasady zachowania energii nie może ona zniknąć. Bohr wprowadza tu drugie założenie:

2. Drugie założenie Bohra. Gdy elektron przeskakuje z toru n-ego na tor i-ty, bliższy, wskutek czego energia atomu zmniejsza się z E_n na E_i, to różnica energii $E_n - E_i$ jest wysyłana w przestrzeń w postaci promieniowania w pewnej określonej ilości, czyli kwantu promieniowania $h\nu$, gdzie h oznacza stałą Plancka, a ν — częstość wysyłanego promieniowania:

$$h\nu = E_n - E_i = -\frac{2\pi^2 me^4}{n^2h^2} + \frac{2\pi^2 me^4}{i^2h^2} = \frac{2\pi^2 me^4}{h^2}\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{25.21}$$

Ponieważ $\nu = \frac{c}{\lambda}$, zatem możemy napisać

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{2\pi^2 me^4}{h^2}\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{25.22}$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3 c}\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{25.23}$$

Oznaczając współczynnik

$$\frac{2\pi^2 me^4}{h^3 c} = R \tag{25.24}$$

otrzymuje się wzór identyczny ze wzorem Balmera, przy tym na stałą Rydberga R wypada wzór związujący tę wielkość z wielkościami znanymi z rozmaitych pomiarów:

$m = 9{,}106 \cdot 10^{-28}$ g, $e = 4{,}802 \cdot 10^{-10}$ j. ES,
$h = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ erg · sec, $c = 2{,}99790 \cdot 10^{10}$ cm/sec.

Po podstawieniu tych wartości otrzymuje się na stałą Rydberga wartość zgodną z wartością znaną z pomiarów spektroskopowych. Wprowadzając to oznaczenie do wzoru Bohra otrzymamy wzór

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{25.25}$$

identyczny ze wzorem Balmera dla $i = 2$.

W ogólności można powiedzieć, że gdy atom przechodzi z wyższego poziomu energetycznego E_1 na niższy E_2, to wypromieniowuje w jednym akcie energię $E_1 - E_2$ w postaci promieniowania monochromatycznego o częstości ν określonej wzorem

$$h\nu = E_1 - E_2. \tag{25.26}$$

Odnosi się to do wszystkich atomów.

Jeden atom w danej chwili może wysłać tylko jeden kwant światła o określonej długości fali. Ponieważ jednak nawet w bardzo małej ilości wodoru znajduje się olbrzymia liczba atomów, różne atomy wysyłają kwanty o różnych częstościach, wskutek czego możemy obserwować jednocześnie wiele linij. Od ilości atomów wysyłających kwanty danej częstości zależy natężenie danej linii widmowej (tj. ilość energii wysyłanej w sekundzie, przypadającej na daną linię widmową).

Jak to już poprzednio omawialiśmy (19.24), gaz świecący absorbuje te gatunki promieniowania, które sam wysyła. Z punktu widzenia teorii Bohra łatwo to wytłumaczyć: gdy wiązka światła białego przechodzi np. przez naczynie kwarcowe napełnione parą rtęci, atomy rtęci pochłaniają kwanty energii $h\nu$ takiej wielkości, która jest potrzebna, aby elektron przenieść z toru bliższego na dalszy, zatem

tej wielkości, jakie same mogą wysyłać. Atom przechodzi z niższego poziomu energetycznego na wyższy. W tym stanie atom pozostaje przez czas bardzo krótki, po czym z powrotem wypromieniowuje pochłoniętą energię. Lecz promieniowanie to atomy wysyłają we wszystkich możliwych kierunkach. Dlatego w widmie ciągłym światła przechodzącego przez parę rtęci promieniowanie absorbowane przez parę rtęci jest osłabione, pojawiają się linie absorpcyjne.

25.3. Uwzględnienie ruchu jądra. W poprzednim rozumowaniu zakładaliśmy, że elektron obraca się koło nieruchomego jądra. Byłoby to słuszne tylko wtedy, gdyby jądro posiadało nieskończenie wielką masę. W rzeczywistości elektron i jądro muszą się obracać około wspólnego środka masy. Spróbujemy to uwzględnić i zobaczymy, jak się wskutek tego zmienią poprzednio wyprowadzone wzory. Aby to samo rozumowanie dało się zastosować również do zjonizowanego, to jest pozbawionego jednego elektronu atomu helu, lub dwukrotnie zjonizowanego atomu litu, które mają większe ładunki jądra, załóżmy ogólnie, że jądro zawiera Z ładunków elementarnych. Jego masa niech będzie M. Elektron będzie przez takie jądro przyciągany z siłą

$$F = \frac{Ze^2}{r^2}. \tag{25.27}$$

Oznaczmy odległość jądra od środka masy przez r_j, odległość elektronu od środka masy przez r_e, odległość zaś elektronu od jądra przez r, wreszcie masę elektronu przez m. Wiemy, że środek masy dwóch punktów dzieli odległość między nimi na odcinki odwrotnie proporcjonalne do ich mas:

$$\frac{r_e}{r_j} = \frac{M}{m},$$

przy tym

$$r_j + r_e = r.$$

Stąd łatwo obliczyć, że

$$r_e = r\frac{M}{M+m}, \qquad r_j = r\frac{m}{M+m}. \tag{25.28}$$

Pierwsze założenie Bohra trzeba teraz wypowiedzieć w sposób następujący: całkowity kręt atomu (układu dwóch punktów) jest całkowitą wielokrotnością $\frac{h}{2\pi}$. Kręt atomu $= I\omega$, gdzie I jest momentem bezwładności układu, a ω — prędkością kątową (wzór 4.42 w pierwszej części książki), zatem

$$I\omega = n\frac{h}{2\pi}, \tag{25.29}$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$

Moment bezwładności układu będzie

$$I = Mr_j^2 + mr_e^2.$$

Podstawiając do tego wzoru wartości (25.28) na r_j i r_e otrzymamy

$$I = r^2 \frac{mM}{m+M}. \tag{25.30}$$

Podstawiając do równania (25.29) otrzymamy

$$r^2\omega \frac{mM}{m+M} = n \frac{h}{2\pi}. \tag{25.31}$$

Siłą dośrodkową będzie siła kulombowska. Zatem tak dla jądra jak i dla elektronu możemy napisać

$$mr_e\,\omega^2 = \frac{Ze^2}{r^2}, \qquad mr_j\,\omega^2 = \frac{Ze^2}{r^2}.$$

Zastępując znowu r_e i r_j wyrażeniami (25.28) otrzymamy równanie (jedno):

$$r\omega^2 \frac{mM}{m+M} = \frac{Ze^2}{r^2}.$$

Skąd

$$r^3\omega^2 = Ze^2 \frac{m+M}{mM}. \tag{25.32}$$

Dzieląc równanie (25.32) przez (25.31) otrzymamy

$$r\omega = Ze^2 \frac{2\pi}{nh}. \tag{25.33}$$

A następnie dzieląc równanie (25.31) przez (25. 33) dostaniemy

$$r \frac{mM}{m+M} = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 Ze^2}, \tag{25.34}$$

skąd

$$r = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 Ze^2} \frac{m+M}{mM}. \tag{25.35}$$

Energia potencjalna, jak łatwo obliczyć w ten sam sposób, jak przy atomie Bohra, będzie Z razy większa, a więc

$$E_p = -\frac{Ze^2}{r}. \tag{25.36}$$

Energia zaś kinetyczna (można tu zastosować wzór na energię kinetyczną ciała sztywnego, gdyż moment bezwładności się nie zmienia)

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{Mr_j^2 + mr_e^2}{2}\,\omega^2.$$

Po podstawieniu wartości (25.28) na r_j i r_e i łatwych przeróbkach otrzymamy

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{r}. \tag{25.37}$$

Zatem całkowita energia będzie

$$E = E_p + E_k = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{r}.$$

Podstawiając wartość (25.35) na r otrzymamy

$$E = -\frac{2\pi^2 Z^2 e^4}{n^2 h^2} \frac{mM}{m+M}. \tag{25.38}$$

Zastosujmy teraz drugie założenie Bohra: gdy elektron przeskakuje z n-ego toru na i-ty, atom wypromieniowuje foton

$$h\nu = E_n - E_i = -Z^2 \frac{2\pi^2 e^4}{h^2} \frac{m}{1 + \frac{m}{M}} \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{25.39}$$

Na długość fali otrzymamy, w taki sam sposób jak poprzednio, wzór

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c} \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{25.40}$$

Oznaczając

$$R' = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c} \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \tag{25.41}$$

otrzymamy wzór podobny do wzoru Balmera:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R' \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{25.42}$$

Dla wodoru można napisać (gdyż $Z = 1$)

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{25.43}$$

gdzie R_H ma nieco inną wartość, niż w poprzednio otrzymanym wzorze. Stałą Rydberga obliczoną poprzednio oznacza się R_∞

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3 c} = 109\,737{,}31 \text{ cm}^{-1}.$$

Gdy zaś uwzględnimy ruch jądra,

$$R_H = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3 c} \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} = 109\,677{,}58 \text{ cm}^{-1},$$

gdzie M jest masą jądra wodoru.

Chociaż poprawka ta jest bardzo mała i daje bardzo niewielkie przesunięcie linij widmowych, to jednak fakt ten daje się stwierdzić za pomocą nadzwyczaj dokładnych pomiarów spektroskopowych.

25.4. Odkrycie ciężkiego wodoru. Jak widać z wzoru (25.40), długość fali wysyłanej linii widmowej będzie zależała od masy jądra *M*. Dzięki tej zależności udało się odkryć ciężki izotop wodoru, izotop o masie atomowej 2. Historia tego odkrycia jest następująca: bardzo dokładne pomiary Astona dały na masę atomową wodoru liczbę, która najzupełniej zgadzała się z pomiarami chemicznymi. Jak wiadomo, przy pomiarach chemicznych zakłada się, że masa atomowa tlenu równa się 16. Gdy Aston robił swe początkowe pomiary, wydawało się, że tlen posiada jeden tylko izotop. Lecz później okazało się, że istnieją jeszcze dwa izotopy tlenu o liczbach masowych 17 i 18, które w niewielkich ilościach wchodzą w skład tlenu znajdującego się w przyrodzie. W roku 1931 Birge i Menzel (czyt. Bedż i Mencel) zwrócili uwagę, że zgodność liczb otrzymanych drogą chemiczną i spektrografem masowym jest przypadkowa i polega na błędzie. Za pomocą spektrografu mianowicie określa się masę istotnie względem izotopu tlenu ^{16}O, natomiast w pomiarach chemicznych odnosi się masy pierwiastków do masy atomowej tlenu, który jest mieszaniną izotopów. Zatem w rzeczywistości liczby otrzymane z pomiarów dwiema różnymi metodami różnią się; masa atomowa wodoru oznaczona drogą chemiczną jest większa o 0,02%. Birge i Menzel wyrazili wobec tego przypuszczenie, że wodór jest mieszaniną dwóch izotopów ^{1}H i ^{2}H zmieszanych ze sobą w stosunku 4500 : 1. Jeżeliby rzeczywiście istniał izotop ^{2}H, to w widmie tego izotopu linie widmowe powinny być nieco przesunięte wobec linij wodoru ^{1}H ze względu na nieco różne wartości stałej Rydberga dla ^{1}H i ^{2}H.

Stała Rydberga dla izotopu ^{2}H ma wartość:

$$R_D = 109\,707{,}42 \text{ cm}^{-1}.$$

Urey z współpracownikami podjął doświadczenie mające na celu wykrycie izotopu ^{2}H. Za pomocą bardzo silnego spektrografu z wklęsłą metalową siatką dyfrakcyjną fotografowali oni linie serii Balmera. Stwierdzili słaby ślad linii nieco przesuniętej względem linii H_β. Zakładając, że linia ta należy do widma ciężkiego wodoru, zdecydowali się spróbować otrzymać wodór o większej procentowej zawartości ciężkiego wodoru. Aby to osiągnąć, odparowywali ciekły wodór pod zmniejszonym ciśnieniem. Ponieważ szybkość parowania lekkiego wodoru powinna być większa niż ciężkiego, w pozostałości powinien się nagromadzić w większym procencie ciężki wodór. Istotnie, po sfotografowaniu widm obu rozdzielonych próbek w widmie części, która pozostała po odparowaniu, stwierdzili znacznie silniejsze linie izotopu ^{2}H.

Wkrótce po odkryciu ciężkiego wodoru odkryto, że przy elektrolizowaniu wodnych roztworów woda staje się coraz bogatsza w ciężki wodór, podczas gdy wodór uwalniany przy elektrolizie zawiera w większej ilości lekki izotop. Na tym zjawisku oparte zostały metody otrzymywania ciężkiego izotopu wodoru w większej

ilości. Obecnie istnieją już fabryczne sposoby otrzymywania ciężkiej wody zawierającej prawie 100% ciężkiego wodoru. Z ciężkiej wody łatwo już za pomocą elektrolizy otrzymać ciężki wodór.

Ciężki izotop wodoru nazwano deuterem, jego jądro zaś — deuteronem. Za jego symbol chemiczny przyjęto D. Zatem symbol ciężkiej wody jest



$$D_2O.$$

Ze względu na dużą różnicę w masach atomów ^1H i ^2D wynoszącą 100% własności fizyczne ciężkiej wody wyraźnie różnią się od zwykłej wody. Podaje je następująca tabela.

Tabela 25.1

Stałe fizyczne dla ciężkiej wody

	D_2O	H_2O
Gęstość w temperaturze 20°C	1,1059	0,9982
Maksimum gęstości	+11,6°C	3,98°C
Temperatura krzepnięcia	+3,82°C	0,00°C
Temperatura wrzenia pod ciśnieniem 760 mmHg	+101,42°C	+100,00°C

Obecnie znamy jeszcze jeden izotop wodoru wytworzony sztucznie (promieniotwórczy). Jądro jego zawiera jeden proton i dwa neutrony, ma zatem liczbę masową 3, a więc jego symbol jest ^3H. Nazywamy go trytem, a jego jądro trytonem.

25.5. Termy widmowe. Poziomy energetyczne atomu. Jak mówiliśmy poprzednio, elektron w atomie wodoru może krążyć wokół jądra tylko po pewnych wybranych torach. Odpowiadają one tzw. stacjonarnym stanom atomu (stanem stacjonarnym nazywamy stan, który nie ulega zmianie w czasie). Według założenia Bohra atom wtedy nie promieniuje. Wysyła natomiast promieniowanie przy przeskokach elektronu z jednego toru stacjonarnego na inny. Długość fali wypromieniowanej, jak widzieliśmy, jest określona wzorem

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Po lewej stronie tego wzoru znajduje się liczba wskazująca, ile fal mieści się na jednostce długości, a więc na jednym centymetrze. Dziś często oznacza się tę liczbę symbolem $\tilde{\nu}$ albo $\bar{\nu}$. Nazywamy ją liczbą falową. Należy ją odróżniać od częstości ν, która jest równa $\frac{c}{\lambda}$. Stąd mamy związek

$$\nu = c\tilde{\nu}. \tag{25.44}$$

Powyższy wzór zatem moglibyśmy napisać w postaci

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{R}{i^2} - \frac{R}{n^2}.$$

Jeżeli napiszemy wzory na poszczególne serie widmowe:

$$\text{Seria Lymana } \tilde{\nu} = \frac{R}{1^2} - \frac{R}{n^2}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots;$$

$$\text{Seria Balmera } \tilde{\nu} = \frac{R}{2^2} - \frac{R}{n^2}, \qquad n = 3, 4, 5, \ldots;$$

$$\text{Seria Paschena } \tilde{\nu} = \frac{R}{3^2} - \frac{R}{n^2}, \qquad n = 4, 5, 6, \ldots;$$

$$\text{Seria Bracketta } \tilde{\nu} = \frac{R}{4^2} - \frac{R}{n^2}, \qquad n = 5, 6, 7, \ldots;$$

to widać, że pierwszy wyraz drugiej serii: $\frac{R}{2^2}$ jest identyczny z drugim wyrazem pierwszej serii odpowiadającym wartości $n = 2$; pierwszy wyraz trzeciej serii jest identyczny z drugim wyrazem serii Balmera oraz drugim serii Lymana, gdy n ma wartość 3 itd.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$T_i = \frac{R}{i^2}, \qquad T_n = \frac{R}{n^2}.$$

Wyrażenia T_i i T_n nazywamy *termami* widmowymi albo wprost termami. Jak łatwo stwierdzić dla atomu wodoru, wszystkie termy możemy wyrazić jednym wzorem:

$$T_n = \frac{R}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{25.45}$$

Liczbę falową dowolnej serii widmowej otrzymujemy jako różnicę dwóch termów.

Ponieważ liczba falowa $\tilde{\nu}$ jest związana z częstością związkiem (25.44), mieliśmy zaś poprzednio

$$h\nu = E_n - E_i,$$

zatem otrzymujemy stąd

$$\tilde{\nu} = \frac{E_n}{hc} - \frac{E_i}{hc}. \tag{25.46}$$

Oznaczając

$$-\frac{E_n}{hc} = T_n \tag{25.47}$$

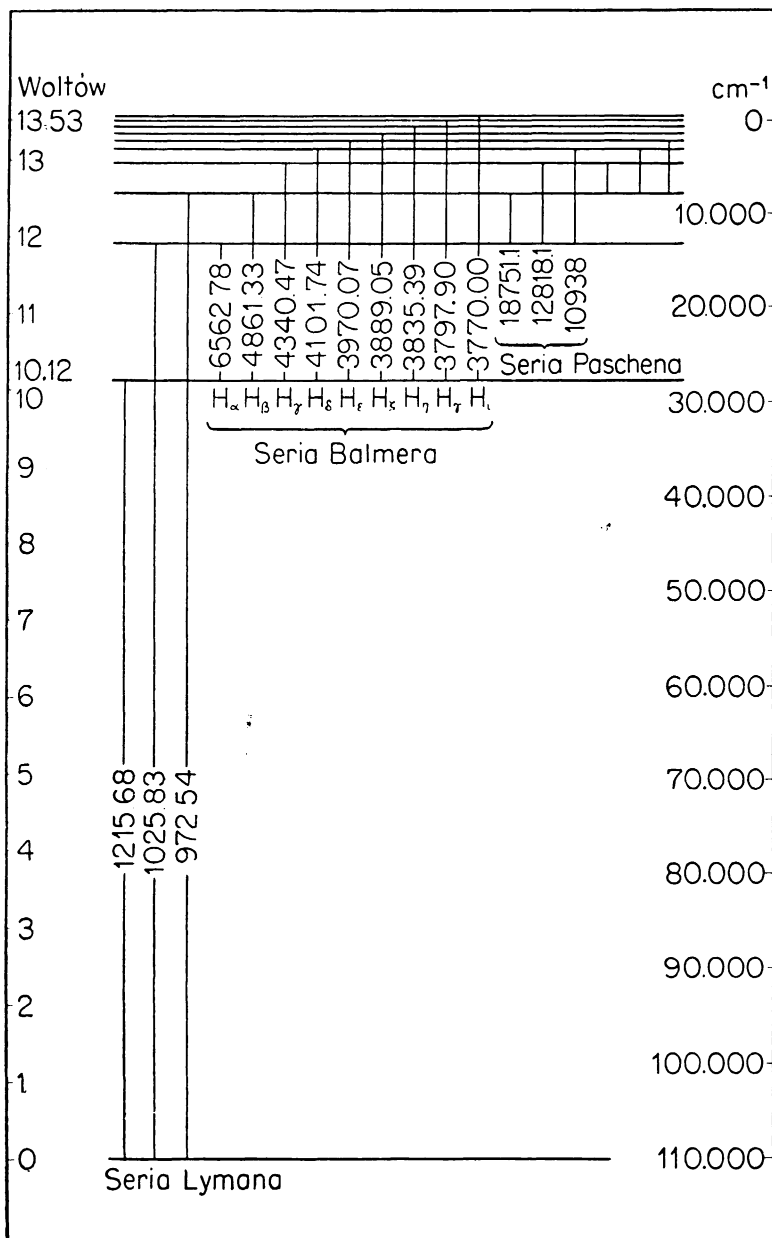
otrzymamy

$$\tilde{\nu} = T_i - T_n. \tag{25.48}$$

Znak minus we wzorze (25.47) wprowadzamy, ponieważ energia atomu jest ujemna, wygodniej zaś jest, aby termy były dodatnie.

Jak widać ze związku (25.47), termy przyporządkowane są rozmaitym stanom energetycznym atomu. Znając termy, możemy ze związku

$$E_n = -hc\,T_n \tag{25.49}$$



Rys. 25.2. Poziomy energetyczne atomu wodoru

wyznaczyć energię atomu w danym stanie stacjonarnym. Bardzo poglądowo przedstawić można stosunki energetyczne na wykresie, który jednocześnie daje różnice energii różnych stacjonarnych stanów atomu (rys. 25.2). Linie proste

poziome wyobrażają poziomy energetyczne atomu. Gdy atom znajduje się na najniższym poziomie energetycznym (na rys. 25.2 wyobraża go najniższa linia pozioma), mówimy, że znajduje się w *stanie podstawowym*. W atomie wodoru elektron znajduje się wtedy na torze najbliższym jądra. Atom może promieniować tylko wtedy, gdy zostanie przeniesiony na wyższy poziom energetyczny, do stanu, który nazywamy *stanem wzbudzonym*. Wykres jednocześnie daje energię, jaka jest potrzebna, aby atom przenieść na wyższy poziom energetyczny.

Aby otrzymać taki wykres, wystarczy na osi rzędnych odkładać wartości $\frac{R}{n^2}$ dla kolejnych wartości n. W miarę wzrostu n, jak widać na wykresie, poziomy zagęszczają się. Różnica między najniższym i najwyższym poziomem energetycznym daje energię jonizacji, tzn. energię potrzebną do oderwania elektronu od atomu.

Linie absorpcyjne odpowiadają przejściom z niższych poziomów energetycznych na wyższe. Ponieważ atomy w normalnym nieświecącym gazie znajdują się w stanie podstawowym, zatem mogą wówczas wystąpić tylko linie absorpcyjne serii Lymana. Linie absorpcyjne innych serii można otrzymać tylko wtedy, gdy w gazie znajdują się atomy w stanach wzbudzonych.

25.6. Widmo zjonizowanego helu. Gdy atom helu zostanie zjonizowany, ma on wtedy budowę podobną do budowy atomu wodoru: jądro i krążący wokół niego jeden elektron. Różnica między nimi polega tylko na tym, że ładunek jądra helu jest dwa razy większy, jest zatem $2e$. A więc dla zjonizowanego atomu helu musimy napisać [patrz wzór (25.42) dla $Z = 2$]

$$\frac{1}{\lambda} = 4R\left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Wzór ten można napisać w następujący sposób:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left[\frac{1}{\left(\frac{i}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\right].$$

Widać stąd, że dla m i n parzystych otrzymamy linie takie same, jak dla atomów wodoru. Na przykład dla $m = 4$ i $n = 6$ otrzymujemy

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right).$$

Będzie to pierwsza linia serii Balmera. Co druga linia otrzymana z tego wzoru będzie identyczna z linią wodoru (prawie identyczna, gdyż masy jąder helu i wodoru różnią się, zatem będą się nieco różnić stałe Rydberga).

Już w końcu ubiegłego stulecia astronom Pickering (czyt. Pikerin) odkrył taką serię w widmie jednej z gwiazd stałych. Przypisano ją wówczas wodorowi. Lecz nadaremnie starano się wykryć te same linie w widmie świecącego w laboratoryjnych warunkach wodoru. Dopiero Bohr zdołał wytłumaczyć pochodze-

nie tych linii, fakt, że również inne atomy o jednym elektronie muszą dawać serie podobne do wodoru, a więc widmo takie musi mieć raz zjonizowany hel, dwukrotnie zjonizowany lit, trzykrotnie zjonizowany beryl itd. Dokładne pomiary wykazały jednak, że linie helu (co druga) rożnią się nieco, choć bardzo mało w długości fal od linii wodoru. Różnicę tę zdołano zmierzyć bardzo dokładnymi metodami spektroskopii. Łatwo ten fakt wytłumaczyć. Pochodzi ona stąd, że wyrażenie

$$\mu = \frac{m}{1 + \dfrac{m}{M}}$$

zwane masą zredukowaną i wchodzące do wzoru na stałą Rydberga jest dla helu nieco inne niż dla wodoru z powodu różniącej się masy jądra. Stała Rydberga dla helu jest określona wzorem:

$$R_{He} = \frac{2\pi^2 e^4}{h^3 c} \frac{m}{1 + \dfrac{m}{M}}. \tag{25.50}$$

Wartość tej stałej wyznaczona z rozmaitych pomiarów przez DuMonda i współpracowników jest następująca:

$$R_{He} = 109\,722{,}27 \text{ cm}^{-1},$$

dla wodoru zaś:

$$R_H = 109\,677{,}58 \text{ cm}^{-1}.$$

25.7. Orbity eliptyczne. Warunki kwantowe Sommerfelda. Sommerfeld uogólnił teorię Bohra atomu wodoru. Założył mianowicie, że elektron może się poruszać nie tylko po orbitach kołowych, lecz również po eliptycznych, tak jak planety wokół Słońca. Według Bohra dozwolonymi orbitami kołowymi są takie, których promienie wynikają z warunku, iż kręt elektronu K jest wielokrotnością wielkości $\frac{h}{2\pi}$:

$$K = k\frac{h}{2\pi},$$

gdzie k jest liczbą całkowitą, zwaną liczbą kwantową. Mamy więc w tym przypadku ciąg torów stacjonarnych.

Gdy rozważamy ruch punktu po elipsie, używamy zwykle współrzędnych biegunowych r i φ, gdzie r jest promieniem wodzącym punktu, a φ kątem biegunowym (rys. 25.3). Jak w tym przypadku wyznaczyć tory stacjonarne? Założenie Sommerfelda polegało na ustanowieniu dwóch warunków kwantowych:

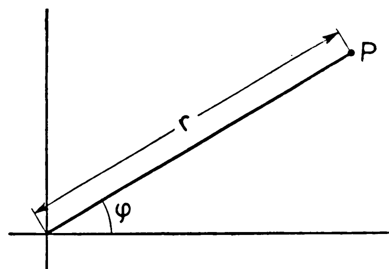
$$\oint p_r\, dr = n_r h, \qquad \oint p_\varphi\, d\varphi = kh, \tag{25.51}$$

gdzie p_r i p_φ oznaczają tzw. momenty uogólnione. n_r i k są liczbami całkowitymi. n_r nazywa się radialną liczbą kwantową, k — azymutalną liczbą kwantową.

W rozpatrywanym przez nas przypadku momenty p_r i p_φ wyrażają się w sposób następujący:

$$p_r = m\frac{dr}{dt}, \qquad p_\varphi = mr^2\frac{d\varphi}{dt}.$$

Całkowanie we wzorach (25.51) jest rozciągnięte na cały okres zmienności zmiennych r i φ. A więc pierwsza całka musi obejmować zakres, gdy r zmienia się np. od minimum, dochodzi do maksimum i wraca z powrotem do wartości $r_{\min}$. Druga całka musi być wzięta od zera do 2π. Druga całka, jak łatwo wykazać, daje warunek Bohra. Dla koła, które jest szczególnym przypadkiem elipsy, możemy to natychmiast sprawdzić. Ponieważ dla koła tak r, jak i $\frac{d\varphi}{dt}$, prędkość kątowa, są stałe, zatem



Rys. 25.3. Współrzędne biegunowe

$$\oint p_\varphi\, d\varphi = mr^2\omega \oint d\varphi = 2\pi mr^2\omega = kh,$$

skąd otrzymujemy warunek Bohra $(r\omega = v)$

$$mvr = k\frac{h}{2\pi}.$$

Rachunek, którego tu nie będziemy wykonywać, wykazuje, że elektron może się poruszać tylko po elipsach, których wielka półoś jest proporcjonalna do $(n_r + k)^2$, zaś mała półoś do $k\,(n_r + k)$. Sumę $n_r + k$ nazywamy główną liczbą kwantową i oznaczamy jedną literą n. Możemy zatem napisać, że

$$\text{wielka półoś } a \backsim n^2,$$

$$\text{mała półoś } b \backsim kn.$$

Rachunek daje na wielką półoś

$$a = n^2\frac{a_0}{Z},$$

małą —

$$b = nk\frac{a_0}{Z},$$

gdzie a_0 oznacza promień pierwszej orbity kołowej Bohra. Jak widać, wielka oś zależy tylko od głównej liczby kwantowej n, mała zaś zależy tak od głównej, jak i od azymutalnej liczby kwantowej. Stosunek półosi

$$\frac{b}{a} = \frac{k}{n}.$$

Ponieważ wartości $k = 0$ odpowiada odcinek linii prostej (gdyż wtedy $b = 0$), to przypadek ten musimy wykluczyć, gdyż w takim razie elektron musiałby przechodzić przez jądro. Zatem najmniejsza możliwa wartość jest $k = 1$. Gdy zaś $k = n$, to $b = a$, elipsa zamienia się w koło. A więc wartości azymutalnej liczby kwantowej mogą być następujące:

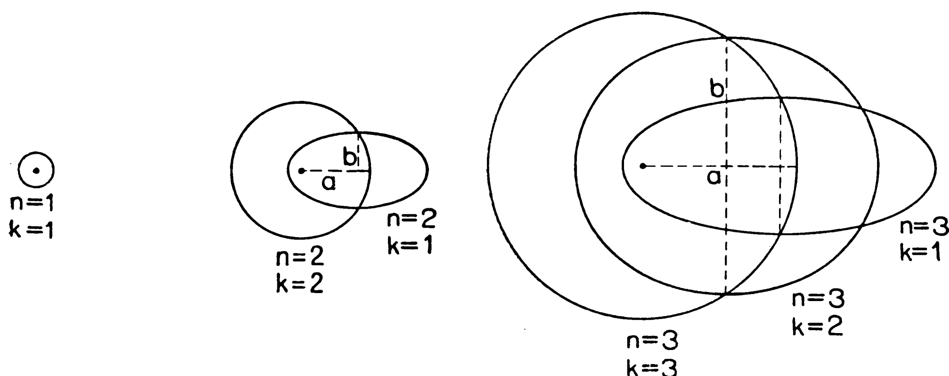
$$k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Stąd wynika, że każdej wartości głównej liczby kwantowej n odpowiada n rozmaitych orbit. Tak np. gdy

$$n = 1: \quad a = \frac{a_0}{Z}, \quad k = 1, \quad b = \frac{a_0}{Z}, \text{ tor jest kołem;}$$

$$n = 2: \quad a = 4\frac{a_0}{Z}, \quad \begin{cases} k = 1, & b = 2\frac{a_0}{Z}, \text{ tor jest elipsą;} \\ k = 2, & b = 4\frac{a_0}{Z}, \text{ tor jest kołem;} \end{cases}$$

$$n = 3: \quad a = 9\frac{a_0}{Z}, \quad \begin{cases} k = 1, & b = 3\frac{a_0}{Z}, \text{ tor jest elipsą;} \\ k = 2, & b = 6\frac{a_0}{Z}, \text{ tor jest elipsą;} \\ k = 3, & b = 9\frac{a_0}{Z}, \text{ tor jest kołem.} \end{cases}$$



Rys. 25.4. Tory elektronu odpowiadające różnym liczbom kwantowym

Rysunek 25.4 przedstawia możliwe tory dla różnych liczb kwantowych.

Na energię atomu, gdy elektron znajduje się na dowolnym z torów kwantowych otrzymuje się wzór taki sam, jak w teorii Bohra:

$$E = -\frac{2\pi m e^4 Z^2}{n^2 h^2},$$

z którego widać, że energia zależy tylko od głównej liczby kwantowej n. Lecz jednej głównej liczbie kwantowej odpowiada kilka wartości azymutalnej liczby kwantowej k, a więc kilka orbit. Elektron na różnych orbitach o tej samej wielkiej osi ma tę samą energię. Mówimy, że występuje tu *zwyrodnienie*. Wzory na linie widmowe pozostają takie same, jak przy orbitach kołowych. Oczywiście mamy o wiele więcej możliwości rozmaitych przeskoków elektronu. Nie wszystkie jednak są możliwe. Określają to tzw. reguły wyboru.

Gdy istnieje jakiś czynnik zakłócający ruch elektronu, np. pole elektryczne lub magnetyczne, energia elektronu na różnych torach staje się różna, zwyrodnienie zostaje usunięte. Również zostaje usunięte, jak to pokazał Sommerfeld, gdy uwzględnimy relatywistyczną zmianę masy elektronu, wskutek jego wielkiej szybkości, gdy znajduje się w pobliżu jądra. Powoduje to rozszczepienie linii widmowych na kilka składników, w atomach lekkich zresztą bardzo mało różniących się długością fali.

25.8. Zasada odpowiedniości. Według wzoru (25.23) paragrafu 25.2 częstość wysyłanego przez atom promieniowania określona jest wzorem

$$\nu = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Możemy ten wzór napisać w postaci

$$\frac{2\pi^2 me^4}{h^3}\,\frac{(n+n_1)(n-n_1)}{n_1^2 n^2}.$$

Dla bardzo dużych liczb kwantowych i bliskich przeskoków n mało się różni od n_1. Kładąc $n \approx n_1$, możemy na częstość wysyłanego promieniowania napisać przybliżony wzór:

$$\nu = \frac{4\pi^2 me^4}{h^3 n^3}(n - n_1). \tag{25.52}$$

Zdajmy sobie teraz sprawę, jaka byłaby częstość, gdybyśmy uważali obieg elektronu za złożone drgania harmoniczne. Obliczmy w tym celu okres obiegu elektronu po orbicie. Możemy go znaleźć z wzorów (25.11) i (25.13). Jak wiadomo z mechaniki, prędkość kątowa ω jest związana z prędkością liniową związkiem

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Podstawiając wartość (25.11) na v i (25.13) na r otrzymamy

$$\omega = \frac{2\pi e^2}{nh} : \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 me^2} = \frac{8\pi^3 me^4}{h^3 n^3}.$$

Wiemy zaś, że częstość obiegu (jednocześnie częstość drgania)

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

a więc na częstość klasyczną drgania elektronu otrzymamy

$$\nu = \frac{4\pi^2 me^4}{h^3 n^3}. \qquad (25.53)$$

Gdy $n - n_1 = 1$, to z wzoru (25.52) otrzymujemy na częstość wysyłanego promieniowania

$$\nu = \frac{4\pi^2 me^4}{h^3 n^3},$$

a więc zupełnie taki sam wzór, jak (25.53). Jak widać, dla dużych liczb kwantowych teoria kwantowa i teoria klasyczna daje takie same wzory na częstość. Skok $n - n_1 = 1$ daje częstość drgania podstawowego, skok $n - n_1 = 2$ daje częstość dwa razy większą, czyli drugą harmoniczną itd. Dla dużych liczb kwantowych i bliskich torów częstości obliczone klasycznie zbliżają się coraz więcej do częstości kwantowych. Uogólniając ten fakt Bohr ustanowił tzw. zasadę odpowiedniości, która uzupełniła teorię kwantową. Bowiem kwantowa teoria pozwala wyliczyć tylko częstości wypromieniowywane, natomiast klasyczna teoria promieniowania pozwala na obliczenie natężeń i polaryzacji poszczególnych linii widmowych. Jak było wspomniane w akustyce, każda funkcja okresowa da się przedstawić przez szereg Fouriera, w którym pierwszy wyraz odpowiada drganiu zasadniczemu, następne — drganiom harmonicznym o częstościach 2, 3 itd. razy większych. Jeżeli więc ruch okresowy po elipsie przedstawimy za pomocą szeregu Fouriera, to amplitudy poszczególnych wyrazów dadzą natężenia poszczególnych drgań, a więc zarazem i przeskoków kwantowych. Jeżeli w rozwinięciu brak niektórych wyrazów, to znaczy że odnośne przeskoki kwantowe się nie odbywają. Stąd pochodzą tzw. reguły wyboru. Teoria klasyczna coraz więcej różni się od teorii kwantowej w miarę jak przechodzimy do coraz mniejszych liczb kwantowych, lecz w przybliżeniu i w tym obszarze możemy stosować zasadę odpowiedniości.

25.9. Moment magnetyczny krążącego elektronu. W atomie Bohra wokół jądra krąży z wielką szybkością elektron. Poruszający się elektron jest równoważny prądowi elektrycznemu. Ogólny wzór na natężenia prądu o niezmieniającym się natężeniu jest

$$i = \frac{Q}{t},$$

gdzie Q jest ładunkiem przepływającym w czasie t. Niech okres obiegu elektronu będzie T. Okres ten jest bardzo krótki. W czasie t elektron przejdzie tyle razy przez dany punkt orbity, ile razy T mieści się w t. Oznaczmy

$$\frac{t}{T} = n.$$

Tyle razy przejdzie przez dany punkt orbity ładunek e. Oczywiście jest wszystko jedno, czy przez ten punkt przejdzie n elektronów, czy jeden elektron n razy. Ładunek przeniesiony w czasie t będzie ne, zatem otrzymamy

$$i = \frac{ne}{t} = \frac{e\dfrac{t}{T}}{t} = \frac{e}{T}.$$

Natężenie prądu elektrycznego jest równe $\frac{e}{T}$. Oczywiście i, e i T muszą być wyrażone w jednostkach tego samego układu, a więc np. w układzie ES. Gdybyśmy wyrażając e w jednostkach ES chcieli otrzymać i w jednostkach EM, jak tu jest przyjęte, to ponieważ jednostka EM jest c razy większa od jednostki ES (c — prędkość światła w próżni), natężenie prądu wyrazi się liczbą c razy mniejszą

$$i = \frac{e}{cT}. \tag{25.54}$$

Prąd okrążający pewną powierzchnię S wytwarza pole magnetyczne. Będzie on miał moment magnetyczny

$$M_m = iS,$$

gdzie S jest polem okrążanej powierzchni. A więc i atom, w którym krąży elektron, będzie miał moment magnetyczny

$$\mu = \frac{eS}{cT}. \tag{25.55}$$

Jeżeli elektron krąży po okręgu o promieniu r, to pole okrążane jest

$$S = \pi r^2. \tag{25.56}$$

Obliczmy to pole posługując się wyrażeniem na kręt elektronu

$$K = mvr = mr^2\omega, \tag{25.57}$$

gdzie ω jest prędkością kątową elektronu. Ponieważ okresem obiegu elektronu jest T, więc prędkość kątowa

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Wstawiając tę wartość do wyrażenia (25.57) na kręt otrzymamy

$$K = mr^2 \frac{2\pi}{T},$$

skąd otrzymamy

$$\pi r^2 = S = \frac{KT}{2m}.$$

Podstawiając tę wartość na S do wzoru (25.55) na μ, otrzymamy

$$\mu = \frac{e}{cT} \frac{KT}{2m} = \frac{e}{2mc} K. \tag{25.58}$$

Lecz według założenia Bohra mieliśmy

$$K = k \frac{h}{2\pi}.$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (23.58) otrzymamy

$$\mu = k \frac{eh}{4\pi mc}.$$

Moment magnetyczny atomu wodoru jest całkowitą wielokrotnością wartości

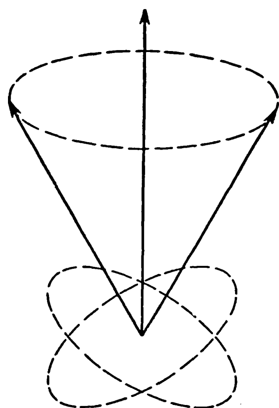
$$\mu_0 = \frac{eh}{4\pi mc}, \tag{25.59}$$

którą nazywamy *magnetonem Bohra*. Wartość magnetonu Bohra jest

$$\mu_0 = 0{,}9273 \cdot 10^{-20} \text{ j. EM.}$$

25.10. Magnetyczna liczba kwantowa. Jak stwierdziliśmy, atom, w którym wokół jądra krąży elektron, ma określony moment magnetyczny. Gdy znajdzie się on w polu magnetycznym, doznaje działania pary sił starającej się ustawić go w określony sposób. Lecz jednocześnie jest on jak gdyby wirującym bąkiem, ma określony kręt. Jak wiadomo, kręt jest wektorem. Będzie on w przypadku jednego elektronu prostopadły do płaszczyzny jego orbity. Pod wpływem sił wywieranych przez pole magnetyczne atom zaczyna wykonywać ruch precesyjny. Wektor krętu będzie opisywał stożek wokół kierunku pola magnetycznego jako osi (rys. 25.5). Energia kinetyczna elektronu ulega wskutek tego zmianie. Zależnie od ustawienia krętu orbitalnego względem kierunku pola, energia kine-

tyczna może się zwiększyć lub zmniejszyć. Jeżeliby wszelkie możliwe orientacje atomów były możliwe, mielibyśmy najrozmaitszy wpływ na energię poszczególnych atomów. Powinno to mieć jako skutek poszerzenie linii widmowych. Tymczasem w rzeczywistości linie widmowe ulegają rozszczepieniu na kilka linii. Tak np. linie wodoru umieszczonego w polu magnetycznym zamieniają się na podwójne, gdy obserwujemy je wzdłuż pola magnetycznego i potrójne, gdy obserwujemy je w kierunku prostopadłym do pola. Jest to tzw. normalne zjawisko Zeemana. Aby można było to wytłumaczyć, trzeba było przyjąć, że kręty atomów nie mogą mieć zupełnie dowolnych kierunków w przestrzeni. Musimy natomiast przyjąć, że tylko takie kierunki są możliwe, przy których rzut krętu na kierunek pola jest całkowitą wielokrotnością $\frac{h}{2\pi}$. Jeżeli wartość $\frac{h}{2\pi}$ obierzemy za jednostkę, to kręt orbitalny elektronu będzie wektorem o długości k jednostek. Według nowej mechaniki kwantowej liczbie kwantowej orbitalnej, zwanej również poboczną liczbą kwantową, powinniśmy przypisać wartość $k - 1$.



Rys. 25.5. Ruch precesyjny atomu

Przyjmując zatem

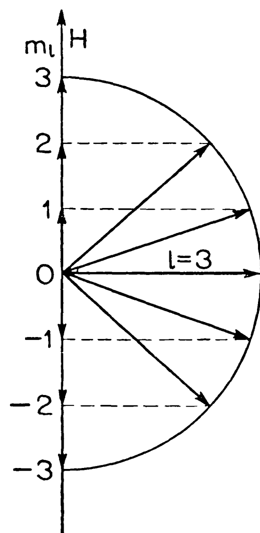
$$l = k - 1$$

i oznaczając rzut krętu na kierunek pola przez m_l możemy napisać

$$m_l = l \cos \varphi .$$

Liczba m_l również musi być liczbą całkowitą (rys. 25.6). Nazywamy ją liczbą kwantową magnetyczną. Ponieważ m_l jest rzutem wektora $\vec{l}$ na kierunek pola, zatem może mieć co najwyżej długość równą długości wektora $\vec{l}$, jak to zresztą pokazuje wzór. Ponieważ kąt φ może mieć również wartości większe od $\frac{\pi}{2}$, więc liczba kwantowa m_l może mieć również wartości ujemne. Zatem w ogólności liczba m_l może mieć wartości następujące:

$$-l,\ -l+1,\ \ldots, 0,\ \ldots,\ l-1,\ l.$$



Rys. 25.6. Liczba kwantowa magnetyczna

Ponieważ na rozmaite orbity pole magnetyczne ma różny wpływ, stąd pochodzi rozszczepienie poziomów energetycznych atomów i wskutek tego rozszczepienie linii widmowych.

25.11. Spin elektronu. Czwarta liczba kwantowa. Wprowadzenie trzeciej liczby kwantowej nie usunęło wszystkich trudności w wyjaśnieniu zagadnień linii widmowych. Nie udało się wytłumaczyć tzw. anomalnego zjawiska Zeemana, jak również faktu, że w wielu atomach (np. w metalach alkalicznych) linie rozszczepiają się na kilka składników, a więc np. w widmie metali alkalicznych występują podwójne linie zwane dubletami, w widmach metali ziem alkalicznych występują linie potrójne zwane trypletami itd. Wytłumaczenie istnienia bardzo wielkiej liczby linij w widmach wielu pierwiastków, a więc i wielkiej liczby poziomów energetycznych natrafiało na ogromne trudności. Wszystkie trudności zostały za jednym zamachem usunięte przez wprowadzenie przez Uhlenbecka i Goudsmita (czyt. Julenbeka i Gaudsmita) hipotezy, według której elektron wiruje dokoła osi przechodzącej przez jego środek, tak jak Ziemia koło własnej osi. Aby wartości krętu elektronu dały wyniki zgodne z doświadczeniem należało przyjąć na kręt elektronu

$$K_e = s\frac{h}{2\pi}, \tag{25.60}$$

gdzie $s = {}^1/_2$. Od wyrazu angielskiego *spin* — wirować, kręcić się nazwano kręt elektronu *spinem*. s nazywa się spinową liczbą kwantową. Jeżeli wiruje ładunek elektryczny, to musi to powodować istnienie momentu magnetycznego. Na wartość momentu magnetycznego musi się przyjąć wartość

$$\mu_0 = \frac{eh}{4\pi mc}.$$

To znaczy, że moment magnetyczny wirującego elektronu równy jest magnetonowi Bohra. Należy zwrócić uwagę, że stosunek momentu magnetycznego do krętu elektronu jest inny niż stosunek momentu magnetycznego orbitalnego do krętu. Kręt orbitalny elektronu na torze podstawowym jest

$$\frac{h}{2\pi},$$

moment magnetyczny zaś równa się magnetonowi Bohra. Natomiast kręt elektronu wskutek jego wirowania ma wartość

$$\frac{1}{2}\,\frac{h}{2\pi},$$

a moment magnetyczny równa się również magnetonowi Bohra. Zatem stosunek momentu magnetycznego spinowego do krętu spinowego jest dwa razy większy niż stosunek momentu magnetycznego orbitalnego w stanie podstawowym do krętu orbitalnego.

Kręt elektronu ma tę osobliwość, że w polu magnetycznym może ustawiać się jedynie tylko albo zgodnie równolegle do pola, albo przeciwrównolegle.

Liczba kwantowa, nazywana w tym przypadku liczbą spinową lub nawet w skróceniu spinem, przybierać może tylko dwie wartości, mianowicie

$$+\frac{1}{2} \quad \text{albo} \quad -\frac{1}{2}.$$

25.12. Liczby kwantowe elektronów i zasada Pauliego. Widzieliśmy poprzednio, że energię elektronu na jego orbicie określa główna liczba kwantowa n, która może mieć tylko wartości całkowite 1, 2, 3,... Wartość krętu orbitalnego i jednocześnie stosunek osi małej do wielkiej orbity eliptycznej określony jest przez orbitalną liczbę kwantową l. l może przybierać wartości 0, 1, 2, ..., $n-1$. Następną liczbą kwantową jest orbitalna magnetyczna liczba kwantowa m, która może przybierać wartości $-l, -l+1, ..., 0, 1 ..., +l$. Ostatnia liczba, liczba spinowa, oznaczana zwykle m_s, może przybierać tylko wartości $+{}^1/_2$ i $-{}^1/_2$. Zestawmy to wszystko razem w tablicy.

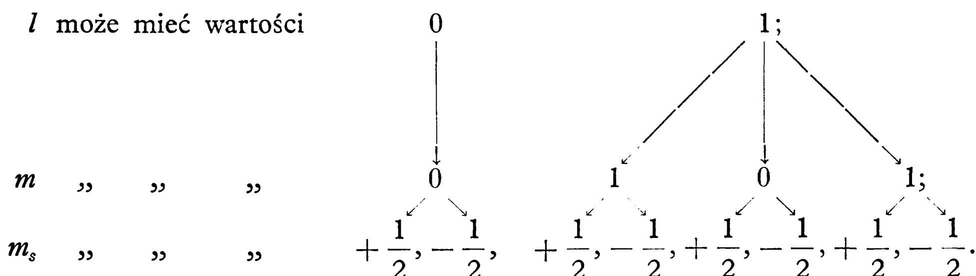
Tabela 26. 1

Liczba kwantowa	Symbol	Wartości, jakie przybiera liczba kwantowa
Główna	n	1, 2, 3,...
Orbitalna	1	$0, 1, ..., n-1$; razem n wartości
Magnetyczna	m	$-l, -l+1, ..., 0, ... +l$; razem $2l+1$ wartości
Spinowa	m_s	$+{}^1/_2$, $-{}^1/_2$; razem 2 wartości

Zasada Pauliego wyprowadzona z ogromnego materiału doświadczalnego, mająca ogromne znaczenie tak w teorii budowy atomów, jak i ciał stałych, mówi, że w atomie nie mogą istnieć elektrony, które by miały wszystkie cztery liczby kwantowe identyczne. Gdy więc weźmiemy np. pod uwagę w atomie elektron o głównej liczbie kwantowej $n = 1$, to, jak widać z powyższej tablicy, jego orbitalna liczba kwantowa może być tylko 0, magnetyczna również 0, spinowa może być $+{}^1/_2$ lub $-{}^1/_2$. A więc mogą w atomie istnieć tylko 2 elektrony o głównej liczbie kwantowej $n = 1$. Te dwa elektrony tworzą tzw. warstwę K. Następny, trzeci elektron, musi mieć już główną liczbę kwantową $n = 2$. Będzie on należał do nowej warstwy zwanej warstwą L.

Elektrony, które mają tę samą wartość głównej liczby kwantowej, tworzą określoną warstwę. Warstwy kolejno noszą nazwy K, L, M, N, O,... Elektrony tworzące określoną warstwę dzielimy na podwarstwy w zależności od orbitalnej liczby kwantowej l. Elektrony, dla których liczba l ma tę samą wartość, tworzą określoną podwarstwę. Liczba elektronów w danej podwarstwie zależy od liczby mo-

żliwych wartości liczb m i m_s. Gdy więc główna liczba kwantowa $n = 2$ to liczba



Mamy zatem dwie podwarstwy odpowiadające wartościom $l = 0$ i $l = 1$. Pierwsza podwarstwa zawiera 2 elektrony, druga — 6. Razem warstwa L może mieć 8 elektronów.

Nie trudno jest policzyć, ile elektronów mogą zawierać poszczególne warstwy. Przy danej wartości głównej liczby kwantowej n liczba kwantowa l może przybierać n różnych wartości, przy danej zaś wartości liczby l, liczba m może przybierać $2l + 1$ wartości. Zatem w danej podwarstwie odpowiadającej określonej wartości l może być

$$2(2l + 1) \text{ elektronów}$$

(gdyż mogą być 2 elektrony o tych samych wartościach liczb l i m, a różnych liczbach kwantowych spinowych). A więc wszystkich elektronów w danej warstwie zważywszy, że l może przybierać n różnych wartości będzie

$$N = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2\sum_{l=0}^{n-1}(2l + 1) = 2(1 + 3 + 5 + \ldots).$$

W nawiasie mamy postęp arytmetyczny o różnicy 2 i liczbie wyrazów n. Jak wiadomo, suma wyrazów postępu arytmetycznego równa się połowie sumy wyrazów skrajnych pomnożonej przez liczbę wyrazów. Zatem

$$N = 2\frac{1 + [2(n-1) + 1]}{2}n = 2n^2.$$

A więc warstwa K, dla której $n = 1$, może mieć najwyżej 2 elektrony. Dla warstwy L $n = 2$, zatem może ona zawierać 8 elektronów. Dla warstwy M $n = 3$, a więc może ona zawierać 18 elektronów. Warstwa N ($n = 4$) może zawierać 32 elektrony. Warstwa O ($n = 5$) teoretycznie mogłaby zawierać 50 elektronów, lecz nigdy nie jest zapełniona całkowicie.

W podobny sposób można obliczyć, że w warstwie L będą dwie podwarstwy; pierwsza zawierająca 2 elektrony ($l = 0$), druga zawierająca 6 elektronów. W warstwie M będą 3 podwarstwy: pierwsza zawierająca 2 elektrony ($l = 0$), druga zawierająca 6 elektronów ($l = 1$), trzecia zawierająca 10 elektronów ($l = 3$).

Przyjętym sposobem oznaczania elektronów jest następujący: stany elektronów, dla których $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, oznacza się kolejnymi literami s, p, d, f, g, h. Główną liczbę kwantową pisze się po lewej stronie. A więc symbol $1s$ będzie oznaczał elektron w stanie $n = 1$, $l = 0$, symbol $3d$ będzie oznaczał elektron w stanie $n = 3$, $l = 2$ itd. W tablicy I wyszczególnione są warstwy i podwarstwy pierwiastków ustawionych według wzrastającej liczby atomowej.

Tablica I

Warstwy elektronowe w atomach

Warstwy			K	L		M			N			
Wartości n			1	2		3			4			
Wartości l			0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
Oznaczenia			$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$
Z	Pierwiastek	Energia jonizacji										
1	H	13,53	1									
2	He	24,46	2									
3	Li	5,37	2	1								
4	Be	9,28	2	2								
5	B	8,28	2	2	1							
6	C	11,22	2	2	2							
7	N	14,48	2	2	3							
8	O	13,55	2	2	4							
9	F	18,6	2	2	5							
10	Ne	21,47	2	2	6							
11	Na	5,12	2	2	6	1						
12	Mg	7,61	2	2	6	2						
13	Al	5,96	2	2	6	2	1					
14	Si	8,12	2	2	6	2	2					
15	P	10,9	2	2	6	2	3					
16	S	10,3	2	2	6	2	4					
17	Cl	12,96	2	2	6	2	5					
18	A	15,69	2	2	6	2	6					
19	K	4,32	2	2	6	2	6		1			
20	Ca	6,09	2	2	6	2	6		2			
21	Sc	6,7	2	2	6	2	6	1	2			
22	Ti	6,81	2	2	6	2	6	2	2			
23	V	6,76	2	2	6	2	6	3	2			
24	Cr	6,74	2	2	6	2	6	5	1			
25	Mn	7,41	2	2	6	2	6	5	2			

d.c. Tablicy I

Warstwy elektronowe w atomach

Warstwy			K	L	M			N			O		
Wartości *n*			1	2	3			4			5		
Wartości *l*					0	1	2	0	1	2	0	1	2
Oznaczenia					*3s*	*3p*	*3d*	*4s*	*4p*	*4d*	*5s*	*5p*	*5d*
Z	Pierwiastek	Energia jonizacji											
26	Fe	7,83	2	8	2	6	6	2					
27	Co	8,5	2	8	2	6	7	2					
28	Ni	7,61	2	8	2	6	8	2					
29	Cu	7,68	2	8	2	6	10	1					
30	Zn	9,36	2	8	2	6	10	2					
31	Ga	5,97	2	8	2	6	10	2	1				
32	Ge	8,09	2	8	2	6	10	2	2				
33	As	10	2	8	2	6	10	2	3				
34	Se	9,5	2	8	2	6	10	2	4				
35	Br	11,80	2	8	2	6	10	2	5				
36	Kr	13,94	2	8	2	6	10	2	6				
37	Rb	4,16	2	8	2	6	10	2	6		1		
38	Sr	5,67	2	8	2	6	10	2	6		2		
39	Y	6,5	2	8	2	6	10	2	6	1	2		
40	Zr	6,92	2	8	2	6	10	2	6	2	2		
41	Nb		2	8	2	6	10	2	6	4	1		
42	Mo	7,35	2	8	2	6	10	2	6	5	1		
43	Tc		2	8	2	6	10	2	6	6	1		
44	Ru	7,7	2	8	2	6	10	2	6	7	1		
45	Rh	7,7	2	8	2	6	10	2	6	8	1		
46	Pd	8,3	2	8	2	6	10	2	6	10			
47	Ag	7,54	2	8	2	6	10	2	6	10	1		
48	Cd	8,96	2	8	2	6	10	2	6	10	2		
49	In	5,76	2	8	2	6	10	2	6	10	2	1	
50	Sn	7,30	2	8	2	6	10	2	6	10	2	2	

d.c. Tablicy I

Warstwy elektronowe w atomach

Warstwy			K	L	M	N				O			P		
Wartości *n*						4				5			6		
Wartości *l*						0	1	2	3	0	1	2	0	1	2
Oznaczenia						*4s*	*4p*	*4d*	*4f*	*5s*	*5p*	*5d*	*6s*	*6p*	*6d*
Z	Pierwiastek	Energia jonizacji													
51	Sb	8,5	2	8	18	2	6	10		2	3				
52	Te	8,96	2	8	18	2	6	10		2	4				
53	J	10,6	2	8	18	2	6	10		2	5				
54	Xe	12,08	2	8	18	2	6	10		2	6				
55	Cs	3,87	2	8	18	2	6	10		2	6		1		
56	Ba	5,19	2	8	18	2	6	10		2	6		2		
57	La	5,6	2	8	18	2	6	10		2	6	1	2		
58	Ce	6,54	2	8	18	2	6	10	1	2	6	1	2		
59	Pr		2	8	18	2	6	10	2	2	6	1	2		
60	Nd		2	8	18	2	6	10	3	2	6	1	2		
61	Pm		2	8	18	2	6	10	4	2	6	1	2		
62	Sm		2	8	18	2	6	10	5	2	6	1	2		
63	Eu	5,64	2	8	18	2	6	10	6	2	6	1	2		
64	Gd	6,16	2	8	18	2	6	10	7	2	6	1	2		
65	Tb		2	8	18	2	6	10	8	2	6	1	2		
66	Dy		2	8	18	2	6	10	9	2	6	1	2		
67	Ho		2	8	18	2	6	10	10	2	6	1	2		
68	Er		2	8	18	2	6	10	11	2	6	1	2		
69	Tu		2	8	18	2	6	10	12	2	6	1	2		
70	Nb		2	8	18	2	6	10	13	2	6	1	2		
71	Lu		2	8	18	2	6	10	14	2	6	1	2		
72	Hf		2	8	18	2	6	10	14	2	6	2	2		
73	Ta		2	8	18	2	6	10	14	2	6	3	2		
74	W	7,94	2	8	18	2	6	10	14	2	6	4	2		
75	Re		2	8	18	2	6	10	14	2	6	5	2		

d.c. Tablicy I

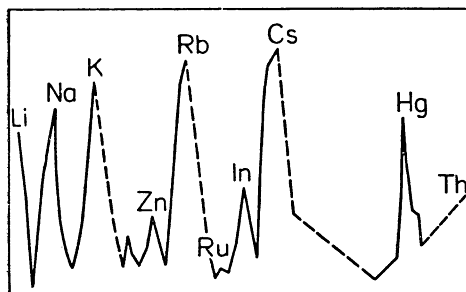
Warstwy elektronowe w atomach

Warstwy			K	L	M	N	O			P			Q
Wartości *n*			1	2	3	4	5			6			7
Wartości *l*							0	1	2	0	1	2	0
Oznaczenia							5*s*	5*p*	5*d*	6*s*	6*p*	6*d*	7*s*
Z	Pierwiastek	Energia jonizacji											
76	Os		2	8	18	32	2	6	6	2			
77	Ir		2	8	18	32	2	6	7	2			
78	Pt	8,9	2	8	18	32	2	6	9	1			
79	Au	9,2	2	8	18	32	2	6	10	1			
80	Hg	10,38	2	8	18	32	2	6	10	2			
81	Tl	6,07	2	8	18	32	2	6	10	2	1		
82	Pb	7,38	2	8	18	32	2	6	10	2	2		
83	Bi	8,0	2	8	18	32	2	6	10	2	3		
84	Po		2	8	18	32	2	6	10	2	4		
85	At		2	8	18	32	2	6	10	2	5		
86	Rn	10,69	2	8	18	32	2	6	10	2	6		
87	Fr		2	8	18	32	2	6	10	2	6		1
88	Ra		2	8	18	32	2	6	10	2	6		2
89	Ac		2	8	18	32	2	6	10	2	6	1	2
90	Th		2	8	18	32	2	6	10	2	6	2	2
91	Pa		2	8	18	32	2	6	10	2	6	3	2
92	U		2	8	18	32	2	6	10	2	6	4	2

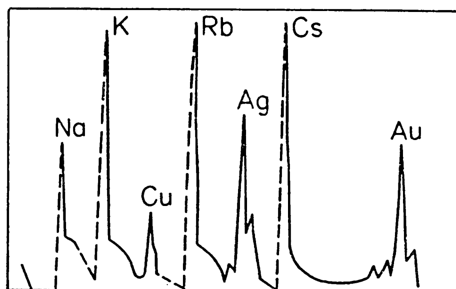
25.13. Układ okresowy pierwiastków. Jak wiadomo, Mendelejew uszeregował pierwiastki według wzrastającego ciężaru atomowego w tablicę w ten sposób, że pierwiastki podobne pod względem chemicznym znalazły się jedne pod drugimi. W tak ułożonym układzie występuje pewna okresowość własności pierwiastków. Nie ma tu jednak zupełnej regularnej okresowości, gdyż okresy zawierają różne liczby pierwiastków. W obecnie używanym układzie pierwiastki ustawione są w poziomych okresach i pionowych grupach. W czterech miejscach układu mamy odstępstwo od zasady wzrastania ciężaru atomowego. W tych miejscach pierwiastek o mniejszym ciężarze atomowym znajduje się po pierwiastku o większym ciężarze atomowym. Są to mianowicie pierwiastki 18 A — 19 K, 27 Co — 28 Ni, 52 Te — 53 J, 90 Th — 91 Pa.

Wartościowość chemiczna w każdej grupie jest taka sama. Od lewej strony na prawo wartościowość względem tlenu przy przejściu od jednego pierwiastka

do następnego wzrasta o jedność. Przykładami są związki Na_2O, MgO, Al_2O_3, SiO_2, P_2O_5, SO_3, Cl_2O_7. Wartościowość względem wodoru wzrasta w stronę przeciwną. Przykładami są HF, H_2O, NH_3, CH_4. W zerowej grupie znajdują się gazy szlachetne nie łączące się chemicznie z żadnym z pierwiastków. W pierwszych dwóch okresach mamy po osiem pierwiastków, w następnych dwóch po 18, w szóstym zaś 32. Okresowość własności przerywa się w dwóch miejscach: od numeru 57 do 71, gdzie znajdują się pierwiastki bardzo podobne pod względem chemicznym — lantanowce, oraz od 89 — 101, gdzie znajdują się aktynowce. Podobną niezupełną okresowość wykazuje wiele fizycznych własności pierwiastków, jak współczynnik rozszerzalności liniowej (rys. 25. 7), przewodność elek-



Rys. 25.7. Współczynnik rozszerzalności liniowej w układzie okresowym



Rys. 25.8. Przewodność elektryczna w układzie okresowym

tryczna (rys. 25.8), energia jonizacji. Również widma optyczne wykazują podobną okresowość. Wszystkie te właściwości dają się objaśnić, jeżeli weźmiemy pod uwagę budowę warstw elektronowych poszczególnych pierwiastków.

Warstwa K, następnie zaś warstwa L, dwie podwarstwy warstwy M, w ogóle ugrupowanie 8 elektronów stanowi specjalnie trwały układ. Energia potrzebna do wyrwania elektronu z takiej powłoki elektronowej jest stosunkowo duża, jak to łatwo stwierdzić z tablicy I. Toteż pierwiastki, których atomy mają takie warstwy elektronowe zewnętrzne, są pierwiastkami nie wchodzącymi w żadne połączenia chemiczne z innymi pierwiastkami. Są to pierwiastki stojące w grupie zerowej, będące gazami szlachetnymi: He, Ne, A, Kr, Xe, Rn. Po gazach szlachetnych następują pierwiastki, którym po zamkniętym układzie elektronów przybywa jeden elektron w następnej warstwie. Są to metale alkaliczne: Li, K, Na, Rb, Cs. Wszystkie one mają jedną wspólną cechę budowy: ostatni elektron jest stosunkowo znacznie oddalony od jądra. Jądro przyciąga go zatem słabo. Prócz tego elektron i jądro przedzielone są warstwą wewnętrznych elektronów działających na zewnętrzny elektron odpychająco. Wskutek tego jest on bardzo słabo związany z atomem. Można to łatwo poznać po małej energii jonizacji. Toteż bardzo łatwo tracą ten jeden elektron, są jednowartościowe i tworzą jony

dodatnie. Natomiast pierwiastki stojące w VII grupie mają prawie że kompletnie zamkniętą powłokę elektronową. Brakuje im tylko jednego elektronu. Toteż łatwo przyłączają jeden elektron tworząc jony ujemne.

Podobieństwo chemiczne pierwiastków jednej grupy wynika z takiej samej budowy zewnętrznej powłoki elektronowej. A więc wszystkie metale alkaliczne mają po jednym elektronie na zewnątrz zamkniętej powłoki elektronowej, wszystkie pierwiastki grupy drugiej: Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra mają po dwa elektrony w warstwie zewnętrznej, wszystkie pierwiastki grupy VII mają po siedem elektronów w ostatniej warstwie. Podobieństwo pierwiastków takich, jak Fe, Co, Ni, tzw. triad, tłumaczy się tym, że mają one zewnętrzne warstwy elektronowe jednakowe: po dwa elektrony, a różnią się tylko liczbą elektronów w wewnętrznej warstwie M. Lantanowce, nadzwyczaj podobne co do własności chemicznych, różnią się tylko liczbą elektronów w wewnętrznej warstwie N, obie zaś zewnętrzne warstwy, O i P mają identyczne.

25.14. Widma pierwiastków o wielu elektronach. Pierwiastki, których powłoki elektronowe zawierają więcej niż jeden elektron, dają również widma liniowe (oczywiście, gdy są w stanie lotnym), lecz stosunki są tu o wiele więcej zawiłe niż w atomie wodoru. Przede wszystkim sposoby pobudzenia do świecenia mają wielki wpływ na wygląd widma, tak że widma tego samego pierwiastka mogą się zasadniczo różnić. Zależy to od tego, czy zostały pobudzone do świecenia atomy neutralne, czy też zjonizowane. W płomieniu lub w łuku elektrycznym palącym się między elektrodami metalowymi pobudzane są do świecenia atomy neutralne, dlatego nazywamy takie widma widmami łukowymi. Natomiast widma zjonizowanych atomów nazywamy widmami iskrowymi, gdyż pojawiają się one przy silnych iskrowych wyładowaniach. Często oznacza się symbolem chemicznym z następującą liczbą rzymską rodzaj widma. I oznacza widmo neutralnych atomów (łukowe), II — widmo raz zjonizowanych atomów (pozbawionych jednego elektronu — pierwsze widmo iskrowe), III — widmo dwa razy zjonizowanych atomów itd. Na przykład Ca I oznacza widmo neutralnych atomów wapnia, He II — widmo raz zjonizowanego helu.

Stosunkowo najprościej przedstawiają się widma metali alkalicznych. Pierwiastki, takie jak lit, sód, potas, mają jądro otoczone zamkniętą grupą elektronów. W stosunkowo zaś dużej odległości znajduje się zewnętrzny elektron, elektron wartościowości. Emisja światła zachodzi przy przeskokach tego ostatniego elektronu z torów o wyższej energii na tory o energii niższej. Ładunek jądra Ze jest w tym przypadku ekranowany ładunkiem zamkniętej grupy $Z-1$ elektronów, a więc ładunkiem $(Z-1)e$. Mamy więc jeden zewnętrzny elektron poruszający się jak gdyby w polu jednego ładunku elementarnego. Przy torach kołowych lub oddalonych od wewnętrznej warstwy elektronów widmo powinno być podobne do widma wodoru i rzeczywiście tak jest. Jednakże przy bardzo wydłużonych torach eliptycznych część toru elektronu przebiega w „kadłubie" albo „rdzeniu"

Okresowy układ

	0	1a	2a	3a	4a	5a	6a	7a
Okres 1	0 n 1,00895	1 H 1,0080						
Okres 2	2 He 4,003	3 Li 6,940	4 Be 9,02					
Okres 3	10 Ne 20,183	11 Na 22,997	12 Mg 24,32					
Okres 4	18 A 39,944	19 K 39,096	20 Ca 40,08	21 Sc 45,10	22 Ti 47,90	23 V 50,95	24 Cr 52,01	25 Mn 54,93
Okres 5	36 Kr 83,7	37 Rb 85,48	38 Sr 87,63	39 Y 88,92	40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,95	43 Tc 99
Okres 6	54 Xe 131,3	55 Cs 132,91	56 Ba 137,36	57—71 lanta- nowce	72 Hf 178,6	73 Ta 180,88	74 W 183,92	75 Re 186,31
Okres 7	86 Rn 222	87 Fr 223	88 Ra 226,05	89— akty- nowce				
Lanta- nowce	57 La 138,92	58 Ce 140,13	59 Pr 140,92	60 Nd 144,27	61 Pm 145	62 Sm 150,43	63 Eu 152,0	64 Gd 156,9
Akty- nowce	89 Ac 227	90 Th 232,12	91 Pa 231	92 U 238,07	93 Np 237	94 Pu 242	95 Am 243	96 Cm 243

pierwiastków

8			1b	2b	3b	4b	5b	6b	7b
					5 B 10,82	6 C 12,010	7 N 14,008	8 0 16,0000	9 F 19,00
					13 Al 26,97	14 Si 28,06	15 P 30,98	16 S 32,06	17 Cl 35,457
26 Fe 55,85	27 Co 58,94	28 Ni 58,69	29 Cu 63,57	30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,60	33 As 74,91	34 Se 78,96	35 Br 79,916
44 Ru 101,7	45 Rh 102,91	46 Pd 106,7	47 Ag 107,880	48 Cd 112,41	49 In 114,76	50 Sn 118,70	51 Sb 121,76	52 Te 127,61	53 J 126,92
76 Os 190,2	77 Ir 193,1	78 Pt 195,23	79 Au 197,2	80 Hg 200,61	81 Tl 204,39	82 Pb 207,21	83 Bi 209,00	84 Po 210	85 At 210

65 Tb 159,2	66 Dy 162,46	67 Ho 164,9	68 Er 167,24	69 Tu 169,4	70 Yb 173,04	71 Lu 174,99

97 Bk 245	98 Cf 246	99 E 253	100 Fm 255	107 Mv

atomu to znaczy w obszarze, w którym znajdują się pozostałe elektrony. To powoduje odkształcenie orbit eliptycznych połączone ze zmianą energii.

Linie widmowe metali alkalicznych można również przedstawić w postaci różnicy dwóch termów. Każdy z tych termów według Rydberga można napisać w postaci

$$T = \frac{R}{(n+a)^2},$$

gdzie n przybiera wartości całkowite, a a oznacza stały dla danej serii wyraz poprawkowy. Dla przykładu podajemy poniżej wzór dla tzw. serii głównej potasu. Seria ta składa się z linii podwójnych zwanych dubletami, leżących blisko siebie.

Główna seria widmowa potasu:

$$\tilde{\nu} = R\left[\frac{1}{(1+0{,}77)^2} - \frac{1}{(n+0{,}235)^2}\right],$$
$$\tilde{\nu} = R\left[\frac{1}{(1+0{,}77)^2} - \frac{1}{(n+0{,}232)^2}\right]. \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Jak widać z tych wzorów, przy rosnącej liczbie kwantowej n odstęp między podwójnymi liniami zmniejsza się. Granica odpowiadająca wartości $n = \infty$ jest pojedyncza.

Tak zwana I seria poboczna (albo rozmyta) wyraża się wzorami:

$$\tilde{\nu} = R\left[\frac{1}{(2+0{,}235)^2} - \frac{1}{(n-0{,}147)^2}\right],$$
$$\tilde{\nu} = R\left[\frac{1}{(2+0{,}232)^2} - \frac{1}{(n-0{,}147)^2}\right]. \qquad n = 3, 4, 5, \ldots$$

Jak widać, linie tej serii nie dążą do wspólnej granicy.

Termy widmowe, oczywiście, określają poziomy energetyczne atomów. Jak już poprzednio było wyprowadzone,

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = \frac{E_p}{hc} - \frac{E_k}{hc}, \tag{25.61}$$

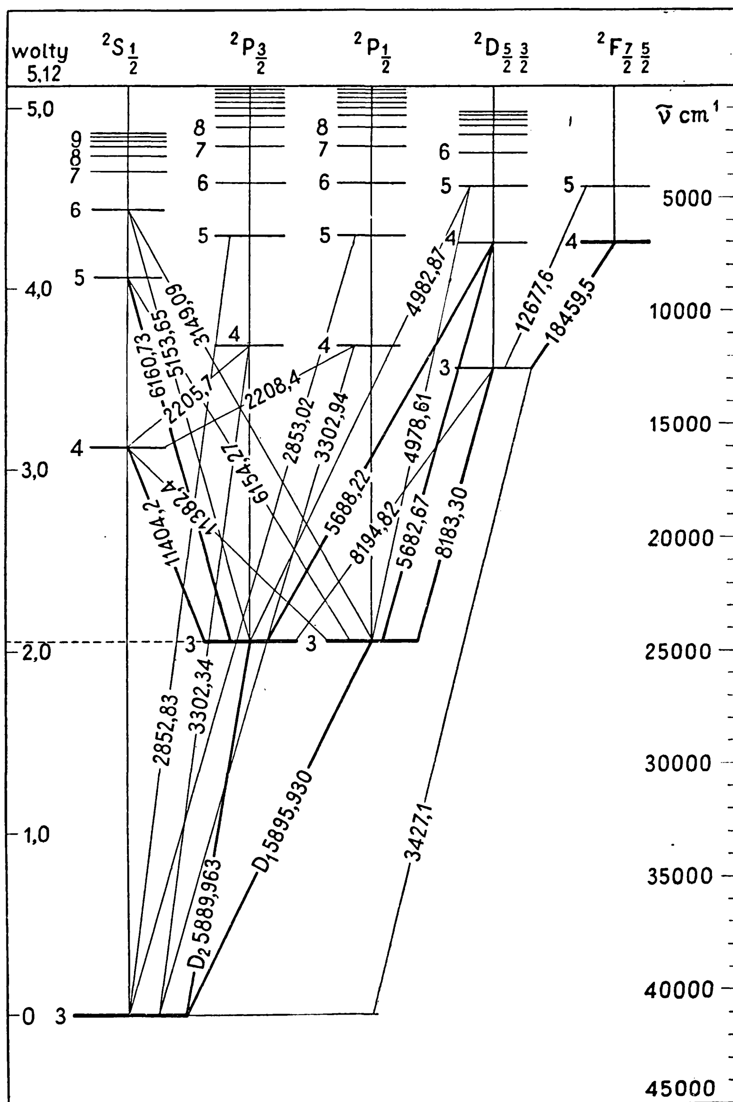
gdzie E_p jest energią atomu w stanie początkowym, a E_k w stanie końcowym. Zatem term

$$T = \frac{E}{hc}$$

pomnożony przez hc daje energię atomu.

Jak mówiliśmy, według zasady kombinacji Ritza różnicy dwóch termów odpowiada określona linia widmowa. Jednakże nie wszystkie kombinacje termów dają istotnie obserwowane linie. Zastosowanie zasady odpowiedniości pozwala na

ustalenie tzw. *reguł wyboru* ustalających z jakich poziomów energetycznych na jakie przeskoki są „dozwolone". Pewne przeskoki są „wzbronione", a więc kombinacja odpowiednich termów nie daje linii obserwowanych w doświadczeniu.



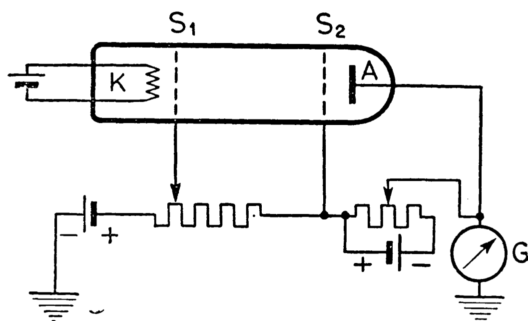
Rys. 25.9. Poziomy energetyczne atomu sodu

Na rysunku 25.9 przedstawione są poziomy energetyczne atomu sodu oraz dozwolone przejścia z jednych poziomów do drugich, jak również długości fal odpowiadające tym przejściom. Grubość linij oddaje ich natężenia.

Pierwiastki o dwóch elektronach w podwarstwie zewnętrznej dają widmo o wiele więcej skomplikowane. Istnieją tu dwa układy termów. Jeden składa się z pojedynczych termów, których różnica daje pojedyncze linie (singulety), drugi — z potrójnych (triplety). Im w dalszej grupie układu okresowego znajduje się pierwiastek, tym więcej skomplikowane jest jego widmo, co łatwo wytłumaczyć obecnością w zewnętrznej warstwie coraz większej liczby elektronów. Najwięcej skomplikowane widmo mają pierwiastki ósmej grupy.

Badanie szczegółowe widm pierwiastków stanowi całą obszerną dziedzinę fizyki. Temat ten przekracza ramy niniejszego podręcznika.

25.15. Wzbudzanie poszczególnych linii widmowych. Doświadczenie Francka i Hertza. Jak już mówiliśmy poprzednio, atom normalnie znajduje się w stanie podstawowym to znaczy w stanie o najniższej energii. Elektron zewnętrzny krąży po najbliższym torze. Atom może promieniować dopiero wtedy, gdy elektron z niższego poziomu energetycznego zostanie przeniesiony na wyższy. Wtedy atom, jak mówimy, znajduje się w stanie wzbudzonym. Gdy elektron ten wraca na jeden z niższych poziomów, zostaje wypromieniowany foton. Piękne doświadczenia Francka i Hertza powtórzone potem w ulepszonej postaci przez wielu fizyków pozwoliły nie tylko na bezpośrednie stwierdzenie tego faktu, lecz również na doświadczalne wyznaczenie różnic energii między różnymi poziomami energetycznymi. Zasadniczy schemat tego doświadczenia przedstawia rys. 25.10. Termoelektrony emitowane przez rozżarzoną katodę przyśpieszane są przez bliską elektrodę S_1 w postaci siatki. Elektrony przebiegając różnicę potencjałów U między katodą i siatką nabywają energii kinetycznej

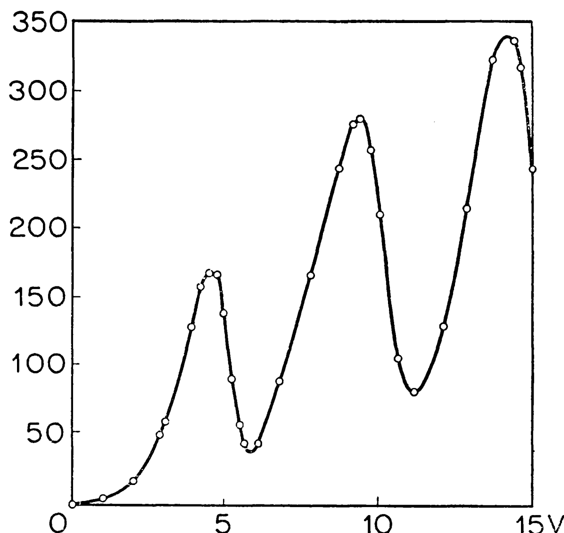


Rys. 25.10. Schemat doświaczenia Francka i Hertza

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

Odległość między siatką i katodą była tak dobrana, aby droga swobodna elektronów była większa od tej odległości, aby więc elektrony na tej przestrzeni nie zderzyły się z atomami. W bańce znajdował się gaz lub para (w doświadczeniach Francka i Hertza para rtęci). Po minięciu siatki elektrony wpadają do przestrzeni, w której nie ma pola, następnie przelatują przez siatkę S_2. Między elektrodę A i siatkę S_2 było przyłożone napięcie hamujące elektrony. Przy dostatecznie małej energii elektronów przy spotkaniu się z atomami w przestrzeni między siatkami doznają one odbić sprężystych, tracąc bardzo niewiele energi, gdyż masa atomów

jest o wiele większa od ich masy. Przechodząc zatem z dostateczną energią przez siatkę S_1 i pokonując przeciwnie skierowane pole między siatką S_2 i elektrodą A dochodzą do tej ostatniej. W miarę powiększania napięcia między katodą i siatką S_1 prąd między elektrodą K i A rośnie. Gdy jednak energia elektronów stanie się dostateczna do wzbudzenia spotkanych atomów, tzn. do przeniesienia ich na wyższy poziom energetyczny, prąd w obwodzie dość gwałtownie spada. Elektrony przy takich zderzeniach oddają atomom energię tracąc ją i nie są już w stanie przejść napięcia hamującego między S_2 i A. Przy dalszym wzroście napięcia między katodą i siatką prąd znów zaczyna wzrastać, gdyż ilość przyśpieszanych elektronów wzrasta. Po dojściu do drugiego poziomu energetycznego atomów znowu prąd zaczyna maleć itd. (rys. 25.11).



Rys. 25. 11. Wynik pomiarów Francka i Hertza. Gdy elektrony zaczynają wzbudzać linię widmową, prąd maleje

Przy pierwszym wzbudzeniu gazu elektronami gaz zaczyna świecić. Lecz przy zbadaniu spektroskopowym okazuje się, że pojawia się tylko jedna linia widmowa odpowiadająca przejściu ze stanu podstawowego na bezpośrednio najbliższy poziom energetyczny. Potem pojawia się druga linia i stopniowo następne.

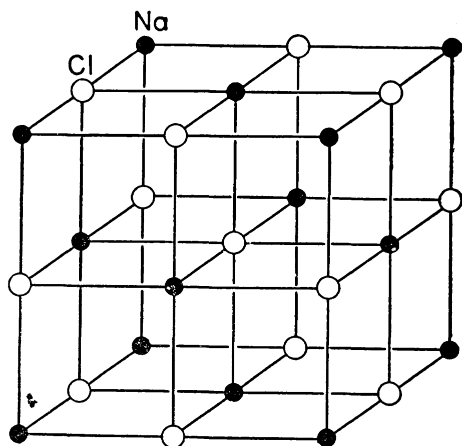
Doświadczenia te najpierw zostały wykonane z parami metali, przede wszystkim rtęci. Natomiast doświadczenia z pierwiastkiem o najprostszych atomach — wodorem — nie były łatwe, gdyż w normalnej temperaturze jego atomy są połączone po dwa tworząc drobiny. Dopiero Olmsteadowi (czyt. Omstedowi) i Comptonowi w r. 1923 udało się urządzić doświadczenie w odpowiednio wysokiej temperaturze, w której drobiny wodoru rozpadają się na atomy i pomierzyć energie potrzebne do otrzymania kolejnych linii serii Lymana. Liczby okazały się zupełnie zgodne z liczbami wyliczonymi z teorii Bohra.

25.16. Widma promieni Röntgena. Widma promieni Röntgena, które otrzymano metodą odbicia od kryształów mają odrębne właściwości od widm widzialnych. Zbadanie ich szczegółowe doprowadziło do ważnych odkryć.

Jak mówiliśmy w ust. 21.13, wiązka promieni Röntgena padająca na kryształ ulega selektywnemu odbiciu według prawa

$$n\lambda = 2d \sin \alpha,$$

gdzie d jest odległością płaszczyzn sieci (płaszczyzn, w których leżą atomy), a α — kątem, jaki tworzy wiązka padająca z płaszczyznami sieci. Jeżeli znamy strukturę kryształu, to odległość d między płaszczyznami możemy obliczyć. Weźmy jako przykład kryształ soli kamiennej NaCl, jeden z najprostszych. NaCl krystalizuje w układzie regularnym. Elementarne komórki są małymi sześcianami, w wierzchołkach których znajdują się na przemian jony Na i Cl (rys. 25.12). Niech M będzie ciężarem drobinowym (lepiej powiedzieć: masą drobinową) NaCl. Wiemy, że gramodrobina każdego związku czy pierwiastka zawiera zawsze $6{,}02\cdot 10^{23}$ drobin (liczba Avogadra). Masa atomowa sodu jest 22,997, chloru — 35,457, zatem masa gramodrobiny jest 58,454 g. Masa 1 cm³, czyli gęstość $\varrho = 2{,}164$ g/cm³. Skoro 1 cm³ NaCl ma masę 2,164 g $= \varrho$, to masa M będzie miała objętość



Rys. 25.12. Kryształ NaCl

$$\frac{M}{\varrho}\ \text{cm}^3.$$

W objętości tej mieści się N drobin, a więc $2N$ atomów, a raczej jonów (gdyż atom Na traci jeden elektron stając się jonem dodatnim, a atom Cl przyłącza jeden elektron stając się jonem ujemnym). Na objętość, na którą przypada jeden jon, otrzymamy wyrażenie

$$V = \frac{M}{2\varrho N}. \tag{25.62}$$

A więc na odległość między jonami otrzymamy wzór

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{2\varrho N}}. \tag{25.63}$$

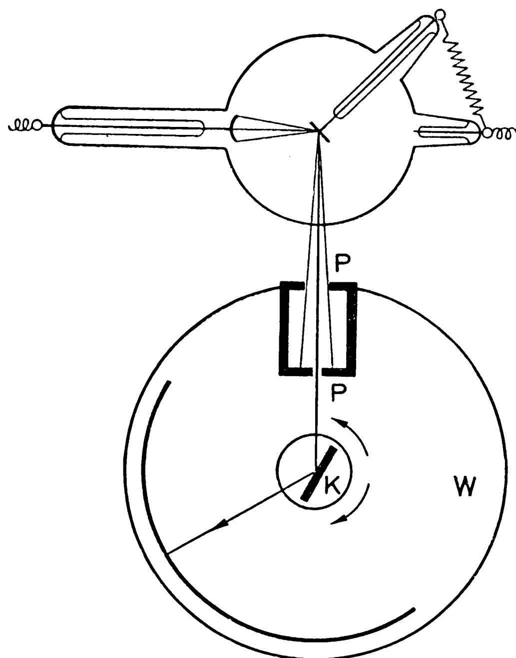
Rachunek daje na d wartość $2{,}814\cdot 10^{-8}$ cm.

Zwykle do spektroskopii używane są nie kryształy NaCl, które są higroskopijne, lecz kryształy kalcytu, dla którego stała sieci została wyznaczona bardzo dokładnie. Wynosi ona

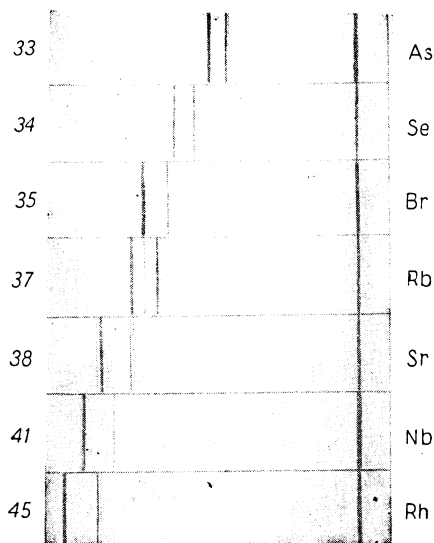
$$d = 3{,}0356\cdot 10^{-8}\ \text{cm}.$$

Przyrządy służące do pomiarów długości fal promieni Röntgena nazywamy spektroskopami lub spektrografami, tak samo jak przyrządy do pomiarów długości fal świetlnych. Spektrograf taki jest przedstawiony na rys. 25.13. Przesłony ołowiane PP z wyciętymi w nich wąskimi szczelinami wycinają z promieni wysy-

łanych przez antykatodę rury rentgenowskiej wiązkę, która pada na powierzchnię kryształu *K*. Kryształ znajduje się w środku puszki metalowej *W* kształtu walca, wzdłuż ścianki której układa się film. Kryształ zostaje wprawiony w powolny ruch obrotowy za pomocą mechanizmu zegarowego. Gdy w wiązce promieniowania znajdują się fale różnej długości, podczas obrotu kryształu odbijają się



Rys. 25. 13. Spektrograf promieni X



Rys. 25. 14. Liniowe widma rentgenowskie, Seria K

tylko wtedy, gdy kąt jest odpowiedni i dają na filmie linie pionowe, zupełnie takie same, jakie dałby zwykły spektrograf w świetle widzialnym. Rysunek 25.14 przedstawia widma liniowe promieni rentgenowskich.

Udało się później również otrzymać widma promieni Röntgena za pomocą zwykłej siatki dyfrakcyjnej, lecz użytej w inny sposób niż przy świetle widzialnym. Gdy mianowicie skieruje się wiązkę promieni rentgenowskich niemal stycznie do powierzchni siatki, ulega ona całkowitemu odbiciu, przy czym prócz wiązki odbitej obserwuje się wiązki ugięte. Z kątów, pod którymi uginają się te wiązki, można obliczyć długość fali.

Badanie widm promieni Röntgena stwierdziło, że w promieniowaniu wysyłanym przez antykatodę mamy dwa odmienne jego rodzaje. Jeden to tzw. promieniowanie hamowania, drugi — to tzw. promieniowanie charakterystyczne. Promieniowanie hamowania daje widmo ciągłe podobnie jak światło białe, z tą różnicą, że z jednej strony, mianowicie od strony fal krótkich, kończy się nagle,

urywa się. Promieniowanie hamowania powstaje przy nagłym zahamowaniu przez antykatodę elektronów biegnących z wielką szybkością w promieniach katodowych. To nagłe zahamowanie wywołuje zaburzenie pola elektromagnetycznego rozchodzące się na wszystkie strony. Rozkład widmowy promieniowania hamowania nie zależy od materiału antykatody, lecz natężenie jego wzrasta z numerem porządkowym i gęstością pierwiastka umieszczonego na antykatodzie. Promieniowanie to od strony fal długich zanika stopniowo, od strony fal krótkich urywa się na fali pewnej określonej długości. Krótszych od niej fal już nie ma w widmie. Długość tej najkrótszej fali da się obliczyć z równania Einsteina

$$eU = \frac{mv^2}{2} = h\nu_{\max} \tag{25.64}$$

wyrażającego, że energia kinetyczna elektronu zamienia się w całości na energię powstającego fotonu $h\nu_{\max}$. Najzasobniejsze w energię fotony wysyłane przez lampę rentgenowską mają energię wynoszącą tyle elektronowoltów, ile woltów wynosi napięcie przyłożone do lampy. A więc np. przy napięciu 100 kV fotony o największej energii będą miały 100 keV.

Wziąwszy pod uwagę związek

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \tag{25.65}$$

nie trudno jest obliczyć, że najkrótsza fala dawana przez lampę przy danym napięciu U wyraża się w angstremach wzorem

$$\lambda_{\min} = \frac{12\,345}{U} \text{Å}. \tag{25.66}$$

Wyznaczając wartości $\lambda_{\min}$ odpowiadające różnym wartościom U można z równania (25.64) wyznaczyć dokładnie wielkość h.

Drugi rodzaj — to promienie charakterystyczne, zawierające tylko pewne długości fal, a więc dające widmo liniowe podobnie jak pary lub gazy świecące w widmie światła widzialnego. Widma liniowe rentgenowskie dawane przez rozmaite pierwiastki podzielono na pewne grupy nazwane kolejnymi literami K, L, M, N itd. Każda z grup składa się z kilku lub więcej linii widmowych. Taką grupę linii nazywamy zwykle serią widmową. Seria K jest najprostsza, składa się z dwóch wyraźnych grup linii, które przy słabym rozszczepieniu wyglądają jak dwie linie, seria L składa się z trzech grup linii. Dalsze serie są coraz bardziej skomplikowane. Dla danego pierwiastka seria K zawiera zawsze fale najkrótsze, seria L złożona jest z fal znacznie dłuższych, jeszcze dłuższe zawarte są w serii M itd. Pomiary długości fal promieni rentgenowskich dały liczby rzędu od 0,1 aż do kilkudziesięciu Å. A więc długości fal promieni rentgenowskich są około tysiąc razy mniejsze od długości fal światła widzialnego. Tabela 25.2 przytacza kilka przykładów długości tych fal.

Tabela 25.2

Linie serii K kilku pierwiastków w Å = 10^{-8} cm

Nr porządkowy	Pierwiastek	$K_{\alpha 1}$	$K_{\alpha 2}$	$K_{\beta 1}$
26	Fe	1,936	1,932	1,753
29	Cu	1,541	1,537	1,389
42	Mo	0,712	0,708	0,631
47	Ag	0,562	0,558	0,496
82	Pb	0,170	0,165	0,146

Fizyk angielski H. G. J. Moseley (Mouzli) w pracy wykonanej w r. 1913 postawił sobie za zadanie zbadać i porównać ze sobą promieniowanie charakterystyczne rozmaitych pierwiastków. Umieszczał on różne pierwiastki na antykatodzie rury rentgenowskiej, pobudzał je do promieniowania przez bombardowanie promieniami katodowymi, a następnie badał wysyłane promieniowanie za pomocą spektrografu z kryształem, podobnego do opisanego poprzednio. Użył on po raz pierwszy fotograficznego sposobu rejestracji linii widmowych. Udało mu się za pomocą tych doświadczeń wykryć nadzwyczaj interesujące fakty. Po pierwsze stwierdził on, że rentgenowskie linie widmowe rozmaitych pierwiastków wykazują niezwykłe podobieństwo. W serii K np. dla wszystkich zbadanych pierwiastków występują zawsze dwie grupy linii w odstępach niewiele się różniących od siebie (rys. 25.14). Podobnie rzeczy się mają z nieco więcej skomplikowaną serią L. Zawsze w tej serii występują trzy grupy linii, które są tym bardziej krótkofalowe, im dalej stoi pierwiastek w tablicy układu periodycznego.

Moseley wykrył następnie, że widma pierwiastków wykazują regularne przesunięcie w stronę fal krótkich tylko wtedy, gdy je ustawić według rosnącego ładunku jądra, a nie według rosnącej masy atomowej. Stwierdził nawet, że istnieje liczbowy związek między długościami wysyłanych fal rentgenowskich i ładunkiem jądra, a mianowicie

$$\sqrt{\nu} = C(Z - a), \tag{25.67}$$

gdzie C i a są to stałe.

Według tego wzoru pierwiastek kwadratowy z częstości odpowiadającej analogicznym liniom różnych pierwiastków jest funkcją liniową ładunku jądra Z (który równa się numerowi porządkowemu pierwiastka (rys. 25.15). Wzór ten pozwala określić miejsce pierwiastka w układzie periodycznym.

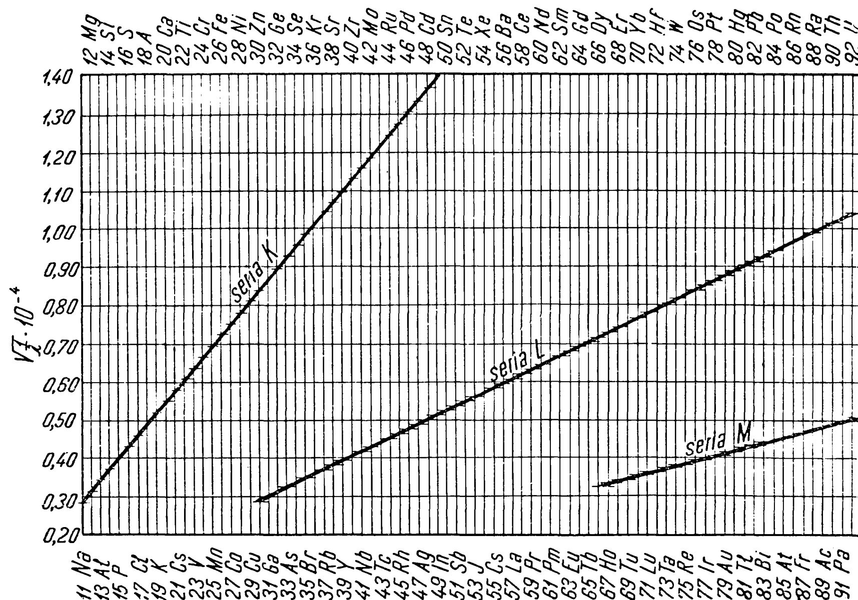
Wzór Moseleya można po pewnych przekształceniach napisać w postaci:

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{25.68}$$

gdzie $k = 1, 2, \ldots,$ $n = 2, 3, \ldots,$ $n > k$. R oznacza stałą Rydberga, a σ pewną stałą różną dla różnych serii widmowych.

Wzór ten wykazuje duże podobieństwo do wzorów na serie widmowe światła. Stąd można wnioskować o analogicznym mechanizmie powstawania linii widmowych światła i linii rentgenowskich.

Jak już mówiliśmy, układ periodyczny Mendelejewa jest to tablica, w której ustawia się w szereg pierwiastki, w zasadzie według rosnącej masy atomowej. Tablica zawiera siedem wierszy poziomych i dziewięć kolumn pionowych. Gdy



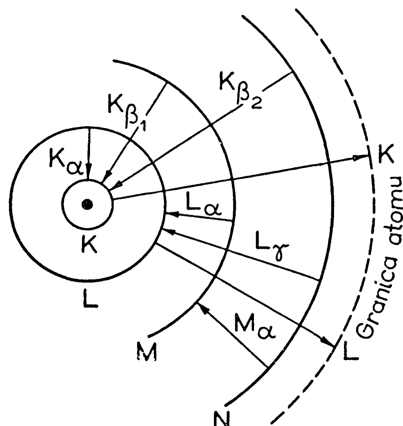
Rys. 25.15. Wykres prawa Moseleya

w ten sposób ustawimy pierwiastki, wówczas te z nich, które posiadają podobne własności chemiczne, znajdą się jeden pod drugim w jednej kolumnie, np. metale alkaliczne: lit, sód, potas, rubid, cez. Podobnie w jednej kolumnie znajdą się chlorowce: fluor, chlor, brom i jod, tak samo gazy tzw. szlachetne: hel, neon, argon, krypton, ksenon, radon. Zasada uszeregowania pierwiastków według rosnących mas atomowych nie da się jednak ściśle przeprowadzić. Gdybyśmy nie dopuścili żadnego od niej wyjątku, wówczas w kilku miejscach tablicy znalazłyby się jeden pod drugim pierwiastki zupełnie niepodobne. Wystąpiłyby również nieprawidłowości w uszeregowaniu widm rentgenowskich. Aby tego uniknąć, trzeba w kilku miejscach pierwiastki poprzestawiać. Z widm rentgenowskich można natychmiast poznać, które to są te pierwiastki i jak je należy ustawić. A więc np. argon (masa atomowa 39,94) musi stać przed potasem (masa atomowa 39,10), kobalt (masa atomowa 58,97) przed niklem (58,68), tellur (masa atomowa 127,5) przed jodem (masa atomowa 126,92). Ponieważ widma rentgenowskie są związane z ładunkiem jądra, zatem nie masa atomowa, lecz

ładunek jądra jest cechą decydującą o jego miejscu w układzie periodycznym, a zatem i o jego własnościach chemicznych. Ładunek jądra, a więc jednocześnie liczba elektronów zewnętrznych, określa indywidualność pierwiastka, masa atomowa natomiast jest jego cechą drugorzędną. Oczywiście liczba elektronów zewnętrznych musi się równać ładunkowi jądra.

Powstawanie promieni charakterystycznych tłumaczy się w podobny sposób, jak powstawanie promieni o pewnych określonych długościach fali, wysyłanych przez świecące pary lub gazy. Silne bombardowanie pierwiastka znajdującego się na antykatodzie elektronami o wielkiej energii kinetycznej powoduje wyrzucenie elektronów z wewnętrznych warstw elektronowych otaczających jądro. Jeżeli np. z warstwy K zostanie wyrzucony elektron poza atom, to z jednej z dalszych warstw przeskakuje elektron na opróżnione miejsce (rys. 25.16). Przy tym przeskoku energia atomu zmniejsza się z E_1 do E_2. Różnica energii zostaje wypromieniowana w postaci promieniowania monochromatycznego o częstości określonej związkiem

$$E_1 - E_2 = h\nu. \qquad (25.69)$$



Rys. 25.16. Powstawanie rentgenowskich serii widmowych

Przy przeskokach z rozmaitych dalszych warstw na tory elektronów warstwy K pojawiają się linie widmowe serii K. Przy przeskokach elektronów z dalszych warstw na opróżnione tory elektronów warstwy L pojawiają się w widmie linie serii L itd.

Gdy wiązka promieni rentgenowskich przechodzi przez ciało, część fotonów zostaje pochłonięta w nim wskutek zjawiska fotoelektrycznego. Foton $h\nu$ o dostatecznej energii zostaje pochłonięty i kosztem jego energii z pewnej warstwy jakiegoś atomu zostaje wyrzucony elektron z energią określoną wzorem Einsteina:

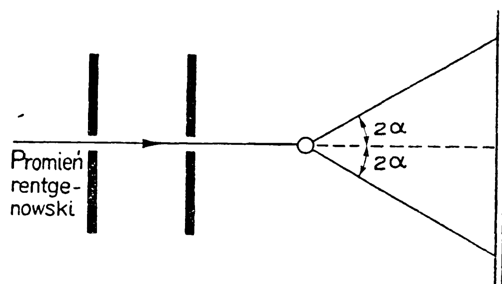
$$h\nu = \frac{mv^2}{2} - W, \qquad (25.70)$$

gdzie W oznacza pracę potrzebną do wyrwania elektronu z danej warstwy. Oczywiście natychmiast z jednej z dalszych warstw przeskakuje elektron na opróżnione miejsce, atom wysyła foton promieniowania charakterystycznego.

Na zjawisku fotoelektrycznym głównie polega również własność promieni rentgenowskich jonizowania powietrza.

25.17. Metoda Debye'a i Scherrera. Z niewielu substancji można uzyskali duże i prawidłowe kryształy. Debye i Scherrer (czyt. Debaj i Szerer) opracować metodę pozwalającą na badanie struktury krystalicznej proszków lub agregatów

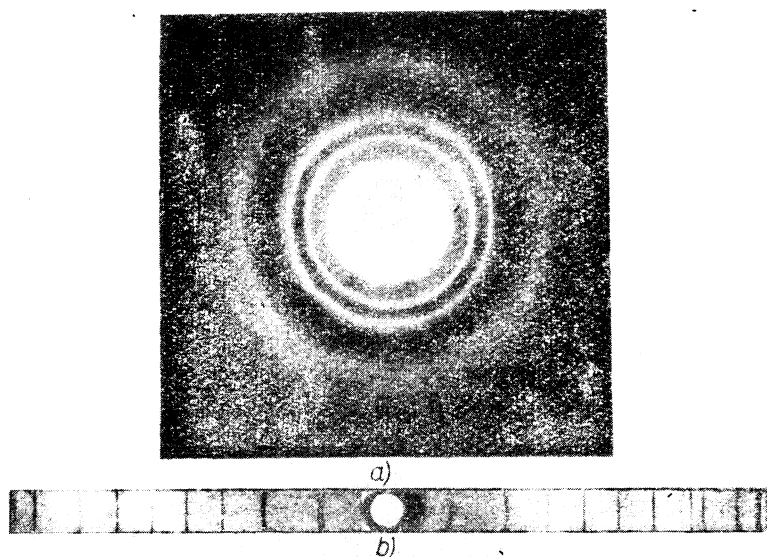
mikrokryształów. W tym celu ze sprasowanego proszku formuje się mały pręcik, na który skierowuje się wąską wiązkę monochromatycznych (o jednej określonej długości fali) promieni Röntgena. Ze względu na to, że kryształki są poustawiane w najrozmaitszych kierunkach, zawsze pewna ich liczba będzie ustawiona tak, iż promień rentgenowski trafi je akurat pod kątem selektywnego odbicia α określonym związkiem Bragga



Rys. 25.17. Zasada metody Debye'a i Scherrera

$$n\lambda = 2d \sin \alpha.$$

Odbity promień będzie tworzyć z promieniem padającym kąt 2α (rys. 25.17). Wszystkie promienie ugięte (nie jest to oczywiście zwykłe odbicie, takie jak promienia światła od zwierciadła) będą leżeć na pobocznicy stożka o kącie 4α przy wierzchołku. Jeżeli na przedłużeniu promienia padającego prostopadle do jego kierunku ustawi się film fotograficzny, otrzymuje się na nim pierścienie odpowiadające widmom różnych rzędów (dla różnych wartości n). Przy użyciu promieni charakterystycznych, zawierających kilka linii, otrzymuje się większą liczbę pierścieni (rys. 25.18a). Można zidentyfikować, które pierścienie odpowiadają różnym użytym długościom fal.



Rys. 25.18. a) Pierścienie dyfrakcyjne, jakie dają promienie rentgenowskie przechodzące przez sproszkowany glin; b) Linie dyfrakcyjne wolframu otrzymane na taśmie filmowej

Często umieszcza się w odpowiedniej kamerze wąski pasek filmu zgięty w kształcie koła, w środku którego umieszcza się proszek. Wtedy na filmie otrzymuje się linie będące przecięciami stożków z powierzchnią filmu (rys. 25.18b). Zdjęcia tą metodą służą do wyznaczania klasy krystalograficznej, stałych sieci oraz tekstury drutów i blach, tj. ustawienie krystalitów pewnymi kierunkami krystalograficznymi równoległe do określonego kierunku (wyciągania lub walcowania).

25.18. Absorpcja promieni Röntgena. Jak już poprzednio mówiliśmy, bardzo dziwną własnością promieni rentgenowskich jest to, że promienie te, w szczególności twarde, przenikają z łatwością przez ciała zupełnie nieprzezroczyste dla zwykłego światła. Przenikając przez ciała doznają one przy tym osłabienia, które zależy od natury tych ciał. Pochłanianie promieni rentgenowskich nie ma nic wspólnego z pochłanianiem promieni światła. Tak np. szkło ołowiowe, które doskonale przepuszcza światło, pochłania bardzo silnie promienie Röntgena. Natomiast promienie rentgenowskie przenikają z łatwością przez blachę aluminiową, zupełnie nieprzepuszczającą światła.

Osłabienie promieni Röntgena zależy od dwóch czynników. Pierwszym jest rozpraszanie promieni na wszystkie strony, wskutek czego wiązka równoległa przenikając przez ciało będzie nieść coraz mniej energii. Drugim czynnikiem jest zjawisko fotoelektryczne. Energia przenikających przez ciało promieni zużywa się na wyrywanie z atomów fotoelektronów i nadanie im energii kinetycznej według prawa Einsteina

$$\frac{1}{2}mv^2 + W = h\nu, \tag{25.71}$$

gdzie W jest energią potrzebną do wyrwania elektronu z danej warstwy elektronowej. Całkowite osłabienie energii niesionej przez wiązkę promieni jest proporcjonalne do grubości dx przebytej warstwy ciała. Można przytem przyjąć, że na elemencie przebytej drogi dx zawsze taki sam ułamek całkowitej energii zostaje pochłonięty. Oznaczając przez dJ pochłoniętą energię z całkowitej przyniesionej energii J, możemy napisać

$$\frac{dJ}{J} = -\mu\, dx. \tag{25.72}$$

μ jest współczynnikiem proporcjonalności, zwanym współczynnikiem absorpcji.

Całkując to równanie otrzymamy

$$J = J_0 e^{-\mu dx}, \tag{25.73}$$

gdzie J_0 oznacza natężenie padającej wiązki, a e — zasadę logarytmów naturalnych. Współczynnik absorpcji μ zależeć będzie od dwóch poprzednio wymienionych zjawisk: 1) pochłaniania przy zjawisku fotoelektrycznym; 2) rozpraszania. Możemy zatem napisać

$$\mu = \tau + \sigma. \tag{25.74}$$

τ niech wyraża zużycie energii na emisję fotoelektronów, σ — zmniejszenie energii przez rozproszenie. Weźmy pod uwagę wiązkę promieni o przekroju 1 cm². W takim razie w równaniu (25.72), które możemy napisać w postaci

$$\frac{dJ}{J} \cdot 1\,\text{cm}^2 = -\mu \cdot 1\,\text{cm}^2 \cdot dx = -\mu\, dV, \tag{25.75}$$

iloczyn 1 cm² $\cdot\, dx$ będzie objętością dV, przez którą przenikają promienie. Lecz oba współczynniki τ i σ są proporcjonalne do masy przenikanej substancji. Dlatego pożądaną rzeczą jest wprowadzenie do równania masy zamiast objętości. Ponieważ masa właściwa ciała $\varrho = \frac{dm}{dV}$, to stąd $dV = \frac{dm}{\varrho}$. Możemy więc napisać

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{\mu}{\varrho}\, dm;$$

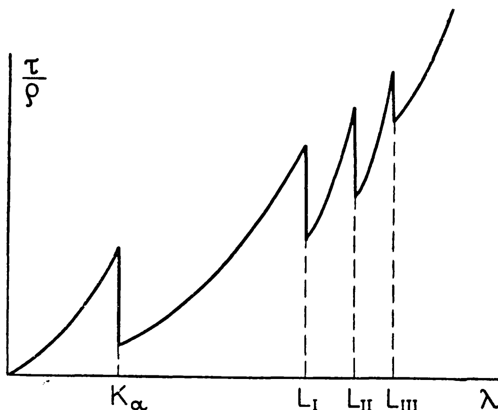
gdy $dm = 1$, wtedy

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{\mu}{\varrho} = -\left(\frac{\tau}{\varrho} + \frac{\sigma}{\varrho}\right). \tag{25.76}$$

Widać stąd, że $\frac{\mu}{\varrho}$ oznacza ułamek energii pochłonięty przy przejściu przez warstwę zawierającą jednostkę masy. Wartość współczynnika $\frac{\tau}{\varrho}$ zależy w bardzo silnym stopniu tak od liczby atomowej przenikanej substancji, jak i od długości fali samych promieni. W przedziałach długości fali, w których mamy normalny przebieg absorpcji, zależność ta wyraża się wzorem

$$\frac{\tau}{\varrho} = CZ^3\lambda^3, \tag{25.77}$$

gdzie C jest współczynnikiem proporcjonalności. Wzór ten pokazuje, że przy skracaniu długości fali (rys. 25.19) absorpcja szybko maleje (zatem przy posuwaniu się wzdłuż krzywej od strony prawej do lewej). Jednak przy pewnej określonej długości fali, absorpcja zmienia się nagle skokiem, mianowicie nagle wzrasta, jak pokazuje rys. 25.19. Współczynnik C przybiera inną, większą wartość. Potem współczynnik $\frac{\tau}{\varrho}$ znowu maleje według prawa (25.77). Skok absorpcji następuje wtedy, gdy energia fotonów staje się



Rys. 25.19. Zależność współczynnika $\frac{\tau}{\varrho}$ od długości fali λ

wystarczająca, aby móc wyrywać elektrony z jakiejś warstwy atomowej, powiedzmy z warstwy M. Następnie znowu absorpcja przebiega normalnie, tzn. zmniejsza się przy skracaniu długości fali. Gdy energia fotonów wzrośnie tak, że stanie się wystarczająca do wyrywania elektronów z warstwy L, znowu nastąpi skok wartości absorpcji. Podobny skok wystąpi przy osiągnięciu przez promienie energii wystarczającej do wyrywania elektronów z warstwy K. Widać to wyraźnie na rys. 25.19, gdzie na osi odciętych odkładana jest długość fali, na osi rzędnych zaś — wartość współczynnika $\frac{\tau}{\varrho}$. Ponieważ na opróżnione w atomach miejsca przeskakują natychmiast elektrony z dalszych warstw, więc prześwietlane ciało zaczyna wysyłać na wszystkie strony promieniowanie rentgenowskie charakterystyczne, tzw. fluorescencyjne.

Wzór (25.77) pokazuje również, że współczynnik $\frac{\tau}{\varrho}$ zależy w bardzo silnym stopniu od liczby atomowej Z. Jest on związany z własnościami atomów i nie zależy od tego, czy atomy te występują samodzielnie, czy też jako połączenia w drobinach. Toteż drobinowy współczynnik absorpcji jest sumą współczynników należących do atomów tworzących dany związek. Ponieważ współczynnik $\frac{\tau}{\varrho}$ jest proporcjonalny do Z^3, a więc łatwo się tłumaczy powstawanie cieniów na ekranie fluoryzującym, czy też na filmie pochodzących od ciał, w skład których wchodzą pierwiastki ciężkie, a więc o dużych liczbach atomowych Z. Oczywiście obrazy, które otrzymujemy za pomocą promieni rentgenowskich są zawsze tylko cieniami w przeciwieństwie do obrazów otrzymanych za pomocą soczewek w świetle widzialnym. Nie umiemy bowiem budować soczewek dla promieni Röntgena.

Współczynnik $\frac{\sigma}{\varrho}$ zależny od rozproszenia promieni bardzo mało zależy od indywidualnych właściwości prześwietlanych ciał i ma w przybliżeniu wartość 0,2.

Zadania

25.1. Jaka jest długość fali odpowiadającej granicy serii Balmera?
Odpowiedź: 3645 Å.

25.2. Jakie są długości fal pierwszych trzech linii serii Lymana?
Odpowiedź: 1215 Å, 1025 Å, 971,8 Å.

25.3. Jakie są promienie r_1 i r_2 dwóch pierwszych orbit atomu wodoru Bohra oraz prędkości elektronu na tych orbitach?
Odpowiedź: $r_1 = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm, $v_1 \approx 2{,}2 \cdot 10^8$ cm/sec; $r_2 = 2{,}12 \cdot 10^{-8}$ cm, $v_2 \approx 1{,}1 \cdot 10^8$ cm/sec.

25.4. Jaka jest siła przyciągania między jądrem atomu wodoru i elektronem 1) gdy elektron znajduje się na pierwszej orbicie? 2) gdy się znajduje na trzeciej orbicie?
Odpowiedź: 1) $8{,}2 \cdot 10^{-5}$ dyn; 2) $2{,}05 \cdot 10^{-5}$ dyn.

25.5. Jakie jest natężenie pola pochodzącego od jądra na pierwszej, drugiej i czwartej orbicie kołowej elektronu w atomie wodoru Bohra?

Odpowiedź: $E_1 = 1{,}71 \cdot 10^7$ j. ES $= 5{,}13 \cdot 10^9$ V/cm; $E_2 = 3 \cdot 10^8$ V/cm; $E_4 = 2 \cdot 10^7$ V/cm.

25.6. Jaki jest promień pierwszej orbity elektronu w zjonizowanym atomie helu?

Odpowiedź: $r = 0{,}26 \cdot 10^{-8}$ cm.

25.7 Jaka jest częstość drgania elektronu na pierwszej i drugiej orbicie kołowej w atomie Bohra? Jakiej długości fale powinien poruszający się na nich 1 elektron promieniować według klasycznej elektrodynamiki? Porównać z nimi długości fali pierwszej linii serii Lymana i Balmera.

Odpowiedź: 1) $\nu_1 = 6{,}6 \cdot 10^{15}$, $\lambda_1 = 454$ Å; 2) $\nu_2 = 1{,}1 \cdot 10^{15}$, $\lambda_2 = 2693$ Å. Pierwsza linia serii Lymana 1215 Å, Balmera — 6564,7 Å.

25.8. Obliczyć całkowitą energię atomu wodoru w stanie podstawowym biorąc pod uwagę ruch jądra.

Odpowiedź: $-2173 \cdot 10^{-14}$ ergów $= -13{,}58$ eV.

25.9. O ile różniłaby się linia wodoru $^1H_\alpha$ od analogicznej linii wodoru $^3H_\alpha$?

Odpowiedź: Linia $^1H_\alpha = 6564{,}7$ Å, linia $^3H_\alpha = 6562{,}3$ Å. Różnica 2,4 Å.

25.10. Znaleźć stałą sieci przestrzennej (odległość płaszczyzn równoległych do ścian sześcianu, w których znajdują się atomy) dla kryształu NaCl, jeżeli gęstość NaCl $\varrho = 2{,}164$ g/cm^3.

Wskazówka: Trzeba wziąć pod uwagę gramodrobinę NaCl, w której znajduje się zawsze $6{,}02 \cdot 10^{23}$ drobin (liczba Avogadra), a w każdej drobinie dwa atomy w równej odległości.

Odpowiedź: $d = 2{,}82$ Å.

25.11. Jaka jest długość fali linii $L_{\alpha 1}$ dla wolframu, jeżeli od ściany kryształu NaCl (0 0 1) (równoległej do ściany sześcianu) promieniowanie odbija się pod kątem 15°9′.

Odpowiedź: 1,474 Å.

25.12. Jaka jest stała sieci krystalicznej KCl (sylwinu), jeżeli odbicie drugiego rzędu ($n = 2$) linii K_α żelaza o długości fali $\lambda = 1{,}93$ Å następuje pod kątem 18° 3′ od płaszczyzny (0 0 1) (równoległej do ściany sześcianu).

Odpowiedź: 6,23 Å.

25.13. Wiązka promieni hamowania ma granicę krótkofalową 0,2469 Å. Jakie było napięcie lampy rentgenowskiej?

Odpowiedź: 50 000 V.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Jakie są wzory odnoszące się do serii widmowych wodoru?
2. Jakie są założenia Bohra odnoszące się do atomu wodoru? Jakie wnioski z nich wynikają?
3. Jaka jest energia potencjalna i kinetyczna atomu?
4. Jak otrzymuje się wzór Balmera z założeń Bohra?
5. Jaka poprawka wynika z uwzględnienia ruchu jądra? Jak to obliczyć?
6. W jaki sposób odkryto ciężki wodór?
7. Jakie znaczenie mają termy widmowe?
8. Jaka jest różnica między widmem zjonizowanego helu a widmem wodoru?

9. Jakie były założenia Sommerfelda odnoszące się do atomu wodoru? Czy założenia te zmieniają wyniki Bohra?
10. Jaka jest treść zasady odpowiedniości?
11. Jak obliczyć moment magnetyczny elektronu krążącego po orbicie w atomie? Co nazywamy magnetonem Bohra? Co określa magnetyczna liczba kwantowa?
12. Co nazywamy spinem elektronu? Jaki jest związek między krętem spinowym i momentem magnetycznym wirującego elektronu?
13. Jaki jest zespół czterech liczb kwantowych? Jakie mogą one mieć wartości?
14. Jaka jest treść zasady Pauliego?
15. Od czego zależą własności chemiczne i fizyczne atomów?
16. Jakie odmiany widm możemy obserwować u poszczególnych pierwiastków?
17. Na czym polegało doświadczenie Francka i Hertza? Co wykazało to doświadczenie?
18. W jaki sposób otrzymuje się widmo promieniowania rentgenowskiego?
19. Jakie istnieją odmiany promieniowania rentgenowskiego? Jakie widmo daje promieniowanie hamowania? promieniowanie charakterystyczne?
20. Co określa krótkofalową granicę promieni hamowania?
21. Jaka jest treść prawa Moseleya? Jakie odróżniamy serie widmowe?
22. Jak się tłumaczy powstawanie linii widmowych rentgenowskich?
23. Na czym polega metoda Debye'a i Scherrera?
24. Na czym polega absorpcja promieni Röntgena? Jakie dwa współczynniki ją określają? Od czego są one zależne?

26. Falowe własności mikrocząstek

26. 1. Hipoteza de Broglie'a. Jak to już omawialiśmy w ust. 25.2. własności atomu wodoru polegające na wysyłaniu pewnych gatunków promieniowania dających linie widmowe udało się ująć za pomocą stosunkowo prostej teorii Bohra. Jednakże Bohr używając modelu atomu będącego układem podlegającym prawom mechaniki klasycznej i elektrodynamiki musiał jednocześnie wprowadzić założenia sprzeczne tak z mechaniką, jak i z elektrodynamiką. Według mechaniki klasycznej kręt układu może przybierać dowolne wartości, a Bohr założył, że kręt atomu może być tylko całkowitą wielokrotnością wielkości $\frac{h}{2\pi}$. Według elektrodynamiki elektron krążący po torze kołowym czy eliptycznym, a więc poruszający się z przyśpieszeniem (dośrodkowym), powinien wytwarzać falę elektromagnetyczną, czyli promieniowanie — według założenia Bohra natomiast na żadnym ze stacjonarnych torów elektron nie promieniuje. Wysyła foton jedynie wtedy, gdy przeskakuje z jednego toru na drugi. Chociaż teoria Bohra odniosła wielki sukces i pozwoliła ująć ilościowo wiele zjawisk w dziedzinie promieniowania, to jednak przy dalszym jej rozwijaniu napotykano na coraz większe trudności, które nasuwał bez wątpienia fakt, że teoria ta była zlepkiem klasycznej mechaniki i obcych jej postulatów kwantowych. Stawało się rzeczą coraz jaśniejszą, że jeżeli chodzi o zachowanie się mikrocząstek: atomów, elektronów, to do nich nie może stosować się mechanika klasyczna, że trzeba stworzyć nową mechanikę, która by zawierała prawa rządzące mikroświatem. Dzięki ideom de Broglie'a (czyt. de Brojla), Schrödingera i wielu innych fizyków udało się stworzyć mechanikę kwantową wolną od sprzeczności, z której w sposób naturalny wynikają kwantowe postulaty Bohra i która daje rezultaty lepiej zgodne z doświadczeniem od teorii Bohra. Tutaj będziemy mogli tylko naszkicować z grubsza drogę, po której się posuwano, aby odkryć prawa rządzące mikroświatem.

Jak mówiliśmy poprzednio, dla wyjaśnienia rozmaitych zjawisk obserwowanych przy współdziałaniu atomów względnie elektronów z promieniowaniem, jak np. zjawiska fotoelektrycznego lub zjawiska Comptona, trzeba było przyjąć, że promieniowanie ma własności korpuskularne, rozchodzi się w postaci jak

gdyby oddzielnych atomów promieniowania, zwanych fotonami. Każdy foton posiada

$$\text{energię } E = h\nu, \quad \text{pęd } p = \frac{h\nu}{c} \quad \text{i} \quad \text{masę } m = \frac{h\nu}{c^2}. \tag{26.1}$$

Ponieważ dla promieniowania $\nu = \frac{c}{\lambda}$, gdzie c jest prędkością światła w próżni, a λ — długością fali, zatem możemy napisać, że foton ma

$$\text{energię } E = \frac{hc}{\lambda}, \quad \text{pęd } p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{i} \quad \text{masę } m = \frac{h}{\lambda c}. \tag{26.2}$$

Już w początku XIX wieku Hamilton zwrócił uwagę na formalną analogię między pewnymi bardzo ogólnymi prawami mechaniki i prawami optyki geometrycznej. Można było mianowicie wykazać, że ruch cząstki w polu sił przy pewnych założeniach można utożsamić z ruchem promienia światła w środowisku o odpowiednio dobranym współczynniku załamania. Ludwik de Broglie w roku 1924 kierując się tą analogią między zjawiskami mechanicznymi i optycznymi założył, że każdej cząstce można przyporządkować falę związaną takimi samymi związkami z pędem i energią cząstki, jakimi związane są pęd i energia fotonu:

$$p = \frac{h}{\lambda}, \qquad E = h\nu. \tag{26.3}$$

Ponieważ pęd cząsteczki jest jednocześnie określony związkiem

$$p = mv, \tag{26.4}$$

gdzie m jest masą cząstki, a v — jej prędkością, zatem

$$mv = \frac{h}{\lambda}, \tag{26.5}$$

skąd na długość fali przyporządkowanej cząstce otrzymujemy

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{mv}.} \tag{26.6}$$

Związanie z każdą poruszającą się cząstką fali, której długość, jak widać z ostatniego wzoru, jest odwrotnie proporcjonalna do masy cząstki i jej prędkości, mogłoby się wydawać wytworem fantazji. Jednak rzeczywistość wykazała najzupełniejszą realność tego pomysłu.

Jeżeli zastosujemy równanie (26.6) do elektronów, których prędkość zależy od napięcia według wzoru

$$\frac{mv^2}{2} = eU,$$

skąd

$$v = \sqrt{2\frac{eU}{m}}, \qquad (26.7)$$

to na długość fali przyporządkowanej elektronowi otrzymamy

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2emU}}. \qquad (26.8)$$

Po podstawieniu znanych liczb na h, e i m otrzymamy na λ:

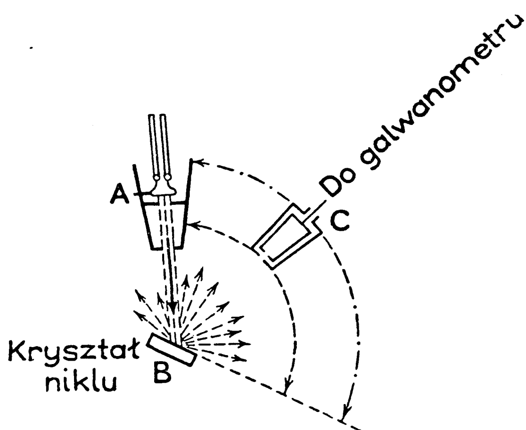
$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{U}}\ \text{Å}. \qquad (26.9)$$

Długość fali otrzymujemy w angstremach, jeżeli wyrazimy napięcie w woltach.

Jeżeli zastosujemy ten wzór do elektronów rozpędzanych np. napięciem 600 woltów, to łatwo stwierdzić, że długość odpowiedniej fali jest

$$0{,}5\ \text{Å}.$$

Jest to długość tego samego rzędu, co długość fali promieniowania rentgenowskiego. Zatem przy skierowaniu np. wiązki elektronów na kryształ należałoby się spodziewać występowania podobnych zjawisk jak przy promieniach Röntgena. Istotnie, w r. 1926 Davisson i Germer (czyt. Dawison i Dżermer) obserwując rozpraszanie się elektronów na powierzchni kryształów niklu stwierdzili istnienie w pewnych kierunkach wyraźnych maksimów w ilości rozproszonych elektronów (rys. 26.1). Pod pewnymi kątami występowało wyraźne selektywne odbicie podobnie jak przy promieniach Röntgena. Ten sam warunek Bragga



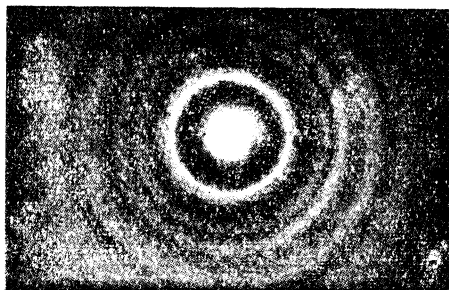
Rys. 26.1. Rozpraszanie elektronów padających na powierzchnię kryształu. Schemat doświadczeń Davissona i Germera

$$n\lambda = 2d \sin \alpha \qquad (26.10)$$

daje kąt selektywnego odbicia (aby otrzymać dokładną zgodność z doświadczeniem, trzeba jeszcze uwzględnić poprawkę na współczynnik załamania, którą tak samo zresztą trzeba uwzględnić przy promieniach Röntgena).

Jak mówiliśmy w ust. 25.17, promienie Röntgena przy przejściu przez proszek mikrokrystaliczny dają pierścienie interferencyjne wskutek odbicia od rozmaicie skierowanych kryształów. Podobny rezultat powinny dać i elektrony. Doświadczenie w tym przypadku o tyle trudniej jest wykonać, że elek-

trony są bez porównania mniej przenikliwe. Jednakże skierowując wiązkę elektronów na cienką folię metalową (metal ma zwykle strukturę mikrokrystaliczną) G. P. Thomson używając szybkich elektronów, a P. S. Tartakowski powolnych — zdołali otrzymać pierścienie dyfrakcyjne o zupełnie takim samym wyglądzie jak pierścienie otrzymywane metodą Debye'a i Scherrera (rys. 26.2).


Rys. 26. 2. Dyfrakcja elektronów przechodzących przez folię złotą

Stopniowo przekonano się, że wiązka elektronów może dawać te same zjawiska, jakie można obserwować przy wiązce światła: odbicie, załamanie, uginanie, interferencję. Stało się jasne, że mikrocząstki mają własności falowe, podlegają podobnym prawom, jakie ujmują zjawiska promieniowania.

Jednocześnie okazało się, że traktowanie mikrocząstek jako układu fal doprowadza w sposób naturalny do warunków kwantowych, które w teorii Bohra są wprowadzone jako niczym nie uzasadnione postulaty. Aby to wykazać, weźmy pod uwagę model najprostszego atomu i wyobraźmy sobie zamiast elektronu obiegającą wkoło jądra falę:

$$A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda}\right) \tag{26.11}$$

[jest to wzór na falę (12.61) str 298 cz. I, z tą różnicą, że zamiast x w ostatnim wyrazie wprowadzono długość łuku s]. Jeżeli drganie w każdym punkcie toru stacjonarnego ma być jednoznacznie określone, to faza drgania w fali po przebiegnięciu obwodu koła może się zmienić tylko o wielokrotność 2π. A więc gdy droga

$$s = 2\pi r, \tag{26.12}$$

to zmiana fazy

$$2\pi \frac{2\pi r}{\lambda} = n \cdot 2\pi; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{26.13}$$

skąd

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = n. \tag{26.14}$$

Ponieważ cząstce przyporządkowaliśmy falę o długości

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

zatem wstawiając tę wartość na λ do wzoru (26.14) otrzymamy

$$mvr = n\frac{h}{2\pi}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{26.15}$$

Otrzymaliśmy pierwszy postulat Bohra, że moment pędu albo kręt elektronu musi być wielokrotnością wielkości $\frac{h}{2\pi}$.

Aby dobrze zrozumieć wprowadzenie nowych idei zawartych w tym ustępie i znaczenie wielkości takich, jak fale de Broglie'a, musimy odbiec na krótko od tematu i zająć się wyjaśnieniem pewnych dodatkowych pojęć, którymi będziemy musieli się posługiwać. Przede wszystkim potrzebne będą pewne pojęcia rachunku prawdopodobieństwa.

26.2. Pojęcie prawdopodobieństwa. Nie licząc na znajomość tej gałęzi matematyki u czytelników postaramy się w możliwie zwięzłej formie wyjaśnić te pojęcia, które w dalszym ciągu będą potrzebne. Najpierw zajmiemy się definicją prawdopodobieństwa.

Weźmy pod uwagę zdarzenie, co do którego nie możemy z góry przewidzieć, jak wypadnie. Na przykład przy rzucaniu kostki do gry nie możemy przewidzieć, ile oczek zostanie wyrzuconych. Mamy tu sześć możliwości, sześć zdarzeń wykluczających się wzajemnie, bo jest oczywiste, że tylko jedna ściana będzie zwrócona ku górze. Z sześciu możliwych przypadków może zajść tylko jeden. Mówimy, że prawodpodobieństwo tego, że przy rzucie kostką wyrzucimy np. 5 oczek jest $^1/_6$:

$$p(5) = \frac{1}{6}.$$

W tym przypadku prawdopodobieństwo możemy określić z góry. Co oznacza takie określenie? Na to pytanie odpowiada doświadczenie. Gdybyśmy mianowicie rzucali kostką bardzo wiele razy, to okazałoby się, że w przybliżeniu w jednej szóstej części wszystkich rzutów wypadnie piątka. Im więcej razy będziemy rzucać, tym więcej liczba wyrzuconych piątek będzie się zbliżać do jednej szóstej wszystkich rzutów. Takie doświadczenia istotnie wykonywano.

Możemy prawdopodobieństwo określić w sposób następujący: jeżeli spośród n jednakowo prawdopodobnych przypadków może zajść tylko jeden, przy tym zajście jednoczesne kilku przypadków jest wykluczone, to prawdopodobieństwem $p(a)$, że zajdzie np. przypadek, a spośród możliwych

$$a, b, c, \ldots, n$$

nazywamy ułamek o liczniku 1, a mianowniku równym liczbie jednakowo możliwych wykluczających się przypadków

$$p(a) = \frac{1}{n}.$$

Jeżeli danemu zdarzeniu odpowiada kilka możliwych przypadków, wtedy prawdopodobieństwo definiujemy w sposób następujący: prawdopodobieństwem pewnego zdarzenia nazywamy ułamek, którego licznikiem jest liczba sprzyjających

danemu zdarzeniu wypadków, a mianownikiem — liczba wszystkich równie prawdopodobnych wypadków.

Przykład 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyciągnięta na chybił trafił karta z talii liczącej 52 karty będzie asem? Przypadków sprzyjających jest cztery, wszystkich możliwych zaś 52. Zatem prawdopodobieństwo będzie

$$\frac{4}{52}=\frac{1}{13}.$$

Przykład 2. Jakie będzie prawdopodobieństwo przy rzucaniu dwiema kostkami, że wyrzucimy daną liczbę oczek.

Prawdopodobieństwo będzie zależało od tego, o jaką ilość oczek będzie chodziło. Tak np. wyrzucić jedno oczko jest rzeczą niemożliwą, prawdopodobieństwo jest zero, wyrzucić dwa oczka można tylko jednym sposobem, trzy oczka można wyrzucić dwoma sposobami: pierwszą kostką 1, drugą — 2, albo pierwszą kostką 2, drugą — 1 itd. Wszystkich zaś możliwych przypadków jest 36. Poniższa tabela podaje liczby sprzyjających przypadków wyrzuceniu rozmaitej liczby oczek i ich prawdopodobieństwa.

Tablica 26.1

Liczba oczek	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Liczba możliwych przypadków	0	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Prawdopodobieństwo	0	$^1/_{36}$	$^2/_{36}$	$^3/_{36}$	$^4/_{36}$	$^5/_{36}$	$^6/_{36}$	$^5/_{36}$	$^4/_{36}$	$^3/_{36}$	$^2/_{36}$	$^1/_{36}$

Przykład 3. Jakie będzie prawdopodobieństwo, iż w pięciocyfrowych tablicach logarytmów, mantysa będzie się kończyć zerem? Wszystkich możliwych przypadków jest dziesięć: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Z nich jeden sprzyjający. Zatem prawdopodobieństwo jest $^1/_{10}$. Rozumie się, to nie znaczy, żeby każda co dziesiąta mantysa kończyła się zerem. Jeżeli jednak przejrzymy dużą liczbę mantys np. 100 lub 1000, to łatwo sprawdzimy, że w tak dużej liczbie mantys w przybliżeniu dziesiąta ich część kończy się zerem.

Nie zawsze z góry jest widoczne, jakie jest prawdopodobieństwo zajścia jakiegoś zdarzenia. Gdybyśmy zapytali np. jakie jest prawdopodobieństwo, aby w wyrazie wziętym na chybił trafił na jakiejś stronicy *Trylogii* Sienkiewicza była choć jedna litera a, to aby odpowiedzieć na to pytanie, trzeba zrobić statystykę. Jeżeli zbadamy dużą liczbę wyrazów, i okaże się że np. na 100 wyrazów 50 zawiera literę a, to prawdopodobieństwo, że w wybranym na chybił trafił wyrazie znajdzie się litera a będzie $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$.

Jeżeli jakieś zdarzenie jest zupełnie niemożliwe, to prawdopodobieństwo, że zajdzie to zdarzenie jest 0. Gdybyśmy natomiast pytali, np. jakie jest prawdopodobieństwo, że przy rzucie kostką wyrzucimy jakąkolwiek liczbę, to przypad-

ków sprzyjających będzie 6 na 6 możliwych. Prawdopodobieństwo wyrazi się liczbą 1. Zatem prawdopodobieństwo 1 wyraża *pewność*.

Reguła dodawania prawdopodobieństw. Postawmy pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo, żeby przy rzucaniu kostką do gry wyrzucić albo dwójkę, albo szóstkę? Widać od razu, że mamy 2 sprzyjające przypadki na 6 możliwych. Prawdopodobieństwo jest $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Jednocześnie widać, że znajdziemy go, dodając prawdopodobieństwa wyrzucenia dwójki i prawdopodobieństwo wyrzucenia szóstki.

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Łatwo się przekonać, że i w więcej złożonych przypadkach zachodzi ta sama reguła.

Zatem, aby znaleźć prawdopodobieństwo, że zajdzie albo przypadek a o prawdopodobieństwie $p(a)$, albo przypadek b o prawdopodobieństwie $p(b)$, albo c o prawdopodobieństwie $p(c)$ należy dodać prawdopodobieństwa:

$$p(a \text{ albo } b \text{ albo } c) = p(a) + p(b) + p(c).$$

26.3. Prędkość fazowa i grupowa fal. Aby zrozumieć związki wprowadzone przez de Broglie'a między pędem cząstki oraz falami, musimy się zająć jeszcze pewnymi własnościami fal.

Jeżeli w środowisku biegnie kilka fal różniących się długościami, to rezultat składania się ich (superpozycji) daje zaburzenie, które może się poruszać z zupełnie inną prędkością niż prędkość fazowa każdej z tych fal.

Wyobraźmy sobie najpierw najprostszy przypadek: dwie fale nieco różniące się prędkościami. Jedną falę wyrazimy wzorem

$$y_1 = A \sin(\omega_1 t - k_1 x),$$

drugą zaś

$$y_2 = A \sin(\omega_2 t - k_2 x).$$

Biegnąc wzdłuż tej samej prostej nakładają się. Na wychylenie wypadkowe otrzymamy wzór

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega_1 t - k_1 x) + \sin(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$= 2A \sin \frac{1}{2}[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x] \cos \frac{1}{2}[(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]. \quad (26.16)$$

Połóżmy

$$\omega_1 = \omega + \Delta\omega, \quad \omega_2 = \omega - \Delta\omega,$$

$$k_1 = k + \Delta k, \quad k_2 = k - \Delta k.$$

W takim razie

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\omega, \qquad k_1 + k_2 = 2k,$$
$$\omega_1 - \omega_2 = 2\Delta\omega, \qquad k_1 - k_2 = 2\Delta k.$$

Podstawiając te wartości do wzoru (26.16) otrzymamy

$$y = 2A \sin(\omega t - kx) \cos(\Delta\omega t - \Delta kx) = 2A \cos(\Delta\omega t - \Delta kx) \sin(\omega t - kx).$$

Oznaczając $2A \cos(\Delta\omega t - \Delta kx) = B$ otrzymamy

$$y = B \sin(\omega t - kx).$$

Będzie to fala biegnąca w kierunku dodatnim osi X, lecz jej amplituda B będzie zmienna. Amplituda ta będzie maksymalna, gdy $\cos(\Delta\omega t - \Delta kx) = 1$, czyli gdy $\Delta\omega t - \Delta kx = 0$. To maksimum będzie wędrować w kierunku osi X. Ruch jego będzie dany równaniem otrzymanym z poprzedniego

$$x = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t. \tag{26.17}$$

Będzie to ruch jednostajny z prędkością $w = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k}$. W granicy stosunek ten przejdzie w pochodną $\dfrac{d\omega}{dk}$. Zatem maksimum amplitudy, a więc również i energia, będzie się przenosić z prędkością (energia, jak było wyprowadzone w ust. 12.7 jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy)

$$w = \frac{d\omega}{dk}, \tag{26.18}$$

zwaną prędkością grupową. Zwykle prędkość tę wyrażają przez prędkość fazową u i długość fali λ. Można ten związek znaleźć w sposób następujący: ponieważ

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \text{a} \quad \nu = \frac{u}{\lambda}$$

(gdzie przez u oznaczyliśmy prędkość fazy), zatem

$$\omega = 2\pi \frac{u}{\lambda} = 2\pi u \lambda^{-1}, \qquad \text{zaś} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\lambda^{-1}$$

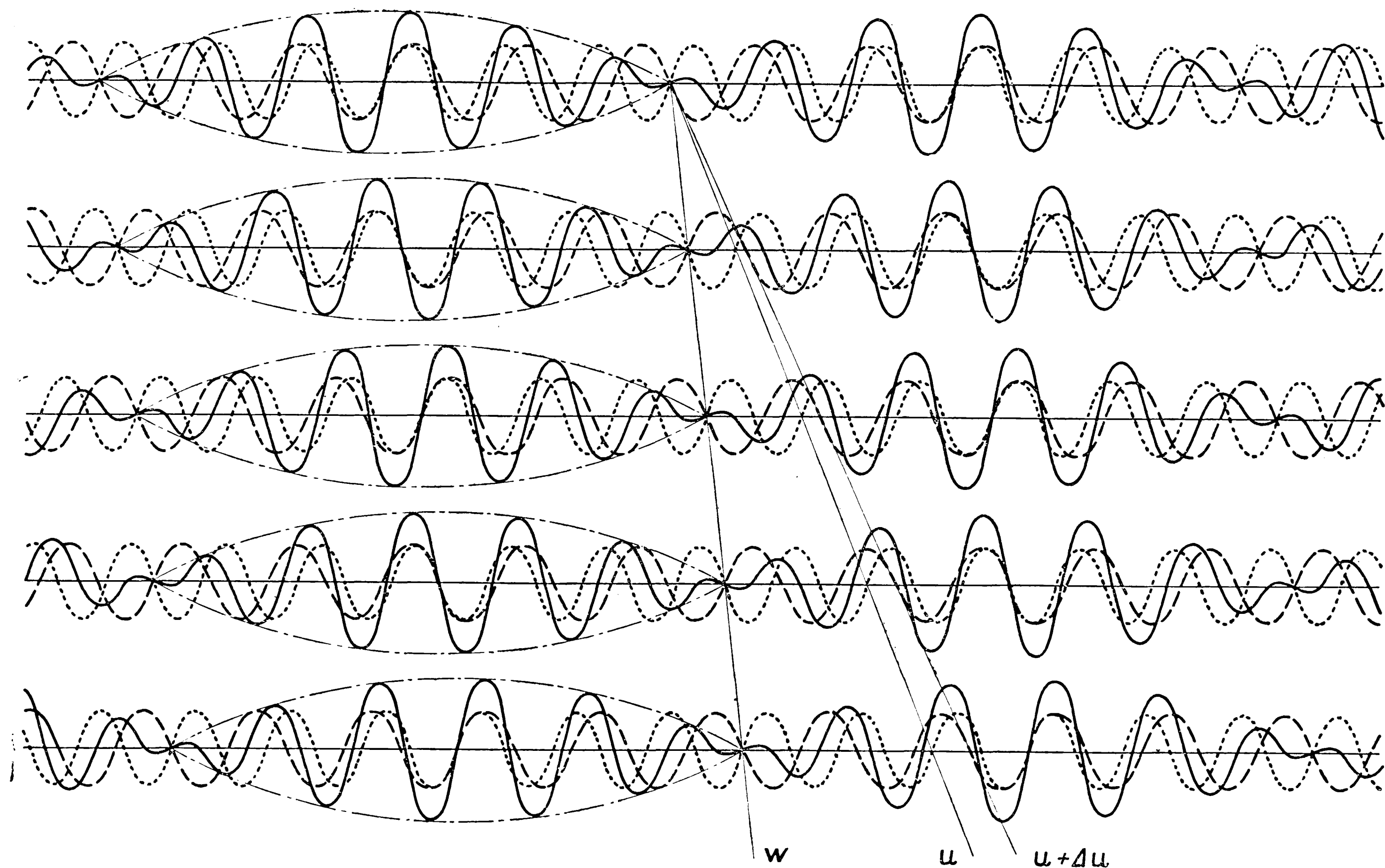
(p. ust. 12.1. i 12.9 I cz.)

Możemy więc napisać

$$d\omega = 2\pi(\lambda^{-1} du - u\lambda^{-2} d\lambda), \qquad dk = -2\pi\lambda^{-2} d\lambda,$$

$$w = \frac{d\omega}{dk} = \frac{u\lambda^{-2} d\lambda - \lambda^{-1} du}{\lambda^{-2} d\lambda} = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}. \tag{26.19}$$

Prędkość grupowa zależy zatem od znaku pochodnej $\dfrac{du}{d\lambda}$, a więc od zależności



Rys. 26.3. Dwie fale o prędkościach u i $u+\Delta u$ nakładając się dają grupę fal poruszającą się z inną prędkością w (w przykładzie na rysunku — mniejszą).

prędkości fazowej od długości fali. Jeżeli przy wzroście długości fali ($d\lambda > 0$) prędkość rośnie ($du > 0$), to prędkość grupowa jest mniejsza od prędkości fazowej. W przeciwnym razie prędkość grupowa jest większa od fazowej. Stosunki te przedstawia rys. 26.3.

26.4. Prędkość fal de Broglie'a. Jak powiedzieliśmy, ideą de Broglie'a było przyporządkowanie cząstce materialnej fali o długości określonej równaniem

$$\lambda = \frac{h}{mv} \tag{26.20}$$

oraz energii

$$E = h\nu. \tag{26.21}$$

Lecz, jak wiemy, długość fali związana jest z prędkością przemieszczania się fazy u (patrz. Cz. I ust. 12.9) związkiem

$$\lambda = \frac{u}{\nu},$$

gdzie ν jest częstością drgania. Z tych dwóch równań otrzymujemy

$$\frac{h}{mv} = \frac{u}{\nu},$$

skąd

$$u = \frac{h\nu}{mv}.$$

Lecz $h\nu = E$, zatem

$$u = \frac{E}{mv}.$$

Według teorii względności

$$E = mc^2,$$

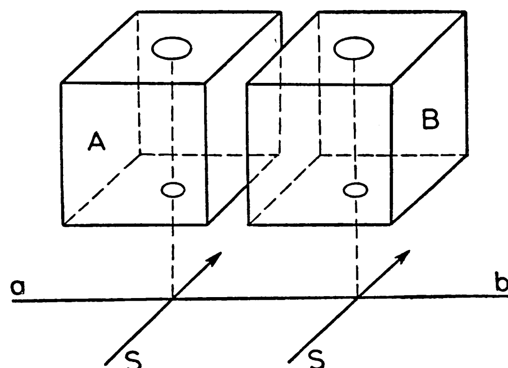
gdzie c jest prędkością światła, zatem

$$u = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}, \quad \text{skąd} \quad uv = c^2. \tag{26.22}$$

Ponieważ prędkość cząstki v jest zawsze mniejsza od prędkości światła c, to z ostatniego związku wynika, że prędkość fali de Broglie'a u jest zawsze większa od prędkości światła. Musimy stąd wywnioskować, że fala ta nie może być zjawiskiem fizycznym, nie może to być np. fala elektromagnetyczna. Jest to tylko funkcja matematyczna falowej postaci. Jej znaczenie będzie później wyjaśnione. Aby dobrze zrozumieć jej sens, musimy najpierw zapoznać się z zasadą Heisenberga.

26.5. Zasada nieokreśloności Heisenberga. Z pojęciem cząstki materialnej zawsze dotąd związywaliśmy wyobrażenie o jej położeniu i prędkości. Położenie i prędkość określają w zupełności stan ciała w mechanice ciał makroskopowych.

Gdy je znamy w pewnej określonej chwili, możemy przepowiedzieć stan ciała w dowolnej chwili późniejszej. Heisenberg (czyt. Hajzenberg) wykazał jednak, że inaczej sprawa się przedstawia w mikroświecie, że nie możemy j e d n o c z e ś n i e wyznaczyć położenia i prędkości (albo pęd równy iloczynowi masy cząstki przez prędkość) mikrocząstki. Proste rozumowanie może to wykazać. Przypuśćmy np., że chcielibyśmy wyznaczyć położenie i pęd biegnącego elektronu. W przykładzie, jaki przytacza Heisenberg, położenie elektronu wyznacza się za pomocą światła rozproszonego przez elektron i obserwowanego przez mikroskop. Lecz możemy jeszcze uprościć jego rozumowanie. Pomiar położenia w danej chwili i prędkości elektronu moglibyśmy przeprowadzić tak, jak to jest przedstawione na rys. 26.4. Niech elektron biegnie wzdłuż prostej *ab*. Ustawmy w dwóch bliskich miejscach szczelne kamery z małymi otworkami u dołu i matówkami na wierzchu. Puśćmy prostopadle do toru elektronu dwie wąskie wiązki światła *S*. Gdy przebiegający pod komorami elektron zostanie oświetlony, pewna ilość rozproszonego przezeń światła wpadnie przez otworek do komory *A*, jak również potem do *B* dając na matówce każdej z nich obraz dyfrakcyjny w postaci plamki kołowej. Dzieląc następnie drogę przebytą przez czas otrzymalibyśmy prędkość elektronu. Jednakże z powodu dyfrakcji światła przechodzącego przez bardzo mały otworek położenie elektronu nie będzie dokładnie wyznaczone. Światło ugięte bowiem da plamkę tym większą, im mniejszy jest otworek. Gdybyśmy chcieli zmniejszyć dyfrakcję, musielibyśmy użyć światła o krótszej fali, ale w takim razie fotony wskutek zderzenia z elektronem zmieniłyby jego prędkość tym więcej, im krótsza będzie fala (zjawisko Comptona). Im krótsza fala użytego promieniowania, tym dokładniej wyznaczymy położenie elektronu w danej chwili, lecz jednocześnie tym więcej zmieni się prędkość elektronu. Nie będziemy wskutek tego wiedzieli dobrze, jaka była jego prędkość przed zderzeniem z fotonami. Im dokładniej chcielibyśmy wyznaczyć prędkość, tym dłuższej fali musielibyśmy użyć, tym mniej dokładnie wyznaczymy położenie elektronu. Można udowodnić, że możemy zawsze, bez względu na użytą metodę pomiaru, określić, że elektron w danej chwili znajdował się między x i $x + \Delta x$, oraz, że miał pęd zawarty między p i $p + \Delta p$. Między tymi przedziałami zachodzi związek



Rys. 26.4. Doświadczenie pomyślane pozwalające na pomiar położenia i prędkości elektronu

$$\Delta x \, \Delta p \geqslant h.$$

Jeżelibyśmy zatem dokładnie wyznaczyli położenie elektronu ($\Delta x = 0$), to pęd jego będzie zupełnie nieokreślony i odwrotnie, jeżeli wyznaczymy dokładnie pęd, to nie będziemy nic wiedzieli o jego położeniu.

Podobne stosunki zachodzą, jak można wykazać, między energią mikrocząstki i czasem, w którym tę energię wyznaczamy. I tu zachodzi związek nieokreśloności Heisenberga:

$$\Delta E\,\Delta t \geqslant h.$$

Jeżeli więc wyznaczymy dokładnie energię np. atomu, to nie możemy wiedzieć, w jakiej chwili miał on tę energię.

Jak powiedzieliśmy więc, możemy stwierdzić tylko, że pęd mikrocząstki jest zawarty w granicach między

$$p = mv \quad \text{i} \quad p + \Delta p = m\,(v + \Delta v).$$

Lecz rozmaitym wartościom pędu odpowiadają fale de Broglie'a rozmaitej długości zgodnie z wzorem

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Zatem danej cząstce odpowiada nie jedna fala, lecz ciąg nieskończenie wielu fal o długościach zawartych w pewnym przedziale. Fale te nakładają się, tworząc grupę fal, zwaną zwykle paczką fal.

Obliczmy, z jaką prędkością posuwać się będzie ta grupa fal. Mieliśmy poprzednio wzór na prędkość grupową:

$$w = \frac{d\omega}{dk}. \tag{26.23}$$

Lecz częstość kątowa $\omega = 2\pi\nu$, zaś $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (patrz. Cz. I ust. 12.9). Prócz tego

$$\frac{h}{mv} = \frac{h}{p}.$$

Możemy więc napisać

$$k = \frac{2\pi p}{h}, \quad \text{skąd} \quad kh = 2\pi p.$$

Mnożąc licznik i mianownik wyrażenia (26.23) na prędkość grupową w przez wielkość stałą h otrzymamy

$$w = \frac{d(2\pi\nu h)}{d\,(kh)} = \frac{d\,(2\pi\nu h)}{d\,(2\pi p)} = \frac{d\,(\nu h)}{dp} = \frac{dE}{dp}. \tag{26.24}$$

Iloczyn νh daje energię E [patrz wzór (26.21)]. Według zasady zachowania energii, przyrost energii równa się wykonanej przez siłę zewnętrzną pracy

$$dE = F\,ds, \tag{26.25}$$

zaś według II zasady Newtona

$$F = \frac{dp}{dt}. \tag{26.26}$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (26.25) możemy napisać

$$dE = \frac{dp}{dt}ds = dp\frac{ds}{dt} = dp\,v, \tag{26.27}$$

gdzie v oznacza prędkość cząstki. Stąd uwzględniając wzory (26.24) i (26.27) otrzymujemy

$$w = \frac{dE}{dp} = v. \tag{26.28}$$

A więc prędkość grupowa fal de Broglie'a równa się prędkości cząstki. Poruszającej się cząstce odpowiada cały zespół fal, paczka fal. Przy dokładnym przerachowaniu okazuje się, że taka paczka fal ma tylko w niewielkim obszarze Δx znaczną amplitudę, poza tym obszarem amplituda szybko maleje do zera. Paczka fal przemieszcza się z prędkością grupową równą prędkości cząstki.

Powstaje teraz zasadnicze pytanie: jak to jest możliwe, aby wiązka elektronów stanowiących strumień cząstek zachowywała się tak, jak gdyby stanowiły ją fale pewnej długości? Z tym samym pytaniem mogliśmy się spotkać już przedtem. Mówiliśmy przecież poprzednio, że promieniowanie ma własności falowe, wykazuje zjawiska interferencji i dyfrakcji tak jak fale, później zaś mówiliśmy, że w licznych przypadkach, w zjawisku fotoelektrycznym, zjawisko Comptona ma własności korpuskularne, zachowuje się jak strumień cząstek o określonym pędzie, określonej energii i masie. Jak pogodzić te sprzeczności w pojmowaniu własności promieniowania? Przypomnijmy sobie, co mówiliśmy o falach w Części I. Jak stwierdziliśmy wtedy, fale płaskie podlegają równaniu różniczkowemu

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Oznaczyliśmy wtedy przez y wychylenie z położenia równowagi. W fali podłużnej wychylenie z położenia równowagi oznaczyliśmy przez ξ. Oznaczmy teraz ogólnie wielkość podlegającą równaniu różniczkowemu fali przez Ψ i napiszmy ogólniejsze równanie, równanie fali przestrzennej rozchodzącej się na wszystkie strony. Jest ono następujące:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \tag{26.29}$$

Światło stosuje się do tego równania, które zresztą również rządzi ruchem fal na wodzie, fal dźwiękowych itd. Wskutek tego wykazuje własności podobne, jakie wykazują np. fale na wodzie lub fale dźwiękowe. Ale czy uprawnieni jesteśmy z tego powodu do twierdzenia, że światło jest ruchem falowym? Nikt nigdy bez-

pośrednio fal tych nie obserwował. Obserwujemy tylko zjawisko występowania na ekranie ciemnych i jasnych na przemian prążków tam, gdzie spotykają się dwie wiązki światła pochodzące z jednego źródła. Przytoczymy tu doskonałe naświetlenie tego zagadnienia przez W. Hume-Rothery* (czyt. Jum-Rodzery), który w swojej książce pisze: „w jakimkolwiek doświadczeniu nad interferencją światła, to jest tylko mierzenie względnego natężenia oświetlenia w różnych miejscach i stosowanie do nich pewnych równań matematycznych. Są to te same równania, które stosujemy do ruchu falowego, a funkcja, która wyraża natężenie promieniowania, jest proporcjonalna do kwadratu czegoś, co byłoby amplitudą, gdyby równania odnosiły się do rzeczywistego ruchu falowego". To, że światło podlega równaniu różniczkowemu ujmującemu również ruch falowy nie przesądza wcale o tym, że światło istotnie jest ruchem falowym. Jak wiemy, doświadczenie Michelsona wykazało, że nie istnieje środowisko, w którym fale te mogłyby się rozchodzić.

Podobnie istnieje np. równanie różniczkowe, zwane równaniem Laplace'a, które jednocześnie stosuje się do ustalonego przepływu ciepła w ciałach, do ruchu idealnej cieczy i do pola elektrostatycznego, w którym nie ma ładunków. Czy należy stąd wnioskować, że ciepło jest cieczą? Oczywiście wiemy dzisiaj, że nie, chociaż był czas, że wyobrażano sobie istotnie ciepło jako ciecz. Podobnie i my do niedawna wyobrażaliśmy sobie światło jako falowanie hipotetycznego środowiska zwanego eterem kosmicznym.

Zatem, jak ostatecznie mamy pojmować zachowanie się i własności światła? Odpowiedź jest prosta: możemy strumień światła uważać za strumień fotonów o energii $h\nu$, pędzie $\frac{h}{\lambda}$ i masie $\frac{h}{c\lambda}$. Lecz zachowaniem się fotonów rządzi funkcja spełniająca równanie fali. Natężenie promieniowania jest proporcjonalne do gęstości fotonów. Aby tę gęstość obliczyć, stosujemy równania ruchu falowego, a kwadrat amplitudy funkcji Ψ daje nam gęstość fotonów w danym miejscu. Lecz mógłby się ktoś pytać dalej: dobrze, gdy fotonów jest dużo, kwadrat funkcji falowej daje nam gęstość fotonów, lecz jeżeli fotonów będzie niewiele albo będzie jeden, to co będzie oznaczać funkcja falowa? Odpowiedź jest następująca: funkcja Ψ daje w tym wypadku prawdopodobieństwo, że foton po przejściu wąskiej szczeliny trafi w określone miejsce ekranu. Rozwiązanie równania falowego daje nam prawdopodobieństwo znalezienia fotonów w różnych miejscach przestrzeni. Tam gdzie to prawdopodobieństwo jest duże, przy większym natężeniu promieniowania będzie dużo fotonów, otrzymamy jasne prążki, tam gdzie prawdopodobieństwo jest małe, wystąpią prążki ciemne. Zatem równanie falowe należy traktować jako równanie czysto matematyczne. Funkcja będąca rozwiązaniem tego równania, zależna od współrzędnych i czasu, określa prawdopodobieństwo znalezienia fotonów w danym obszarze przestrzeni.

---

* W. Hume-Rothery, *Elektrony, atomy, metale i stopy*, PWN Warszawa, 1955, str. 45.

Zupełnie podobnie rzecz się ma, jeżeli chodzi o zachowanie się mikrocząstek. Fale związane z ruchem tych cząstek, są to funkcje matematyczne, a kwadrat amplitudy tych fal daje wielkość prawdopodobieństwa znajdowania się cząstki w danym obszarze przestrzeni.

26. 6. Równanie Schrödingera. Stwierdziliśmy poprzednio, że istnieje pewna analogia między ruchem cząstki i ruchem fal. Kierując się tą analogią de Broglie przyporządkował poruszającej się cząstce fale pewnej długości. Następny krok w rozwoju nowej teorii uczynił Schrödinger. Przypomina on nieco przejście od optyki geometrycznej do zasady Huygensa.

Weźmy jeszcze raz pod uwagę równanie fali przestrzennej:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \tag{26.30}$$

Zakładając, że funkcja Ψ ma kształt:

$$\Psi = \psi(x,y,z) \sin 2\pi\nu t,$$

gdzie amplituda drgania ψ jest funkcją tylko współrzędnych, otrzymamy

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \sin 2\pi \nu t,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \sin 2\pi \nu t,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \sin 2\pi \nu t,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -4\pi^2 \nu^2 \psi \sin 2\pi \nu t.$$

Podstawiając te wartości na drugie pochodne funkcji Ψ do równania (26.30) otrzymamy równanie

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2\nu^2}{v^2} \psi = 0. \tag{26.31}$$

Weźmy teraz pod uwagę założenie de Broglie'a:

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

w takim razie częstość ν będzie określona wzorem

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{mv^2}{h}. \tag{26.32}$$

Wstawiając tę wartość do wzoru (26.31) otrzymamy

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2 m^2 v^2}{h^2} \psi = 0, \tag{26.33}$$

albo

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{mv^2}{2} \psi = 0. \qquad (26.34)$$

Jeżeli całkowitą energię oznaczymy przez E, a potencjalną — przez U, to

$$E = U + \frac{mv^2}{2}, \qquad (26.35)$$

skąd

$$\frac{mv^2}{2} = E - U. \qquad (26.36)$$

Wstawiając tę wartość na $\frac{mv^2}{2}$ do równania (26.34) otrzymamy

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) \psi = 0. \qquad (26.37)$$

Jest to słynne równanie Schrödingera ujmujące ruch cząstki w polu potencjalnym.

Nie należy sądzić, że wyżej przeprowadzone rozumowanie jest wyprowadzeniem równania Schrödingera. To rozumowanie było oparte na analogiach i zawiera prócz tego hipotezę de Broglie'a. Równanie Schrödingera, jak każde uogólnienie, nie da się wyprowadzić z innych zasad. O słuszności każdej zasady ogólnej przekonywa nas zgodność wniosków z niej wyprowadzonych z doświadczeniem.

Jeżeli wprowadzimy do tego równania wyrażenia na energię całkowitą E i energię potencjalną U elektronu poruszającego się wokoło jądra, to otrzymamy równanie różniczkowe, które ma rozwiązania ciągłe, skończone i jednoznaczne tylko dla pewnych, tworzących określony ciąg, wartości energii atomu. Rozwiązanie równania Schrödingera daje w sposób naturalny i logiczny warunki kwantowe określające, że atom wodoru może się znajdować tylko w pewnych oddzielnych, określonych stanach energii.

26. 7. Znaczenie funkcji ψ. Po odkryciu równania Schrödingera zaczęto zastanawiać się nad znaczeniem funkcji ψ. Z początku przypuszczano i sam Schrödinger tak myślał, że jej kwadrat oznacza gęstość ładunku elektrycznego w danym miejscu. Jednakże powodowało to rozmaite trudności i obecnie przyjęta jest powszechnie interpretacja Borna. Według Borna wyrażenie

$$\psi\psi^* \, dV, \qquad (26.38)$$

gdzie ψ i ψ^* są funkcjami zespolonymi sprzężonymi*, a dV— elementem objętości,

* Liczby $a + bi$ i $a - bi$, gdzie $i = \sqrt{-1}$, nazywają się zespolonymi sprzężonymi (funkcja ψ może być funkcją zespoloną). Funkcja oznaczana zwykle gwiazdką, ψ^* jest funkcją, w którą przechodzi funkcja ψ przez zamianę wszystkich wielkości urojonych na wielkości urojone z przeciwnymi znakami.

oznacza prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w elemencie objętości dV. Oczywiście prawdopodobieństwo to będzie proporcjonalne do wielkości tego elementu dV. Iloczyn zaś

$$\psi\psi^* \tag{26.39}$$

nazywamy gęstością prawdopodobieństwa. Jest to, jak widać, prawdopodobieństwo przypadające na jednostkę objętości. Jeżeli ψ jest funkcją rzeczywistą, to $\psi^* = \psi$ i wtedy

$$\psi\psi^* = |\psi|^2.$$

Kwadrat amplitudy oznacza w tym przypadku gęstość prawdopodobieństwa.

Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w danej objętości V będzie, zgodnie z prawem dodawania prawdopodobieństw (patrz 26.2), wyrażone wartością całki

$$\int \psi\psi^* \, dV.$$

Jeżeli całkę tę rozciągniemy na całą przestrzeń, to otrzymamy prawdopodobieństwo, że cząstka znajduje się gdziekolwiek w przestrzeni. Ale cząstka musi się gdzieś znajdować, zatem prawdopodobieństwo to jest pewnością. A więc

$$\int_{\infty} \psi\psi^* \, dV = 1. \tag{26.40}$$

Ten warunek nazywamy unormowaniem funkcji ψ, a funkcję czyniącą zadość temu warunkowi — funkcją unormowaną.

26.8. Atom wodoru w mechanice kwantowej. Energia potencjalna atomu, jak obliczyliśmy (patrz 25.2), jest

$$U = -\frac{e^2}{r}.$$

Zatem równanie Schrödingera dla atomu wodoru możemy napisać w postaci:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right) = 0. \tag{26.41}$$

Ze względu na symetrię kulistą wprowadza się tu zwykle współrzędne kuliste r, ϑ, φ (rys. 26.5):

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi,$$

$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi,$$

$$z = r \cos\vartheta.$$

Po podstawieniu tych wartości na x, y, z, do równania (26.41), po dość skomplikowanych rachunkach* otrzymujemy równanie

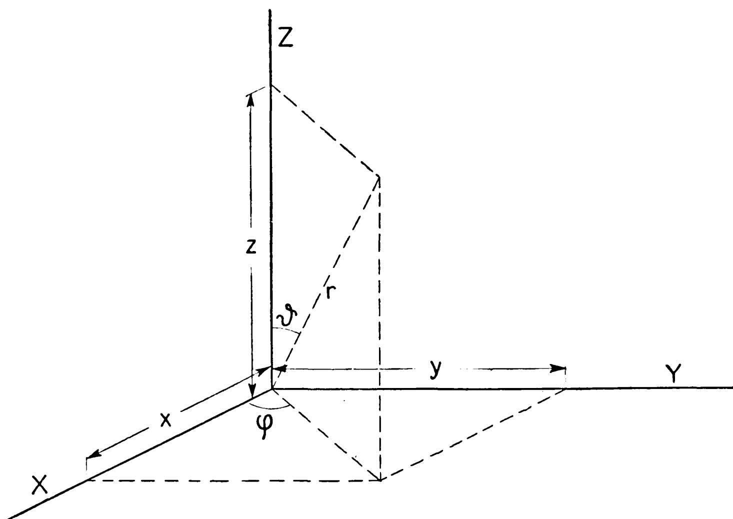
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right)+$$

$$+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi=0. \tag{26.42}$$

Równanie to rozwiązuje się zakładając, że

$$\psi = R(r)\,\Theta(\vartheta)\,\Phi(\varphi), \tag{26.43}$$

to znaczy zakładając, że funkcję ψ można przedstawić w postaci iloczynu trzech funkcji R, Θ i Φ, z których każda jest funkcją tylko jednej zmiennej niezależnej. Można wtedy równanie (26.42) rozdzielić na trzy równania różniczkowe. W każdym z nich występuje tylko jedna z tych funkcji. Równania te mają rozwiązania jednoznaczne, ciągłe i skończone w całej przestrzeni tylko pod warunkiem wprowadzenia do nich pewnych parametrów, których wartości muszą być całkowite.



Rys. 26. 5. Współrzędne kuliste

Tak, aby równanie, do którego wchodzi funkcja Φ miało rozwiązania odpowiadające wyżej wymienionym warunkom, trzeba wprowadzić parametr m_l, który można nazwać osiową liczbą kwantową (dawniejsza magnetyczna liczba kwantowa), przy tym może ona przybierać wartości

$$m_l = 0, 1, 2, \ldots$$

---

* Istnieją prostsze sposoby przejścia do innych współrzędnych (patrz. np. R. Bekker, *Theorie der Elektrizität*, B. G. Teubner, 1951, str. 38).

Liczba kwantowa m_l wyznacza rzut krętu orbitalnego elektronu na oś Z. Rzut krętu może przybierać wartości

$$m_l \frac{h}{2\pi}. \tag{26.44}$$

Do równania dla funkcji Θ trzeba wprowadzić liczbę l, która może przybierać wartości

$$l = 0, 1, 2, \ldots$$

Liczba kwantowa l (orbitalna liczba kwantowa) wyznacza kręt orbitalny elektronu. Wartość krętu jest

$$\frac{h}{2\pi} \sqrt{l(l+1)}. \tag{26.45}$$

Według teorii Bohra wartość krętu była określona wzorem

$$k \frac{h}{2\pi}. \tag{26.46}$$

Fakty doświadczalne zmuszały już dawniej do używania wartości (26.45) zamiast (26.46).

Aby rozwiązać trzecie równanie, zawierające funkcję R, trzeba wprowadzić trzecią liczbę kwantową $n > l$ (główna liczba kwantowa). Ostatnie równanie ma fizycznie możliwe rozwiązania dla wartości energii atomu

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2}.$$

Na funkcję Φ otrzymuje się proste rozwiązania

$$\Phi = C e^{i m_l \varphi}.$$

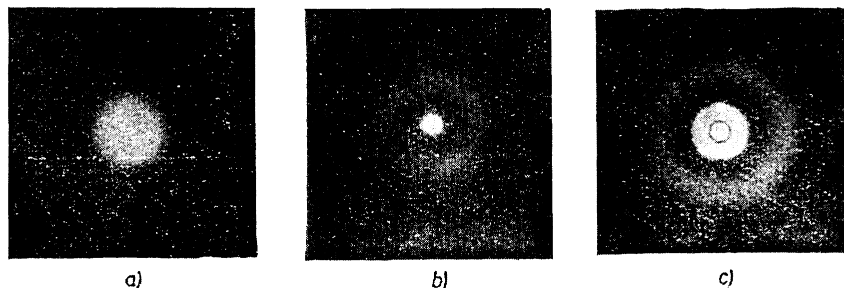
Rozwiązaniami równania na Θ są pewne wielomiany zwane wielomianami Legendre'a (czyt. Leżandra). Rozwiązaniami równania dla R są tzw. wielomiany Laguerre'a (czyt. Lagerra).

Nie wchodząc w szczegóły tych rozwiązań, trzeba podkreślić fakt, że liczby kwantowe, które w dawniejszej teorii kwantów były wprowadzone w sposób sztuczny, tutaj wynikają w sposób zupełnie naturalny z rozwiązań równań różniczkowych przy uwzględnieniu warunków, aby rozwiązania te odpowiadały fizycznej realności (nie rosły np. bezgranicznie przy oddalaniu się do nieskończoności).

Na zakończenie trzeba zrobić jeszcze jedną uwagę: w nowej teorii nasz obraz atomu uległ zasadniczej zmianie. W dawnej teorii wyobrażaliśmy sobie elektron krążący w pewnej płaszczyźnie wokół jądra. Natomiast według nowej mechaniki kwantowej atom wodoru w stanie podstawowym ma symetrię kulistą, podobnie we wszystkich stanach s (rys. 26. 6). Dla stanów s funkcje Θ i Φ mają wartości stałe, funkcja R zaś ma pewną liczbę powierzchni kulistych węzłowych (to znaczy, na których amplituda funkcji falowej równa się zeru). Na rysunku 26.6 przedstawiono przebieg funkcji R w zależności od odległości od jądra. Nie możemy

tu omawiać wszystkich tych bardzo interesujących szczegółów, gdyż powiększyłoby to zbyt znacznie rozmiary książki. W sposób popularny przedstawione są one w wymienionej wyżej książce W. Hume-Rotheryego.

Szczegółowy wykład mechaniki kwantowej znajdzie czytelnik w dziełach wymienionych poniżej. Trzeba jednak od razu podkreślić, że jest ona pojęciowo



Rys. 26. 6. Stany *s* atomu wodoru: a) atom wodoru w stanie podstawowym b) i c) stany wzbudzone 2*s* i 3*s*

trudna, wymaga znacznego przygotowania matematycznego, a przede wszystkim przełamania początkowych trudności, z którymi spotyka się każdy rozpoczynający studium tego dzisiaj prawie niezbędnego działu fizyki.

Literatura: E.W. Szpolski, *Fizyka atomowa*, PWN 1953, W. Rubinowicz, *Kwantowa teoria atomu*, PWN 1954, D. Błochincew, *Podstawy mechaniki kwantowej*, PWN 1954.

26. 9. Mikroskop elektronowy. Za pomocą zwykłego mikroskopu nie możemy rozróżniać szczegółów przedmiotów, których rozmiary są mniejsze od długości fali światła użytego do oświetlenia. Zdolność rozpoznawcza lub rozdzielcza mikroskopu określona jest przez odległość dwóch bliskich punktów przedmiotu, które odróżniamy jeszcze jako oddzielne punkty. Można wykazać, że granicą zdolności rozdzielczej mikroskopu jest odległość równa połowie długości fali, a więc przy użyciu światła widzialnego — około 2500 Å. Przy użyciu światła nadfioletowego i fotografii możemy się nieco dalej jeszcze posunąć, mniej więcej do 1000 Å.

Ponieważ z poruszającymi się szybko elektronami związane są fale długości poniżej 1 Å, więc można by mieć nadzieję, że używając elektronów zamiast fal światła można będzie się posunąć jeszcze dalej. Istotnie udało się już zbudować przyrząd do tego celu, zwany mikroskopem elektronowym. Przyrząd ten przypomina budową lampę oscylograficzną. Żarząca się katoda wysyła elektrony rozpędzane napięciem kilkudziesięciu tysięcy woltów przyłożonym między katodą i anodą. Gdy na drodze wiązki elektronów wstawimy przedmiot dostatecznie małej grubości, aby elektrony przez niego łatwo przenikały, ulegają one dyfrakcji. Ugięte od szczegółów przedmiotu elektrony zbiera układ soczewek elektronowych (patrz 22.9) wytwarzając powiększony obraz przedmiotu, powiększany jeszcze

raz przez drugi układ soczewek, podobnie jak w zwykłym mikroskopie. Obraz wytwarzany jest na ekranie fluoryzującym lub kliszy fotograficznej. Oczywiście wewnątrz konieczna jest bardzo dobra próżnia, toteż mikroskop elektronowy musi być na stałe połączony z pompą próżniową.

Mikroskop elektronowy daje o wiele większe powiększenia od zwykłego mikroskopu. Ze względu na stosowaną w nim długość fali, przeszło 1000 razy mniejszą od długości fali światła, powinniśmy tą drogą móc uzyskać powiększenia dochodzące do miliona. Zdolność rozpoznawcza już osiągnięta wynosi kilkanaście angstremów.

Zadania

26.1. Jaka jest długość fal de Broglie'a przyporządkowanych elektronom o energii 1 eV, 10^4 eV, 10^5 eV (nie uwzględniać relatywistycznego wzrostu masy).

Odpowiedź: $\lambda_1 = 12{,}2$ Å, $\lambda_2 = 0{,}122$ Å, $\lambda_3 = 0{,}039$ Å.

26.2. Jaka jest masa fotonu światła widzialnego o długości fali $\lambda = 5000$ Å.

Odpowiedź: $\approx 0{,}44 \cdot 10^{-32}$ g.

26.3. Jaką długość fali musi mieć foton, aby jego masa równała się masie spoczynkowej elektronu?

Odpowiedź: 0,02425 Å.

26.4. Jaka będzie długość fali de Broglie'a przyporządkowanej jednemu gramowi masy o prędkości 200 cm/sec?

Odpowiedź: $3{,}31 \cdot 10^{-29}$ cm.

26.5. Średnia energia bezładnego ruchu elektronów w platynie wynosi koło 12 eV. Jaka jest średnia prędkość elektronów? Jaka będzie długość fali de Broglie'a dla elektronów o tej prędkości?

Odpowiedź: $v = 2{,}054 \cdot 10^8$ cm/sec, $\lambda \approx 3{,}54$ Å.

26.6. Wyprowadzić wyrażenie na długość fal de Broglie'a przyporządkowanych drobinie gazu o prędkości odpowiadającej temperaturze T°K.

Odpowiedź: Oznaczając masę drobiny M, stałą Boltzmanna k, będziemy mieli $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{3kTM}}$.

26.7. Jaka będzie długość fal de Broglie'a dla drobin wodoru, których prędkość równa się średniej kwadratowej prędkości drobin wodoru przy temperaturze 300°K?

Odpowiedź: 1,03 Å.

26.8. Jakie będą długości fal de Broglie'a dla elektronów o energiach 10^5 eV, 10^{10} eV, 10^{16} eV, jeżeli uwzględnimy ich relatywistyczny wzrost masy?

Wskazówka: Obliczyć prędkość z wzoru na energię kinetyczną $m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right) = \text{eV}$, skąd można wyprowadzić wzór następujący:

$$\lambda = \frac{12{,}27}{\sqrt{U}\,\sqrt{1+9{,}77\cdot 10^{-7}}}\ \text{Å}.$$

Odpowiedź: $\lambda_1 = 0{,}0386$ Å, $\lambda_2 = 1{,}24 \cdot 10^{-6}$ Å, $\lambda_3 = 1{,}24 \cdot 10^{-12}$ Å.

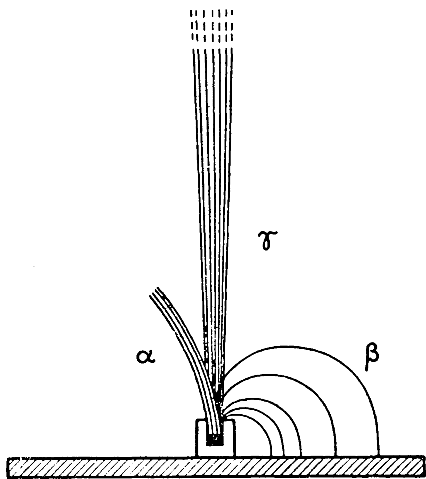
Pytania do powtórzenia materiału

1. Na czym polega założenie de Broglie'a dotyczące falowych własności mikrocząstek? Jak jest związana długość fali z pędem cząstki?
2. Jaki otrzymuje się wzór na długość fali związanej z elektronem rozpędzonym danym napięciem?
3. Jak stwierdzono falowe własności mikrocząstek?
4. Jak z założenia falowych własności elektronu otrzymać założenie Bohra odnoszące się do krętu elektronu na orbicie?
5. Jak się określa prawdopodobieństwo danego zdarzenia? Jakie jest prawo dodawania prawdopodobieństw?
6. Co nazywamy prędkością grupową fal? Jak się wyraża prędkość grupowa?
7. Jak jest związana prędkość fazowa fali de Broglie'a z prędkością cząstki a jak — prędkość grupowa?
8. Jaka jest treść zasady nieokreśloności Heisenberga? Co z niej wynika? Czy możemy jednocześnie określić położenie i pęd cząstki? energię i czas, w którym układ miał tę energię?
9. Jak można otrzymać równanie Schrödingera?
10. Jakie znaczenie ma funkcja występująca w równaniu Schrödingera?
11. Za pomocą jakiego założenia rozwiązuje się równanie Schrödingera dla atomu wodoru?
12. Czy obraz atomu wodoru w mechanice kwantowej różni się od obrazu atomu Bohra?
13. Na jakiej zasadzie opiera się mikroskop elektronowy? Jakie są w nim urządzenia?

27. Promieniotwórczość. Jądro atomowe

27. 1. Ciała promieniotwórcze. W r. 1896 H. Becquerel (czyt. Bekerel) odkrył, że związki uranu wyświetlają kliszę fotograficzną nawet poprzez ciała nieprzezroczyste. Najwidoczniej więc związki uranu wysyłają jakieś promienie działające podobnie do promieni Röntgena. Podobnie jak tamte są one niewidzialne. Posiadają one jeszcze jedną własność podobną do własności promieni Röntgena, mianowicie jonizują powietrze w otoczeniu uranu.

Maria Skłodowska-Curie wraz z mężem Piotrem Curie (czyt. Kiuri) kierując się tą właśnie zdolnością jonizacji odkryli przy dalszych poszukiwaniach w rudzie uranowej, tzw. blendzie smołowcowej, nowe pierwiastki, które promieniują bez porównania silniej od uranu. Jeden z nich nazwali polonem, drugi — radem.



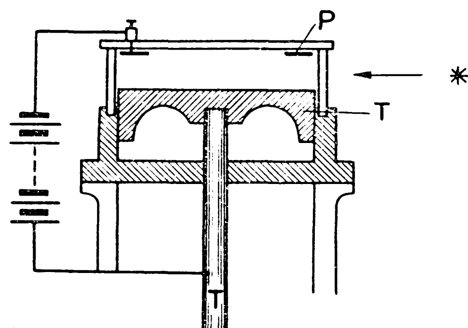
Rys. 27.1. Promieniowanie ciał promieniotwórczych

Ciała promieniotwórcze, których jeszcze kilka dziesiątków wykryto później, wysyłają samodzielnie promieniowanie, wydzielając bez przerwy energię w stosunkowo wielkich ilościach.

Badanie promieniowania ciał promieniotwórczych wykazało istnienie trzech gatunków promieniowania. Możemy je rozdzielić za pomocą pola magnetycznego. Jeżeli np. umieścimy trochę soli radowej w cylindrycznym wyżłobieniu puszki ołowianej, otrzymamy wąską wiązkę promieni wychodzących w górę, gdyż grubościenna puszka ołowiana nie przepuszcza promieniowania. Gdy umieścimy ją między biegunami silnego elektromagnesu, wówczas wiązka ta rozdzieli się na trzy części. Przedstawia to rys. 27.1. Należy sobie wyobrazić pole magnetyczne prostopadłe do płaszczyzny rysunku. Jedna wiązka odchyli się, jak można stwierdzić, nieznacznie w lewo, w tę stronę, w którą odchyliłyby się biegnące w polu magnetycznym ładunki dodatnie. Promienie te nazwano promieniami alfa. Druga część odchyli się silnie w przeciwną stronę. Są to

promienie beta. Trzecia część zwana promieniami gamma nie odchyli się wcale.

Promienie alfa są podobne we własnościach do promieni kanalikowych. Są one bardzo mało przenikliwe, cienka bibułka wystarcza, aby je zatrzymać. W powietrzu biegną na odległość kilku zaledwie centymetrów. Wzbudzają silną fluorescencję w różnych materiałach. Jeżeli się patrzy na fluoryzujący pod wpływem promieni alfa siarczek cynku przez lupę lub mikroskop, widać wiele rozbłyskujących punktów w coraz to nowych miejscach. Nazywają to zjawisko scyntylacjami. Promienie alfa posiadają własność bardzo silnego jonizowania gazu, przez który przebiegają. Wszystkie działania promieni alfa urywają się nagle w określonej odległości od ciała promieniotwórczego. Wiele badań i obserwacji nad promieniami alfa zostało dokonanych za pomocą komory Wilsona (czyt. Uilsna) (rys. 27.2). Jest to przyrząd, który znalazł bardzo szerokie zastosowanie przy badaniach rozmaitych zjawisk atomowych. Zasada jego jest bardzo prosta. Jest to naczynie cylindryczne szklane, głębokości kilku cm, którego dno stanowi ruchomy tłok metalowy *T*. W naczyniu znajduje się powietrze albo inny gaz oraz nasycona para wody lub alkoholu. Między tłokiem i pierścieniem metalowym, umieszczonym przy frontowej ściance naczynia, wytwarza się różnicę potencjałów rzędu 100 woltów. Powstałe wewnątrz pole elektryczne usuwa jony, które mogłyby się tam znajdować. Nagły ruch tłoka powiększający objętość naczynia wywołuje adiabatyczne rozprężenie i wskutek tego oziębienie gazu. Para nasycona znajdująca się wewnątrz powinna ulec skropleniu, jednak wskutek braku jonów, a więc zarodków, na których para mogłaby się skraplać, przechodzi ona w parę przesyconą nie skraplając się. Jeżeli jednak umieścimy w środku odrobinę ciała promieniotwórczego wysyłającego promienie alfa, promienie te wytwarzają na swej drodze bardzo wiele jonów. Jony stanowią zarodki, na których momentalnie wytwarzają się mikroskopijne kuleczki wody z pary przesyconej. Przy silnym bocznym oświetleniu komory Wilsona tory promieni alfa utworzone z delikatnej mgiełki są dobrze widoczne. Można je również sfotografować. Rysunek 27.3 przedstawia fotografię torów promieni alfa. Pomiar stosunku $\frac{e}{m}$ dla promieni alfa dał wynik $4{,}8 \cdot 10^4$ C/g, czyli liczbę dwa razy mniejszą niż dla atomów wodoru. Stąd można wnioskować, że albo cząstka ma ładunek *e*, a masę 2, albo ładunek 2*e* i masę 4. Jak wykazał Rutherford, tzw. promienie alfa są strumieniem podwójnie zjonizowanych (pozbawionych obu elektronów,



Rys. 27.2. Konstrukcja komory Wilsona

z jakimi normalnie związane jest jądro w atomie helu) atomów helu, czyli jąder helu, mają więc ładunek $2e$ i masę 4.

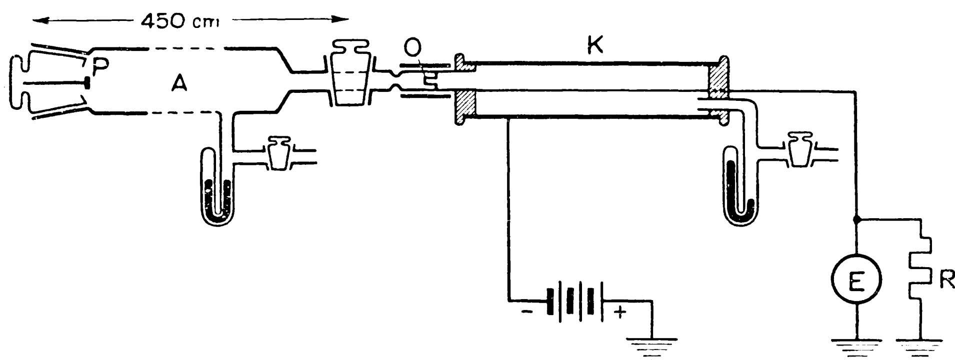
Zasięg cząstek alfa, czyli odległość, jaką cząstki alfa przebywają w powietrzu, zależy od prędkości, z jakimi są one wyrzucane z atomów ciała promieniotwórczego. Prędkości te dochodzą do 20 000 km/sec. Jak stwierdzono, istnieje prosty związek między prędkością, z jaką cząstka alfa jest wyrzucana z atomu, i jej zasięgiem, mianowicie

$$v = a \sqrt[3]{R}, \qquad (27.1)$$

gdzie v oznacza prędkość, a R — zasięg.

Rys. 27. 3. Ślady cząstek alfa w komorze Wilsona

Liczbę cząstek alfa wysyłanych w sekundzie z danej ilości ciała promieniotwórczego można policzyć w sposób następujący Rutherford (czyt. Radzefed) i Geiger (czyt. Gajger): w dokładnie wypróżnionej rurze szklanej A umieszcza się na płytce P znaną ilość ciała promieniotwórczego (rys. 27.4). Przez okienko mikowe O grubości kilku tysięcznych milimetra cząstki alfa przelatują do kondensatora cylindrycznego K, w którym ciśnienie gazu wynosi kilkanaście cm Hg.



Rys. 27. 4. Urządzenie Rutherforda i Geigera do liczenia cząstek alfa

Cząstka alfa wytwarza na swojej drodze wiele par jonów. Między zewnętrzną okładką i wewnętrznym drucikiem wytwarza się za pomocą baterii znaczną różnicę potencjałów. Wytworzone przez cząstki alfa jony rozpędzają się w silnym polu

elektrycznym i wytwarzają również jeszcze znaczną ilość par jonów przez zderzenia. Jony te przenoszą ładunek od zewnętrznej osłony do wewnętrznego drucika. Ładunek zebrany na druciku daje odchylenie połączonego z nim elektrometru *E*. Przez bardzo wielki opór *R* elektrometr rozbraja się następnie do ziemi. Każda cząstka alfa daje zatem nagłe odchylenie elektrometru. Odchylenia te można zarejestrować i w ten sposób policzyć liczbę cząstek alfa przypadających na znany kąt bryłowy. Stąd można wnioskować o liczbie cząstek alfa wysyłanych na wszystkie strony z danej ilości ciała promieniotwórczego. Jak stwierdzono w ten sposób, 1 gram radu wysyła na wszystkie strony $3{,}7 \cdot 10^{10}$ cząstek alfa w sekundzie.

Promienie beta są o wiele bardziej przenikliwe od promieni alfa. W powietrzu przebywają drogę do jednego i więcej metrów. Mogą przenikać przez blachy aluminiowe grubości kilku milimetrów. Jednak nie mają określonego zasięgu, tak jak promienie alfa, co świadczy o tym, że wyrzucane są z najrozmaitszymi prędkościami. Z kierunku odchylenia promieni beta w polu magnetycznym, jak również w polu elektrycznym, można wnioskować, że promienie beta niosą ładunek ujemny. Maria Skłodowska-Curie wraz z mężem stwierdzili bezpośrednio, że promienie beta niosą ładunek ujemny. Umieścili oni mianowicie dostatecznie grubą płytkę metalową oblaną parafiną w cienkiej metalowej osłonie uziemionej. Płytka ta była połączona drutem z elektrometrem. Promienie beta radu umieszczonego naprzeciwko w puszce metalowej, przenikając przez osłonę uziemioną i warstwę parafiny elektryzowały płytkę ujemnie.

Z wielkości odchylenia promieni beta w polu elektrycznym i magnetycznym można wyznaczyć prędkość promieni beta oraz stosunek $\frac{e}{m}$. Pomiary wykazały, że prędkości promieni beta w przeciwieństwie do promieni alfa są w ogólności rozmaite. Najszybsze dosięgają niemal prędkości światła. Stosunek ładunku do masy $\frac{e}{m}$ nie jest stały, lecz jak wykazały po raz pierwszy pomiary Kaufmanna, zmniejsza się z wzrostem prędkości. Późniejsze, dokładniejsze pomiary stwierdziły, że masa cząstek beta rośnie według wzoru teorii względności:

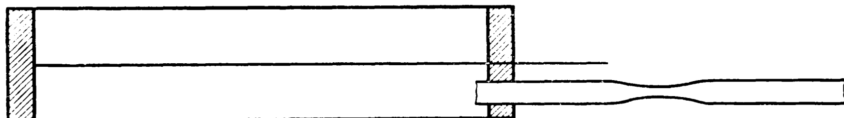
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

gdzie m_0 jest masą spoczynkową cząstek. Stosunek $\frac{e}{m_0}$ jest identyczny z wartością tegoż stosunku dla powolnych promieni katodowych. Zatem promienie beta są strumieniami elektronów.

Promienie gamma nie odchylają się ani w polu magnetycznym, ani elektrycznym. Są nadzwyczaj przenikliwe. Przenikają nawet przez grube na kilkanaście cm płyty żelazne lub ołowiane. Zachowują się w ogóle jak bardzo twarde promienie Röntgena.

Ciała promieniotwórcze wydzielają stale znaczne ilości energii w postaci ciepła. Jeden gram metalicznego radu w równowadze promieniotwórczej wydziela w ciągu 1 godziny 140 cal. 1 kg radu wydzieliłby w przeciągu roku około miliona kcal. Aby otrzymać taką ilość ciepła, należałoby spalić około 150 kg węgla.

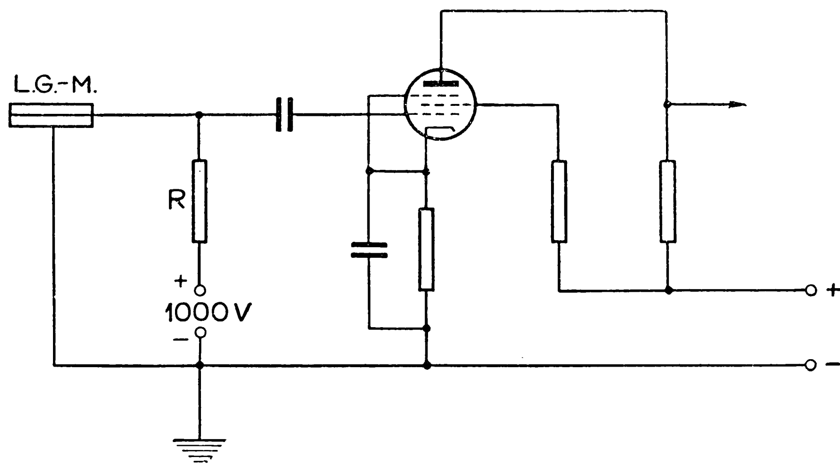
27. 2. Licznik Geigera—Müllera. Przyrząd ten, używany dzisiaj nadzwyczaj często, posiada bardzo prostą budowę: w rurze mosiężnej, miedzianej lub glinowej, średnicy od 1 do kilku cm, naciągnięty jest osiowo, odizolowany od rury drucik stalowy lub wolframowy grubości 0,1—0,2 mm (rys. 27.5). Rurę z obu



Rys. 27. 5. Licznik Geigera — Müllera

końców zamyka się szczelnie lub też wkłada się do rury szklanej i zatapia. Za pomocą dolutowanej rurki szklanej napełnia się licznik mieszaniną argonu ($\sim$ 9cmHg) i pary alkoholu ($\sim$ 1cmHg). Następnie rurkę się zatapia i licznik jest gotowy. Teraz między drucik, który z reguły jest anodą i rurę, która jest katodą, włącza się napięcie wynoszące około 1000 V. W obwód włącza się prócz tego opór rzędu 10^6 — 10^9 omów. Licznik ma tę własność, że jeżeli jakikolwiek czynnik jonizujący, a więc np. promienie Röntgena, promienie gamma lub promienie kosmiczne wyzwolą wewnątrz choćby jeden elektron, wówczas w silnym polu elektrycznym biegnie on ku drucikowi i nabywa szybko dostatecznej prędkości, aby przy zderzeniach z neutralnymi drobinami zjonizować je. Jony z kolei rozpędzają się i wywołują dalszą jonizację. Wytwarza się lawina jonów, która przenosi stosunkowo znaczne ładunki. Przez licznik przepływa krótkotrwały prąd wywołujący skok potencjału na oporze. Lecz przepływ prądu nie trwa długo. Częściowo wskutek spadku potencjału na oporze, a częściowo wskutek powolnego ruchu ciężkich jonów dodatnich, z których wytwarza się obłoczek osłaniający ścianki rury, prąd płynący przez licznik po upływie kilku stutysięcznych sekundy przerywa się, po czym wszystko wraca do stanu początkowego. Gdy nowa przyczyna wytworzy nową parę jonów, znów popłynie przez licznik prąd, skok potencjału powtórzy się. Te zmiany potencjału doprowadza się do wzmacniacza lampowego oporowego (rys. 27.6). Wzmocnione impulsy działają bezpośrednio lub pośrednio na jakikolwiek przyrząd rejestrujący, np. na numerator używany do rejestrowania rozmów telefonicznych. W takim razie przy każdym impulsie dawanym przez licznik wyskakuje na numeratorze numer wskazujący liczbę impulsów od początku obserwacji. Przyrząd liczy automatycznie liczbę impulsów. Wyzwolenie prądu w pojedynczym liczniku wywołuje jakakolwiek przyczyna jonizująca gaz w liczniku. Może więc je wywołać cząstka alfa, beta lub foton rentgenowski, może również spowodować je działanie promieni kosmicznych. Oczywiście,

aby liczyć cząstki alfa, trzeba je wpuścić do licznika przez odpowiednio cienkie okienko; aby móc liczyć cząstki beta, można zrobić licznik glinowy o odpowiednio cienkich ściankach, żeby cząstki beta mogły przenikać do środka.



Rys. 27.6. Schemat połączenia Geigera ze wzmacniaczem

Licznik reaguje również na promienie gamma i promienie Röntgena dzięki wyrzucanym z jego ścian fotoelektronom lub też elektronom komptonowskim, wyrzucanym głównie z atomów gazu.

27.3. Teoria rozpadu atomowego. Zagadkowe fakty opisane w ust. 27.1, w szczególności fakt znacznego wydzielania energii przez ciała promieniotwórcze, tłumaczy teoria rozpadu atomowego postawiona przez Rutherforda. Według tej teorii, najzupełniej potwierdzonej przez doświadczenie, w każdej jednostce czasu pewien określony ułamek liczby atomów ciała promieniotwórczego ulega rozpadowi. Atom, a właściwie, jak wiemy obecnie, jego jądro, wyrzuca z siebie cząstkę alfa lub cząstkę beta. Reszta stanowi jądro atomowe innego już pierwiastka. Jeżeli w pewnej chwili liczba atomów ciała promieniotwórczego jest N, to liczba dN, rozpadających się w czasie dt atomów, jest proporcjonalna do N i do długości przedziału czasu dt:

$$-dN = \lambda N\,dt. \tag{27.2}$$

dN jest ujemnym przyrostem liczby atomów N.

Z powyższego równania otrzymamy

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\,dt. \tag{27.3}$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$\ln N = -\lambda t + \text{const.} \tag{27.4}$$

Zatem

$$N = e^{-\lambda t} e^{\text{const}}. \tag{27.5}$$

e oznacza zasadę logarytmów naturalnych.

Oznaczając $e^{\text{const}} = N_0$ otrzymamy

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{27.6}$$

Stała N_0, jak łatwo stwierdzić, oznacza liczbę atomów danego ciała promieniotwórczego w chwili $t = 0$.

Stała λ o wymiarze odwrotności czasu (gdyż wykładnik musi być liczbą bezwymiarową nazywa się stałą rozpadu. Im większe λ, tym szybciej rozpada się, a więc i zanika pierwiastek promieniotwórczy. Aby się można było zorientować w szybkości zanikania danego pierwiastka, wprowadza się charakterystyczny dla każdego pierwiastka czas, podczas którego liczba atomów jego zmniejsza się do połowy. Oznaczamy go literą T. W takim razie

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda T},$$

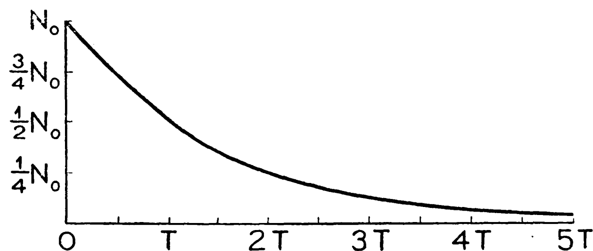
skąd

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T},$$

$$-\ln 2 = -\lambda T,$$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}. \tag{27.7}$$

Ten czas T nazywamy czasem połowicznego zaniku albo krótko półokresem. Po upływie tego czasu połowa atomów danego pierwiastka zanika, po upływie następnego czasu T znowu zanika połowa tej połowy, zatem ilość pierwiastka promieniotwórczego zmniejsza się do jednej czwartej, po upływie następnego przedziału czasu T — do jednej ósmej itd. (rys. 27.7).



Rys. 27. 7. Zmniejszanie się ilości ciała promieniotwórczego w czasie

Zwykle pierwiastek, którego atomy się rozpadają, daje początek atomom innego pierwiastka, również promieniotwórczego. I tak atom radu np. wyrzuca cząstkę alfa, która po przyłączeniu dwóch elektronów zamienia się w atom helu, reszta zaś atomu staje się atomem nowego pierwiastka, który jest gazem również promieniotwórczym, zwanym radonem. Liczba masowa radonu wynosi 222. Radon jest pierwiastkiem należącym do rodziny gazów szlachetnych. Atomy radonu rozpadają się dalej wyrzucając znowu cząstki alfa. Ponieważ atomy helu nie rozpadają się, więc ilość helu wzrasta stale w przybliżeniu proporcjonalnie

do czasu. 1 g radu w przeciągu roku wydziela 167 mm³ helu. Natomiast ilość radonu nie wzrasta stale. Jeżelibyśmy zamknęli 1 g radu oczyszczonego z radonu np. w szklanej rurce, to po kilku dniach pojawia się w niej już radon, którego ilość stopniowo wzrasta i mniej więcej po upływie miesiąca osiąga objętość 0,607 mm³, po czym już dalej jego ilość nie wzrasta. Przyczyną tego jest rozpad atomów radonu. Ponieważ liczba rozpadających się atomów radonu jest proporcjonalna do całkowitej ich liczby, zatem coraz większa liczba jego atomów będzie się rozpadać w sekundzie. W końcu, gdy liczba atomów rozpadających się zrówna się z liczbą atomów wytwarzanych w sekundzie, nastąpi statystyczna równowaga: liczba atomów radonu przestanie się zmieniać. Rozpatrzymy dokładniej taki przypadek, jak radu i radonu, w którym pierwiastek macierzysty ma długi okres życia i to o wiele dłuższy niż pierwiastek pochodny. Przypuśćmy więc, że początkowa liczba atomów pierwiastka macierzystego A jest N_1, a stała rozpadu λ_1. W takim razie

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1. \tag{27.8}$$

Atomy tego pierwiastka rozpadając się wytwarzają atomy pierwiastka B. Przypuśćmy, że to jest pierwiastek również promieniotwórczy o stałej rozpadu λ_2, przy czym $\lambda_2 \gg \lambda_1$. A więc przyrost dN_2 liczby atomów ciała B będzie proporcjonalny do N_1 i do dt, ubytek zaś — do N_2 i dt. Możemy zatem napisać

$$dN_2 = \lambda_1 N_1\, dt - \lambda_2 N_2\, dt. \tag{27.9}$$

Jeżeli czas połowicznego zaniku pierwiastka macierzystego A jest bardzo długi, to w przybliżeniu liczbę jego atomów N_1 można uważać za stałą. Dopóki N_2 jest małe, liczba atomów ciała B wzrasta. Lecz jednocześnie z powiększeniem liczby N_2 liczba rozpadających się atomów również wzrasta. Stan równowagi ustali się, gdy $dN_2 = 0$. Z tego warunku i z równania (27. 9) otrzymamy

$$\lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 = 0, \tag{27.10}$$

skąd

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{27.11}$$

Równanie to wyraża, że liczby atomów ciał promieniotwórczych są odwrotnie proporcjonalne do stałych rozpadu albo wprost proporcjonalne do ich półokresów. A więc np. dla radu i radonu pozostających w równowadze promieniotwórczej mamy:

dla radu $\lambda_1 = 1{,}38 \cdot 10^{-11}\ \text{sec}^{-1}$, $T_1 = 1590$ lat,

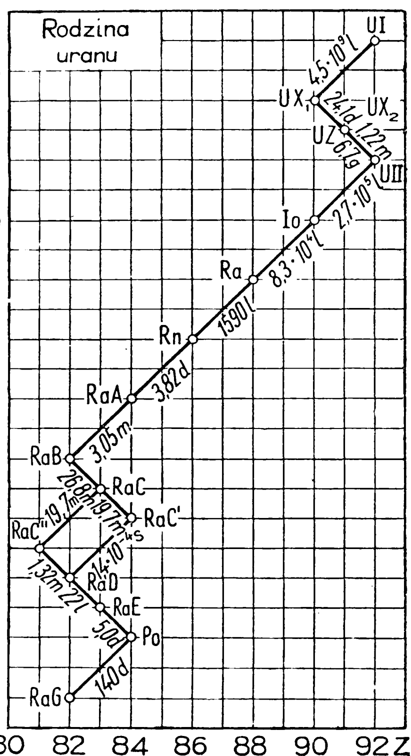
dla radonu $\lambda_2 = 2{,}097 \cdot 10^{-6}\ \text{sec}^{-1}$, $T_2 = 3{,}82$ dni.

A więc

$$\frac{N_1 \text{ atomów radu}}{N_2 \text{ atomów radonu}} = \frac{2{,}097 \cdot 10^{-6}}{1{,}38 \cdot 10^{-11}} = 1{,}52 \cdot 10^5.$$

Można stąd obliczyć, że w równowadze z 1 g radu pozostaje $0{,}627 \cdot 10^{-5}$ g radonu.

Jeżeli jądro pierwiastka promieniotwórczego wyrzuca cząstkę alfa o ładunku $+2e$ i liczbie masowej 4, to atom tego pierwiastka zamienia się na atom pierwiastka o mniejszym o $+2e$ ładunku jądra, zatem pierwiastka o numerze atomowym o dwie jednostki mniejszym, czyli stojącym o dwa miejsca wcześniej w tablicy Mendelejewa. Oczywiście jego liczba masowa będzie o 4 jednostki mniejsza. Jeżeli zaś atom wyrzuca cząstkę beta, jego jądro traci ładunek $-e$, ładunek dodatni jądra powiększa się o $+e$; w ten sposób powstaje jądro pierwiastka stojącego o jedno miejsce później w tablicy Mendelejewa. Jest to tak zwane prawo przesunięć promieniotwórczych Fajansa i Soddy'ego.



Rys. 27.8. Rodzina uranu

Na osi odciętych jest odkładana liczba atomowa tj. liczba protonów, na osi rzędnych — liczba neutronów

Istnieją trzy naturalne rodziny ciał promieniotwórczych. Protoplastami tych rodzin są bardzo długowieczne pierwiastki promieniotwórcze: uran, tor i aktyn. Rodzinie uranu daje początek izotop uranu ^{238}U. Kończy się zaś ona na trwałym pierwiastku niepromieniotwórczym, mianowicie izotopie ołowiu ^{206}Pb (rys. 27.8). Rodzina toru zaczyna się od toru ^{232}Th, a kończy się na izotopie ołowiu ^{208}Pb (rys. 27.9). Rodzina aktynu otrzymała nazwę od pierwiastka aktynu ^{227}Ac, jednakże jak się później okazało, aktyn pochodzi od izotopu uranu ^{235}U. Kończy się ta rodzina na izotopie ołowiu ^{207}Pb (rys. 27. 10).

Czasy połowicznego zaniku tych pierwiastków są następujące:

^{238}U . . . . $4{,}498 \cdot 10^{9}$ lat,

^{232}Th . . . . $1{,}39 \cdot 10^{10}$ lat,

^{235}U . . . . $8{,}91 \cdot 10^{8}$ lat.

Tym, że te pierwiastki mają tak długie czasy połowicznego zaniku, tłumaczy się fakt, że je znajdujemy w przyrodzie. Gdyby te czasy nie były tak długie, pierwiastki te nie przeżyłyby bardzo długich okresów geologicznych.

Więcej zawile przedstawia się zależność prawa równowagi promieniotwórczej dla pierwiastków pochodzących od pierwiastków o krótkim czasie życia.

Rys. 27.9. Rodzina toru

Rys. 27.10. Rodzina aktynu

Zazwyczaj pierwiastek promieniotwórczy pozostaje w równowadze promieniotwórczej ze swymi pochodnymi, np. uran ze swymi pochodnymi. Każdy gram uranu zawiera np. $3{,}3 \cdot 10^{-7}$ grama radu. Można je oddzielić drogą chemiczną, jak to właśnie zrobiła Maria Skłodowska-Curie z mężem, wydzielając rad z soli uranowej, co jest zresztą nadzwyczaj żmudną pracą.

Ponieważ masa atomów pierwiastków promieniotwórczych zmienia się przy wyrzucaniu cząstek alfa o cztery jednostki, zaś przy wyrzucaniu cząstek beta nie zmienia się (gdyż masę cząstki beta można pominąć jako bardzo małą wobec masy atomu), zatem liczba masowa każdego następnego pierwiastka rodziny promieniotwórczej może się różnić od poprzedniego tylko o wielokrotność czterech jednostek. Tak np. protoplasta rodziny uranu ^{238}U ma liczbę masową

$$238 = 4 \cdot 59 + 2,$$

zatem wszystkie pierwiastki tej rodziny będą miały liczby masowe wyrażające się liczbami

$$4n + 2,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą mniejszą lub równą 59.

Pierwszy pierwiastek rodziny aktynowców ^{235}U ma liczbę masową

$$235 = 4 \cdot 58 + 3.$$

A więc wszystkie pierwiastki tej rodziny będą miały liczby masowe wyrażające się liczbami

$$4n + 3.$$

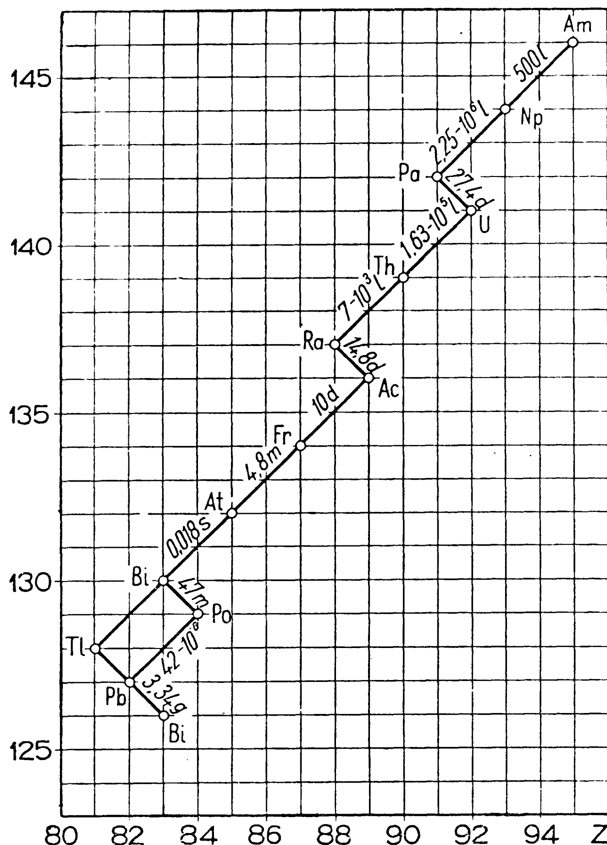
Podobnie pierwiastki rodziny toru będą miały liczby masowe wyrażające się liczbami

$$4n.$$

Jak widać, brak rodziny promieniotwórczej, w której liczby masowe wyrażałyby się liczbami

$$4n + 1.$$

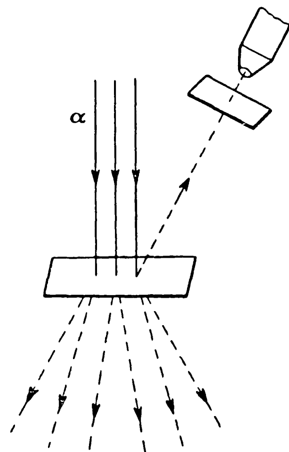
W ostatnich latach odkryto, że istnieje i taka rodzina. Protoplastą tej rodziny jest pluton $^{241}_{94}Pu$, pierwiastek, który udało się wytworzyć sztucznie, a który w układzie periodycznym pierwiastków stoi na 94 miejscu, zatem za uranem. Rysunek 27.11 przedstawia pierwiastki tej rodziny.



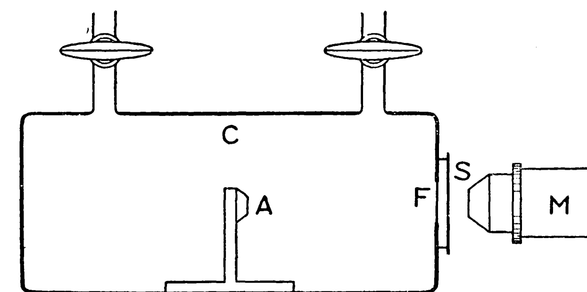
Rys. 27.11. Rodzina plutonu, nazywana zwykle rodziną neptunu

27. 4. Rozpraszanie cząstek alfa. Rutherford w r. 1905 pierwszy wykonywał doświadczenia nad przechodzeniem cząstek alfa przez cienką blaszkę aluminiową. W dalszym ciągu doświadczenia te prowadzili jego współpracownicy: Geiger, Chadwick (czyt. Czadwik) i Marsden. Doświadczenia były nadzwyczaj proste. Źródło promieni alfa było ustawione tak, że promienie padały pod kątem 45° na cienką folię złotą, grubości 0,6 mikrona. Przy takiej grubości blaszki bardzo łatwo przenikały przez nią promienie alfa. Promieniowanie rozproszone pod kątem 90° obserwowano za pomocą odpowiednio ustawionego ekranu pokrytego siarczkiem cynku. Cząstka alfa uderzając o taki ekran wywołuje jasny błysk. Scyntylacje te obserwowano za pomocą słabego mikroskopu. Oka-

zało się, że mimo iż tak cienka folia jest nieomal zupełnie przezroczysta dla cząstek alfa, to znaczy przebijają ją one z łatwością, to jednak pewna liczba cząstek alfa rozpraszana była pod kątem 90° do pierwotnego kierunku i nawet pod jeszcze większymi kątami (rys. 27.12). Z doświadczeń tych wynikało, że atomy są w zasadzie dla cząstek alfa o wielkiej prędkości niemal przestrzeniami pustymi. Cząstka alfa niesie silny ładunek elektryczny, przez swoje oddziaływanie elektryczne jonizuje atomy, odrywając od nich jeden lub kilka elektronów. Kierunek jej biegu podczas tego prawie nie ulega zmianie. Lecz pewna nieznaczna liczba cząstek alfa ulega bardzo silnym odchyleniom od pierwotnego kierunku biegu. Z doświadczeń tych wywnioskował Rutherford, że w atomie istnieje bardzo mały obszar nieprzenikliwy dla cząstek alfa. Na mocy tych doświadczeń Rutherford postawił hipotezę, że cała masa atomu jest ześrodkowana w jego jądrze zajmującym bardzo małą część objętości atomu. Ta hipoteza została najzupełniej potwierdzona przez doświadczenie. Średnica jądra, jak obecnie wiemy, jest rzędu 10^{-12} cm, podczas gdy średnica atomu wynosi 10^{-8} cm, a więc jest około dziesięciu tysięcy razy większa. Doświadczenia te wykazały również, iż nawet na tak małych odległościach jak 10^{-12} cm od jądra siły pola elektrycznego podlegają prawu Coulomba. Cząstka alfa odpychana przez dodatnio naładowane jądro zakreśla hiperbolę o większym lub mniejszym mimośrodzie. Rutherford wyprowadził wzór, który daje kąt odchylenia toru cząstki alfa od pierwotnego kierunku przy bliskim zetknięciu się z jądrem.



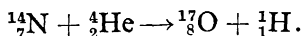
Rys. 27.12. Rozpraszanie cząstek alfa



Rys. 27. 13. Aparatura Rutherforda, za pomocą której obserwował on po raz pierwszy sztuczną dezintegrację atomów azotu

27.5. Sztuczna dezintegracja pierwiastków. Budowa jądra. Przenikanie cząstek alfa do wnętrza jąder atomów obserwował Rutherford w r. 1919 przy bombardowaniu atomów azotu cząstkami alfa. Jego aparatura była nadzwyczaj prosta. Źródło promieni alfa *A* umieszczone było w puszce, w jednej ze ścianek której znajdowała się folia *F* przez którą cząstki łatwo mogły przenikać (rys. 27.13). Po przejściu przez folię cząstki alfa padały na ekran pokryty siarczkiem cynku. Puszka była napełniona suchym tlenem. Między

źródłem promieni alfa i ekranem pokrytym siarczkiem cynku umieszczono dodatkową folię, zatrzymującą wszystkie cząstki alfa. Wobec tego żadna cząstka alfa nie dosięgała ekranu. Lecz gdy z puszki usunięto tlen i wypełniono ją azotem, natychmiast pojawiły się scyntylacje. Fakt ten tłumaczyło jedyne możliwe założenie, że cząstki alfa działające na jądra azotu wywoływały reakcje jądrowe, w których wytwarzały się cząstki przenikliwsze od cząstek alfa. Metodą odchylenia w polu magnetycznym Rutherford stwierdził, że wylatujące cząstki są protonami. Reakcja jądrowa, jaka przy tym zachodzi, jest następująca:



$$^{14}_{7}N + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{17}_{8}O + ^{1}_{1}H.$$

Zatem jądro azotu chwyta cząstkę alfa, a wyrzuca proton zamieniając się na jądro tlenu.

Już w r. 1920 Rutherford przepowiedział możliwość istnienia cząstki ciężkiej, nie mającej żadnego ładunku. Istotnie, w r. 1932 Chadwick, badając już poprzednio odkryte przenikliwe promieniowanie wysyłane przez beryl bombardowany promieniami alfa, doszedł do wniosku, że to promieniowanie jest strumieniem cząstek o masie 1 i ładunku 0, cząstek nazwanych neutronami. Ponieważ cząstki te nie mają ładunku, przenikają z łatwością przez ciała materialne w szczególności ciała o ciężkich atomach. Natomiast przy zderzeniu z bardzo lekkimi atomami oddają im część swego pędu, szybko tracąc prędkość. Przy zderzeniach z drobinami zawierającymi atomy wodoru wyrzucają z nich protony. Reakcja, o której poprzednio mówiliśmy, prowadząca do wyrzucania neutronów z jąder berylu, jest następująca:

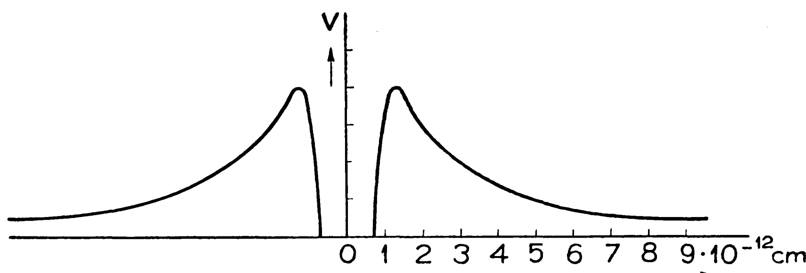


$$^{9}_{4}Be + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{12}_{6}C + ^{1}_{0}n,$$

gdzie n jest symbolem neutronu.

Aby zrozumieć zjawiska promieniotwórczości oraz sztucznej dezintegracji atomów, trzeba przede wszystkim zdać sobie sprawę, jakie siły działają między cząstkami tworzącymi jądra atomów. Od r. 1920 za Rutherfordem przypuszczano, że jądra są zbudowane z protonów i elektronów. Jednakże trudności, jakie napotkała teoria budowy takiego jądra, były nie do pokonania. Po odkryciu neutronu przyjęto pogląd Heisenberga i Iwanienki, że jądra są zbudowane z protonów i neutronów. Skoro w jądrze cząstki te, nazwane ogólnie nukleonami, trzymają się, i to bardzo silnie, najwidoczniej działają między nimi siły przyciągające mające na tych tak bliskich odległościach znaczną przewagę nad siłami elektrostatycznego odpychania, jakie muszą wywierać nawzajem jedne na drugie protony zgrupowane w jądrze. Jednakże siły pochodzenia elektrycznego sięgają na znacznie większe odległości malejąc zgodnie z prawem Coulomba proporcjonalnie do kwadratu odległości. Siły jądrowe zaś zanikają w odległościach większych od 10^{-13} cm. Zatem potencjał sił jądrowych i elektrostatycznych przedstawia się w sposób wskazany na rys. 27. 14. Jądro jest otoczone jakby wałem potencjału, wewnątrz którego znajduje się krater o bardzo stromych ścianach. Wewnątrz krateru znajdują się protony i neutrony tworzące jądro

atomu. Nachylenie wału potencjału daje kierunek i wielkość sił działających na nukleony. Zatem wewnątrz krateru działają bardzo wielkie siły skierowane do wewnątrz. Nukleony znajdujące się wewnątrz nie mogą się stamtąd wydostać. Cząstki te jednak nie są tam nieruchome. Poruszają się one podobnie jak drobiny



Rys. 27. 14. Potencjał sił jądrowych

gazu w zamkniętym naczyniu. Mają więc znaczną energię kinetyczną. Protony odpychające się dzięki posiadanym ładunkom mają również dużą energię potencjalną. Energia cząstek w jądrze jest szczególnie duża w jądrach pierwiastków stojących przy końcu układu periodycznego. Energia ich jednak nie wystarcza, aby się mogły przedostać przez wał potencjału. W przeciwnym razie bowiem jądro rozpadłoby się natychmiast. Mechanika kwantowa, traktująca cząstki jako układ fal, pozwala wyliczyć, że istnieje skończone prawdopodobieństwo, iż cząstka alfa składająca się z dwóch protonów i dwóch neutronów znajdzie się na zewnątrz wału potencjału. Nazywają to często poglądowo efektem tunelowym. Jak gdyby cząstka alfa przedostawała się na zewnątrz przez tunel w wale potencjału. Po przedostaniu się przez wał potencjału cząstka alfa rozpędzona przez potężne siły elektrostatycznego odpychania wylatuje z ogromną energią. Tak tłumaczy się promieniowanie naturalne alfa. Trudniej jest wytłumaczyć promieniowanie beta. Jak mówiliśmy, promieniowanie beta polega na wyrzucaniu z jądra elektronów z wielką prędkością. Lecz jak mogą one wylatywać stamtąd, skoro ich tam nie ma? Tłumaczymy ten fakt tym, że neutron w jądrze może zamieniać się na proton o ładunku dodatnim wyrzucając elektron o takim samym ładunku ujemnym. Zagadkowym zjawiskiem jest fakt, że promienie beta mają różne prędkości, a wskutek tego i różne zasięgi. Aby to wytłumaczyć, przyjmuje się, że jednocześnie z elektronem wyrzucane jest neutrino, cząstka o masie jeszcze mniejszej niż elektron i o ładunku zero. Istnienie neutrina zdają się potwierdzać ostatnio wykonane doświadczenia.

Sztuczne przetwarzanie pierwiastków, co po raz pierwszy udało się osiągnąć Rutherfordowi, polega na tym, że biegnąca z bardzo wielką energią cząstka alfa, gdy przypadkowo dobrze trafi w jądro, przedostaje się przez wał potencjału. Przyciągana potężnymi siłami jądrowymi uzyskuje wielką energię kinetyczną. Energia ta udziela się innym nukleonom znajdującym się w jądrze. Jeden z nich

o przypadkowo większej energii wydostaje się z jądra. Na tym polegają reakcje jądrowe.

Wkrótce po odkryciu sztucznego przetwarzania azotu w tlen, Rutherford i Chadwick zdołali osiągnąć transmutację jeszcze innych pięciu pierwiastków.

27. 6. Promienie gamma. Promienie gamma, jak już o tym mówiliśmy, nie ulegają odchyleniu ani w polu elektrycznym, ani magnetycznym. Dokładne badanie ich własności wykazało, że są to fale elektromagnetyczne bardzo krótkie o własnościach takich samych jak promienie Röntgena. Ponieważ ich długość fali jest mniejsza od długości fali promieni rentgenowskich średniej twardości, zatem fotony promieni gamma mają większą energię od tych ostatnich. Jeżeli jako przykład weźmiemy promienie rentgenowskie wytwarzane przy napięciu 100 kV , zatem o maksymalnej energii fotonów 100 000 eV, to fotony gamma mają przeciętnie energię wynoszącą kilkaset tysięcy eV, aż do kilkunastu MeV. (Obecnie za pomocą tzw. betatronu można otrzymać promienie rentgenowskie o znacznie jeszcze większej energii przewyższającej 100 MeV). Widmo promieni gamma jest liniowe, podobne pod tym względem do widm promieni rentgenowskich charakterystycznych. Najmiększe z tych promieni dadzą się badać za pomocą spektrometru z kryształem używanego do badania promieni Röntgena. Najkrótsza fala, która dała się jeszcze zmierzyć spektrometrem z kryształem, ma długość około 0,009 Å, co odpowiada energii fotonu 1,3 MeV.

Bardzo twarde promienie gamma można badać drogą pomiaru prędkości fotoelektronów wyrzucanych przez naświetlane promieniami gamma ciała. Emitowany przez atom, który pochłonął foton gamma, fotoelektron nabywa energii kinetycznej E_k według prawa Einsteina

$$E_k = h\nu - W,$$

gdzie W jest pracą potrzebną do wyrwania elektronu z danej warstwy elektronowej. Pomiar krzywizny toru fotoelektronu w polu magnetycznym pozwala znaleźć jego prędkość i energię kinetyczną określoną w tym przypadku wzorem relatywistycznym ze względu na wielką prędkość:

$$E_k = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right].$$

Znając energię E_k i pracę W można określić energię fotonu $h\nu$ i jego długość fali $\lambda = \frac{c}{\nu}$.

Podobnie jak wysyłanie promieni charakterystycznych rentgenowskich przypisujemy nagłym zmianom energii atomów (wskutek przeskoków elektronów), tak samo wysyłanie promieni gamma tłumaczymy zmianami stanu energetycznego jądra. Często przy przemianie alfa lub beta nowopowstałe jądro posiada nadmiar energii wobec swego normalnego stanu, znajduje się zatem w stanie

wzbudzonym. Przy przejściu od stanu wzbudzonego o energii E_1 do stanu normalnego o mniejszej energii E_2 wysyłany jest foton o częstości ν określonej, jak zawsze, równaniem

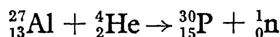
$$h\nu = E_1 - E_2.$$

Ostatnio zaobserwowano również i słabe promieniowanie hamowania (o widmie ciągłym) wysyłane przy przyśpieszeniu wyrzucanych cząstek beta.

27. 7. Sztuczna promieniotwórczość. Jak już poprzednio o tym mówiliśmy, przy bombardowaniu cząstkami alfa atomów z jąder atomowych niektórych pierwiastków wylatują protony, a z niektórych neutrony. Przy naturalnej promieniotwórczości stwierdzone zostało wyrzucanie z jąder cząstek alfa oraz elektronów.

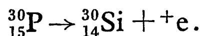
Lecz niespodziewanie w roku 1932 została odkryta przez Andersona nowa cząstka w promieniach kosmicznych. Promienie kosmiczne, o których później będziemy mówić, u granic atmosfery składają się przeważnie z protonów o wielkiej energii. W atmosferze doznają rozmaitych przemian. Między innymi wyrzucają po drodze elektrony, które biegną również z wielkimi prędkościami w dół. Badając ich tory w komorze Wilson Anderson stwierdził po raz pierwszy za pomocą odchylenia w polu magnetycznym istnienie dodatnich elektronów, które obecnie nazywamy pozytonami. Następnie Blackett i Occhialini (czyt. Bleket i Okkialini) również stwierdzili na zdjęciach z komory Wilsona w tak zwanych pękach promieni kosmicznych obecność elektronów tak ujemnych, jak i dodatnich.

W roku 1933 Irena Curie i jej mąż Fryderyk Joliot (czyt. Żolio) stwierdzili, że przy bombardowaniu glinu cząstkami alfa wyrzucanymi przez polon wylatują z atomów bombardowanego pierwiastka nie tylko neutrony, lecz również i pozytony. Liczba wyrzucanych pozytonów jest stosunkowo znaczna. To samo zjawisko zaobserwowali przy ostrzeliwaniu cząstkami alfa berylu i boru. W styczniu 1934 roku małżonkowie Joliot stwierdzili fakt nieoczekiwany. Gdy mianowicie usunęli po ostrzeliwaniu glinu preparat polonu, okazało się, że glin w dalszym ciągu wyrzucał pozytony. Po upływie $2^1/_2$ minut liczba pozytonów zmniejszała się do połowy, po upływie dalszych $2^1/_2$ minut do jednej czwartej itd. według prawa zanikania promieniotwórczości. Wyprowadzili stąd wniosek, że cząstka alfa wywołuje następującą reakcję:



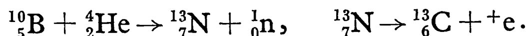
$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{30}_{15}\mathrm{P} + ^{1}_{0}\mathrm{n}$$

i że powstający izotop fosforu $^{30}_{15}\mathrm{P}$ jest pierwiastkiem promieniotwórczym, którego jądro wyrzuca pozyton, a samo przechodzi w jądro krzemu:



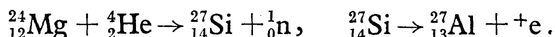
$$^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow ^{30}_{14}\mathrm{Si} + {}^{+}\mathrm{e}.$$

To samo zjawisko zaobserwowali przy innych pierwiastkach. Poniższe wzory wyjaśniają otrzymane reakcje



$$^{10}_{5}\mathrm{B} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{13}_{7}\mathrm{N} + ^{1}_{0}\mathrm{n}, \qquad ^{13}_{7}\mathrm{N} \rightarrow ^{13}_{6}\mathrm{C} + {}^{+}\mathrm{e}.$$

W ten sposób otrzymali azot promieniotwórczy o czasie połowicznego zaniku 9,9 minuty. Podobnie

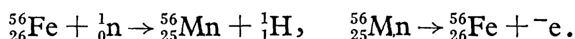


$$^{24}_{12}Mg + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{27}_{14}Si + ^{1}_{0}n, \quad ^{27}_{14}Si \rightarrow ^{27}_{13}Al + {}^{+}e.$$

Krzem promieniotwórczy ma czas połowicznego zaniku 4,9 sec.

Ilości wytworzonych w ten sposób nowych pierwiastków promieniotwórczych są nadzwyczaj małe. Według przybliżonej oceny Joliota liczba atomów wytworzonego pierwiastka promieniotwórczego mogła wynosić co najwyżej 10 000. Taka liczba atomów np. azotu ważyłaby $2 \cdot 10^{-19}$ g, ilość, której drogą chemiczną wykryć niepodobna. Mimo to Joliot zdecydował się zastosować metodę chemiczną, aby się przekonać na pewno o naturze otrzymanych pierwiastków. Myśl była następująca: ponieważ należało przypuszczać, że przy ostrzeliwaniu boru cząstkami alfa wytwarza się azot promieniotwórczy, zatem po potraktowaniu go odczynnikiem pozwalającym oddzielić azot od boru tylko otrzymany związek azotu powinien wykazywać promieniotwórczość. A więc Joliot po ostrzeliwaniu promieniami alfa związku BN rozpuszczał go w ługu sodowym. Po ogrzaniu wytwarzał się amoniak NH_3 oraz kwas borowy H_3BO_3. Kwas borowy promieniotwórczości nie wykazywał. Promieniotwórczy był tylko amoniak.

W roku 1934 Fermi odkrył inny sposób wytwarzania pierwiastków promieniotwórczych, mianowicie przez ostrzeliwanie pierwiastków neutronami. Neutrony, które nie mają ładunku elektrycznego, nie są odpychane przez jądra i dzięki temu z łatwością dostają się do ich wnętrza. Przykładem takiej reakcji jest



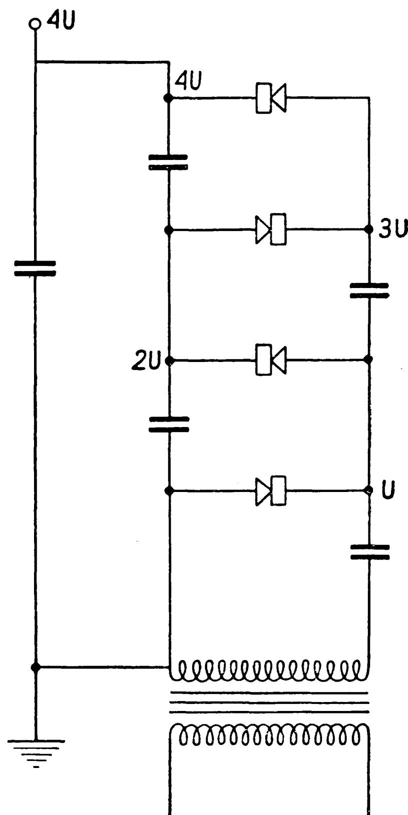
$$^{56}_{26}Fe + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{56}_{25}Mn + ^{1}_{1}H, \quad ^{56}_{25}Mn \rightarrow ^{56}_{26}Fe + {}^{-}e.$$

Zatem przy ostrzeliwaniu żelaza neutronami wytwarza się mangan promieniotwórczy o półokresie 2,59 godzin.

Fermi również stosował oddzielanie drogą chemiczną nowopowstałych pierwiastków promieniotwórczych od pierwiastków, z których one powstały.

Szczególnie skuteczne okazały się neutrony powolne, które można wytworzyć przepuszczając szybkie neutrony przez warstwę substancji zawierającej wiele atomów wodoru, jak np. wodę, parafinę. Neutrony doznając zderzeń sprężystych z atomami wodoru, z którymi mają prawie jednakową masę, oddają im przy zderzeniach znaczną część swego pędu. Protony przy takich zderzeniach zostają odrzucane, ale neutrony po kilkunastu zderzeniach tracą swoją prędkość prawie całkowicie. Neutrony powolne znalazłszy się w pobliżu jądra są przyciągane przez to jądro i z łatwością zostają schwytane. Wskutek działania na bliskich odległościach potężnych sił jądrowych nabywają przy swym wtargnięciu do jądra dużej energii kinetycznej, którą oddają cząstkom znajdującym się w jądrze. Z jądra może wtedy „wyparować" jakaś cząstka, która uzyska dużą energię. Może się przy tym wtargnięciu neutronu wytworzyć również jądro niestałe, które następnie rozpada się promieniotwórczo.

27. 8. Środki sztucznej dezintegracji jąder. Ani cząstki alfa, ani neutrony wydzielające się przy bombardowaniu pierwiastków cząstkami alfa nie okazały się bardzo skutecznym środkiem do wywoływania przemian pierwiastków. Nie możemy skierowywać strumienia cząstek alfa ani celować w jądra. Zatem wysyła się je niejako na chybil-trafił i tylko jedna na milion cząstek przypadkowo trafia akurat w jądro i dostaje się do jego wnętrza. Ponieważ liczba cząstek alfa wysyłanych nawet przez silnie promieniotwórcze pierwiastki jest stosunkowo nieduża zaczęto myśleć o sztucznym rozpędzaniu cząstek, którymi można byłoby bombardować rozmaite pierwiastki. Oczywiście, aby mieć szanse, iż rozpędzona cząstka przedostanie się przez wał potencjału do wnętrza jądra, trzeba móc doprowadzić cząstki do wielkich prędkości, tak aby ich energia kinetyczna była rzędu przynajmniej miliona elektronowoltów. Nauczono się to robić rozmaitymi sposobami. Pierwsze doświadczenia były wykonywane za pomocą wysokich napięć, które mogły rozpędzać jony do wielkich prędkości i wytwarzać promienie kanalikowe o wielkiej energii. Następnie wynaleziono i inne sposoby stopniowego rozpędzania cząstek niosących ładunki.



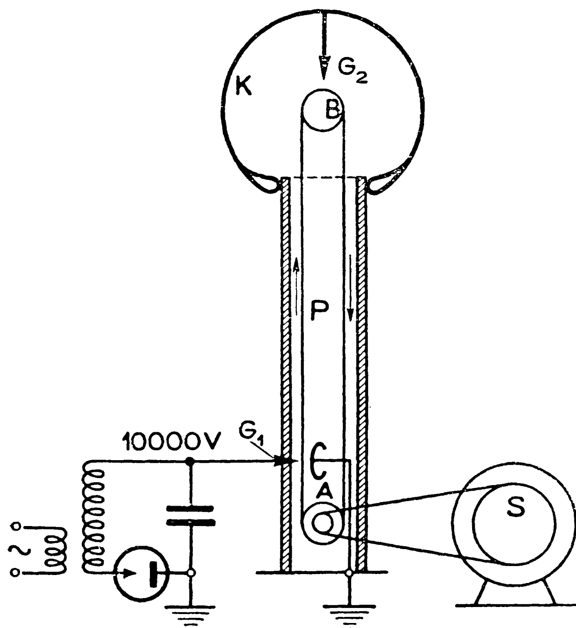
Rys. 27. 15. Uwielokrotnienie napięcia dawanego przez transformator

a. Źródła wysokich napięć. Jednym z najprostszych sposobów uzyskiwania wysokich napięć jest transformowanie prądu zmiennego o niskim napięciu na prąd zmienny o napięciu wysokim. Jak wiadomo z teorii transformatora, napięcia na końcówkach pierwotnego i wtórnego uzwojenia transformatora są proporcjonalne do liczby ich zwojów. Pewną trudność stanowi tu dostateczne izolowanie zwojów, między którymi powstają wysokie napięcia, i zapobiegnięcie iskrzeniu wewnątrz transformatora. Aby uzyskać następnie napięcie stałe, używa się do wyprostowania prądu zmiennego kenotronów, czyli lamp prostowniczych o dobrze izolowanych elektrodach wytrzymujących wysokie, do nich przyłożone napięcia.

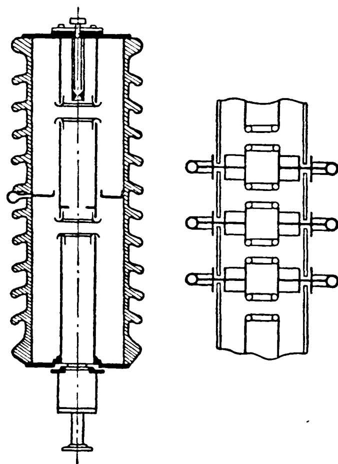
Rysunek 27. 15 przedstawia urządzenie, stosowane przez Cockcrofta i Waltona (czyt. Kokrofta i Uoltona), które za pomocą transformatora o napięciu szczytowym U pozwala uzyskać napięcie nU, jeżeli połączymy w szereg n kon-

densatorów oraz *n* prostowników. Pierwszy kondensator musi wytrzymywać napięcie U, a następne, jak również prostowniki, muszą wytrzymywać napięcie $2U$.

Rysunek 27. 16 przedstawia generator elektrostatyczny van de Graaffa, za pomocą którego można uzyskiwać bardzo wysokie napięcia. Zasada jego jest bardzo prosta. Pas bez końca P z dobrego izolatora przerzucony przez dwa wały A i B napędzany silnikiem elektrycznym S porusza się bardzo szybko. Za pomocą grzebienia z ostrymi końcami G_1 ładuje się jego powierzchnię do napięcia od 10 000 do 20 000 woltów. Napięcie jest dostarczone z małego generatora. Pas wchodzi do wnętrza wielkiej, pustej w środku kuli metalowej K. Grzebień G_2 połączony z metalową osłoną odbiera z pasa ładunki, które przenoszą się na zewnętrzną powierzchnię kuli K.



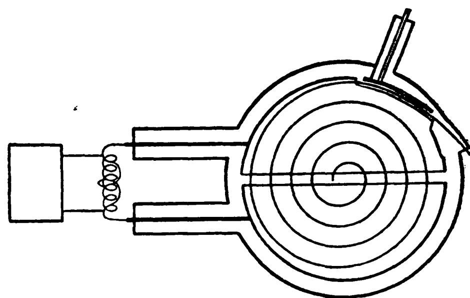
Rys. 27. 16. Generator van de Graaffa


Rys. 27. 17. Akcelerator liniowy

b. Akceleratory. Tak nazywamy przyrządy służące do rozpędzania jonów, od słowa łacińskiego *acceleratio*, co oznacza po polsku przyśpieszenie. Są one rozmaitych rodzajów. Do najwcześniejszych należą różne rodzaje rur próżniowych, będące modyfikacją rur używanych do wytwarzania promieni kanalikowych. Z powodu bardzo wysokich napięć używanych do takich rur, rozmiary ich muszą być odpowiednie. Również i materiałem najczęściej jest nie szkło, tylko porcelana. Rura porcelanowa ma często średnicę kilkudziesięciu centymetrów, a długość przewyższająca 1 metr (rys. 27. 17). Do wytwarzania

pola zwykle nie używa się dwóch elektrod, jak do promieni kanalikowych, tylko kilku, między którymi wytwarza się różnice potencjałów pośrednie w stosunku do maksymalnej różnicy potencjałów przyłożonych do skrajnych elektrod. W ten sposób jony doznają kilkakrotnego przyśpieszenia, a jednocześnie pola między poszczególnymi elektrodami działają jak soczewki elektrostatyczne, koncentrując strumień jonów. Zwykle wewnątrz pierwszej anody wytwarza się przez wyładowanie w gazie pod znaczniejszym ciśnieniem (parę setnych mmHg) jony, które następnie wypuszcza się do pozostałej części rury, w której wytwarza się jak najlepszą próżnię za pomocą potężnych pomp dyfuzyjnych. Jako pociski służą rozpędzane protony, czyli jony wodoru, deuterony, wreszcie jony helu. Na końcu rury umieszcza się cel, zwany zwykle tarczą, z materiału, który chcemy bombardować jonami. Cząstki wylatujące z bombardowanych atomów obserwuje się za pomocą któregokolwiek z poprzednio opisanych urządzeń, a więc za pomocą komory Wilsona, komory jonizacyjnej, liczników Geigera itd.

c. Cyklotron. W zupełnie inny i bardzo pomysłowy sposób rozwiązał zagadnienie rozpędzania jonów Lawrence (czyt. Lorens). Wpadł on mianowicie na pomysł, aby przyśpieszać jony bardzo silnym polem elektrycznym zmiennym, rozpędzać je stopniowo kolejnymi jakby pchnięciami. Umieścił on swój akcelerator między biegunami silnego elektromagnesu, gdyż wtedy rozpędzone jony muszą się poruszać po orbitach kołowych. Sam akcelerator składa się z dwóch połówek jak gdyby płaskiej puszki metalowej, zwanych duantami, przedzielonych izolatorem (rys. 27.18). W puszce utrzymywana jest próżnia, w środku natomiast znajduje się źródło jonów. Między duantami wytwarza się napięcie wysokości kilkudziesięciu tysięcy woltów — zmienne, zmieniające się z taką częstotliwością, aby obiegający w koło jon rozpędzany był stale przez siły pola elektrycznego między duantami.



Rys. 27. 18. Duanty cyklotronu

Przypuśćmy, że jon o ładunku $+e$ znajduje się między duantami blisko ich środka. W polu elektrycznym między duantami jon nabywa pewnej prędkości v. Następnie wpada do wnętrza duantu, gdzie pola elektrycznego nie ma, porusza się więc ze stałą prędkością v. Ponieważ wewnątrz istnieje pole magnetyczne o liniach prostopadłych do jego prędkości, jon porusza się po okręgu. Czas potrzebny do przebycia półkola jest

$$t = \frac{\pi\varrho}{v}, \tag{27.12}$$

gdzie ϱ jest promieniem koła zataczanego przez jon. W polu magnetycznym działa na jon siła dośrodkowa

$$\frac{mv^2}{\varrho} = evH, \tag{27.13}$$

gdzie m oznacza masę jonu, e — ładunek, H — natężenie pola magnetycznego, wszystko w jednostkach tego samego układu. Z równań (27.12) i (27.13) otrzymujemy

$$t = \frac{\pi}{H \frac{e}{m}}. \tag{27.14}$$

Jak widać, czas ten nie zależy od prędkości jonu. Przebiegłszy półkole w duancie jon wpada znowu do przestrzeni między duantami. Lecz tymczasem napięcie między duantami zmienia się na przeciwne. Jon uzyskuje nowe przyśpieszenie. Ponieważ czas przebiegu w duancie nie zależy od promienia półkola opisywanego przez jon, więc można przyrząd wytwarzający napięcie między duantami, którym jest generator lampowy wytwarzający napięcia szybkozmienne, zsynchronizować z czasem obiegu jonu po okręgu. Jeżeli maksymalne napięcie wytwarzane między duantami jest U_1, to po n pełnych obrotach jon nabędzie energii kinetycznej odpowiadającej napięciu

$$U = 2nU_1.$$

Okres drgania generatora musi się równać czasowi jednego całkowitego obiegu jonu, a więc

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{H \frac{e}{m}}. \tag{27.15}$$

Stąd można obliczyć częstotliwość generatora

$$f = \frac{e}{m} \frac{H}{2\pi}, \tag{27.16}$$

która, jak wskazuje ten wzór, musi być dobrana do natężenia pola magnetycznego H. Ponieważ dla protonu

$$\frac{e}{m} = 9{,}576 \cdot 10^3 \frac{\text{j. EM}}{\text{g}},$$

zatem dla pola magnetycznego 10 000 Oe na częstotliwość otrzymamy

$$f = \frac{9{,}576 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{2\pi} = 1{,}524 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1}.$$

Generator musi więc dawać prąd zmienny o częstotliwości około 15 megaherców, czyli długość fali

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}}{15 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}} = 20 \text{ m}.$$

Za każdym półobiegiem jon zyskuje na prędkości i opisuje półkole nieco większe o promieniu

$$\varrho = \frac{mv}{eH}, \tag{27.17}$$

a więc proporcjonalnym do prędkości.

Obliczmy dla przykładu prędkość protonu na torze odległym od środka o 50 cm. Z równania (27.17) możemy obliczyć prędkość jonu

$$v = \frac{e}{m} H\varrho = 9{,}576 \cdot 10^3 \cdot 10\,000 \cdot 50 \approx 4{,}8 \cdot 10^9 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Prędkość ta odpowiada przyśpieszającemu napięciu obliczonemu z równania

$$eU = \frac{mv^2}{2}. \tag{27.18}$$

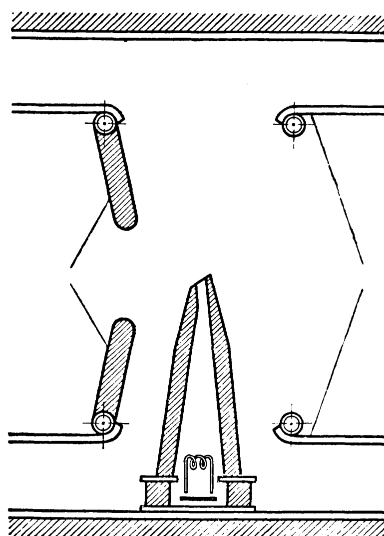
A więc napięcie równoważne będzie

$$U = \frac{v^2}{2\frac{e}{m}} = \frac{(4{,}8)^2 \cdot 10^{18}}{2 \cdot 9{,}576 \cdot 10^3} \text{ j. EM} \approx 1{,}2 \cdot 10^{15} \text{ j. EM} = 12 \cdot 10^6 \text{ V}.$$

Nabyta przez protony prędkość odpowiada napięciu przyśpieszającemu dwanaście milionów woltów. Dla jąder helu stosunek $\frac{e}{m}$ jest dwa razy mniejszy, żeby więc otrzymać taki sam czas obiegu, trzeba by użyć pola o natężeniu H dwa razy większym. Energia jąder helu z powodu cztery razy większej masy będzie cztery razy większa niż protonów.

Ważną jest rzeczą, aby wiązka jonów poruszała się w centralnej płaszczyźnie pośrodku duantów i żeby nie była rozbieżna. W tym celu wiązka jest ogniskowana przez pole elektryczne między duantami oraz pole magnetyczne, którego linie przy zbliżaniu się do jego peryferii są wygięte tak, że siły działają na rozpędzone jony skupiając je w centralnej płaszczyźnie.

Źródłem jonów jest zwykle łuk elektryczny palący się w gazie pod ciśnieniem koło 10^{-2} mmHg między wolframową rozżarzoną katodą i otaczającą ją anodą (rys. 27.19) zwężającą się stożkowo. Wydobywające się z otworka w stożku jony porywane są przez pole elektryczne między duantami. Z przestrzeni wewnątrz duantów gaz musi być wypompowywany z wielką szybkością, aby ciśnienie było rzędu 10^{-5} mmHg, co jest konieczne ze względu na bardzo długą drogę, jaką jon ma do przebycia. Przy końcu



Rys. 27.19. Źródło jonów w cyklotronie

drogi jonów dodatkowe pole elektryczne odchyla jony z drogi kołowej. Odchylone jony wychodzą przez cienkie okienko na zewnątrz. Poza okienkiem umieszcza się substancję, która ma być bombardowana.

Przy dużej średnicy biegunów elektromagnesu jony nabywają tak wielkiej prędkości, iż masa ich zaczyna widocznie wzrastać, wskutek czego zaczynają się opóźniać względem pola. Jeżeli się chce uzyskać jeszcze większe prędkości trzeba zastosować stopniowe zmniejszanie częstości drgań generatora wytwarzającego napięcie między duantami, tak aby w dalszym ciągu utrzymany był rezonans między krążącymi jonami i polem. W ten sposób drogą modyfikacji cyklotronu nazywanego synchrocyklotronem udało się już przed kilku laty otrzymać w Berkeley w Kalifornii protony o energii 100 MeV, deuterony o energii 200 MeV i jony helu, czyli cząstki alfa o energii 400 MeV.

Synchroniczność między obiegiem jonów i polem przyśpieszającym można także uzyskać drogą stopniowego zwiększania pola magnetycznego· Ciągłe ulepszanie tego przyrządu pozwala uzyskiwać coraz większe energie rozpędzanych jonów. Za pomocą akceleratora zbudowanego w Dubnej, niedaleko Moskwy, osiągnięto już energię rzędu 10^{10} eV.

27. 9. Reakcje jądrowe wywoływane sztucznie rozpędzanymi cząstkami. Z inicjatywy Rutherforda zaczęto w laboratorium Cavendisha (czyt. Kawendisza) w Cambridge budować generator wysokiego napięcia, który miał służyć do rozpędzania jonów. Gdy zbudowanie aparatury przeciągało się, Rutherford poddał swym współpracownikom—Cockcroftowi i Waltonowi—myśl, aby nie czekając na osiągnięcie projektowanego napięcia zrobili próbę z niższym napięciem. Próba została wykonana i okazało się, że Cockcroft i Walton istotnie otrzymali dezintegrację atomów litu przy bombardowaniu ich protonami o energii 150 000 eV, mimo, iż wał potencjału posiada większą wysokość. Tłumaczy to mechanika kwantowa, według której cząstka o energii kinetycznej zbyt małej, aby przejść, przez wał potencjału, ma jednak skończone prawdopodobieństwo znalezienia się po drugiej stronie wału (efekt tunelowy), a więc w jądrze.

Jako pociski w bardzo licznych wykonanych następnie doświadczeniach służyły protony, deuterony, jądra helu identyczne z cząstkami alfa, wreszcie neutrony wydzielające się jako wtórne cząstki z jąder bombardowanych innymi cząstkami. Aby dobrze zrozumieć procesy, które przy tym zachodzą, trzeba przede wszystkim zrozumieć, jakie siły działają między cząstkami, z których składa się jądro, z jaką energią związane są cząstki w jądrze, oraz jakie przemiany energetyczne zachodzą przy reakcjach jądrowych.

Jak już o tym mówiliśmy, cegiełkami, z których zbudowane są wszystkie jądra, są protony i neutrony. Proton i neutron można uważać za dwa stany kwantowe nukleonu. Proton może ię zamienić w neutron wyrzucając pozyton, neutron może zamienić się w proton wyrzucając negaton (elektron ujemny). Najprostsze jądro, mianowicie jądro wodoru $^1_1$H, zawiera tylko jeden proton, wszystkie pozostałe zawierają protony i neutrony, przy czym w miarę rosnącego ciężaru atomo-

wego coraz więcej przeważają neutrony. Najcięższe ze spotykanych w naturze jąder, jądro uranu $^{238}_{92}U$, zawiera 92 protony i 146 neutronów. Liczba protonów nazywa się liczbą atomową Z albo numerem porządkowym*, ponieważ równa się numerowi pierwiastka w tablicy Mendelejewa. Liczba nukleonów nazywa się liczbą masową i oznacza się ją literą A. Jak już wspomniano parę razy, nukleony w jądrze związane są siłami jądrowymi, które działają tylko na odległościach rzędu 10^{-13} cm. Na odległościach rzędu 10^{-12} cm przestają praktycznie biorąc, działać. Gdybyśmy wyobrazili sobie nukleony wchodzące w skład jądra rozsunięte na odległość, na której siły między nimi już nie działają, układ taki posiadałby znacznie większą energię potencjalną. Wyobraźmy sobie teraz, że zbliżamy je do takiej odległości, w której siły jądrowe zaczną działać i złączą je w jedną całość. Energia potencjalna układu znacznie zmaleje. Lecz według równania Einsteina zmniejszenie energii związane jest ze zmniejszeniem się masy:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}.$$

A zatem masa układu powinna się odpowiednio zmniejszyć. Doświadczenie wykazuje, że to istotnie zachodzi. Weźmy jako przykład jedno z najprostszych jąder, jądro deuteru, czyli deuteron, składający się z protonu i neutronu. W jednostkach masy $= \frac{1}{16}$ masy $^{16}_{8}O$:

masa protonu wynosi	. . .	1,007627,
masa neutronu wynosi	. . .	1,009009,
zatem suma mas równa się	. . .	2,016636;
tymczasem masa deuteronu wynosi		2,014159,
zmniejszenie masy wynosi więc	. . .	0,002477.

Ponieważ masa protonu w gramach wyraża się liczbą

$$1{,}6724 \cdot 10^{-24},$$

a więc jednostka masy atomowej będzie wynosić

$$\frac{1{,}6724}{1{,}007627} \cdot 10^{-24}\,\text{g}.$$

Jeżeli przeliczymy ją na energię, to otrzymamy

$$\frac{1{,}6724}{1{,}007627} \cdot 10^{-24} \cdot (2{,}9979 \cdot 10^{10})^2 \text{ ergów} = 931{,}13 \text{ MeV}.$$

* „Numer porządkowy" w literaturze częściej jest nazywany „liczbą atomową". Ze względu jednak na trzy podobne terminy używane w fizyce atomowej, które bardzo łatwo pomylić: „liczba atomowa", „masa atomowa", „liczba masowa" — będziemy w dalszym ciągu używali terminu „numer porządkowy", albo „liczba porządkowa".

Jednostka masy atomowej jest równoważna 931,13 MeV. Teraz już łatwo obliczyć energię wiązania deuteronu. Będzie ona wynosić

$$0{,}002477 \cdot 931{,}13\ \text{MeV} = 2{,}3\ \text{MeV}.$$

Tyleż trzeba by było dostarczyć energii, aby nukleony wchodzące w skład deuteronu rozłączyć na części składowe. Istotnie, doświadczenia wykazały, że fotony gamma o energii przewyższającej 2,3 MeV powodują rozpad deuteronów.

Jako drugi przykład obliczmy energię wiązania nukleonów w jądrze helu $^4_2$He, w skład którego wchodzą dwa protony i dwa neutrony:

masa 2 protonów wynosi	2,015254,
masa 2 neutronów wynosi	2,018018,
Suma mas wynosi	4,033272;
masa jądra helu wynosi	4,00280,
zmniejszenie masy wynosi więc	0,03047.

Zatem energia wiązania = 0,03047·931,13 = 28,37 MeV. Tyleż trzeba by dostarczyć energii, aby jądro helu rozłożyć na części składowe. Jak widać, energia wiązania jest tu bardzo wielka, wynosi 7,1 MeV na jeden nukleon. Tym się tłumaczy, że cząstka alfa przy bombardowaniu jąder nigdy nie rozpada się na części składowe.

Przy wszelkich reakcjach jądrowych zawsze spełniona jest zasada zachowania elektryczności, uogólniona zasada zachowania energii, czyli zasada zachowania energii-masy, zasada zachowania pędu oraz zasada zachowania krętu.

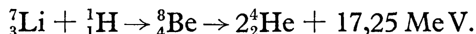
Przy wybranych prostych przykładach będziemy robili użytek tylko z dwóch pierwszych zasad.

Reakcje jądrowe przebiegają albo z pochłonięciem energii, albo z wydzieleniem energii.

Reakcje przyjęto oznaczać dwiema literami oznaczającymi dane cząstki, w nawiasie. Pierwsza litera oznacza cząstkę bombardującą, druga — cząstkę emitowaną. A więc reakcja (p,n) będzie oznaczać reakcję wywołaną za pomocą rozpędzonego protonu, przy której emitowany jest neutron. Cząstki oznaczamy następującymi literami: p — proton, n — neutron, d — deuteron, α — cząstka alfa, γ — foton.

Reakcje wywoływane przez protony:

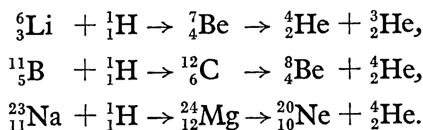
Pierwszą reakcją osiągniętą przez Cockcrofta i Waltona był rozpad atomu litu. Zachodzi on według wzoru



$$^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^8_4\text{Be} \rightarrow 2\,{}^4_2\text{He} + 17{,}25\ \text{MeV}.$$

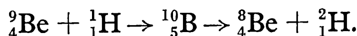
Przy tej reakcji mamy duże wydzielenie energii w ilości 17,25 MeV na atom.

Inne przykłady reakcyj typu (p,α):



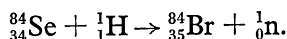
$$^{6}_{3}\mathrm{Li}+{}^{1}_{1}\mathrm{H}\to{}^{7}_{4}\mathrm{Be}\to{}^{4}_{2}\mathrm{He}+{}^{3}_{2}\mathrm{He},$$
$$^{11}_{5}\mathrm{B}+{}^{1}_{1}\mathrm{H}\to{}^{12}_{6}\mathrm{C}\to{}^{8}_{4}\mathrm{Be}+{}^{4}_{2}\mathrm{He},$$
$$^{23}_{11}\mathrm{Na}+{}^{1}_{1}\mathrm{H}\to{}^{24}_{12}\mathrm{Mg}\to{}^{20}_{10}\mathrm{Ne}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Przykład reakcji typu (p, d):



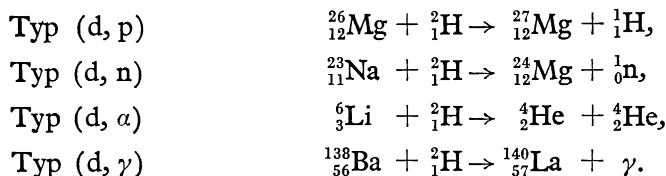
$$^{9}_{4}\mathrm{Be}+{}^{1}_{1}\mathrm{H}\to{}^{10}_{5}\mathrm{B}\to{}^{8}_{4}\mathrm{Be}+{}^{2}_{1}\mathrm{H}.$$

Przykład reakcji typu (p, n):



$$^{84}_{34}\mathrm{Se}+{}^{1}_{1}\mathrm{H}\to{}^{84}_{35}\mathrm{Br}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}.$$

Przykłady reakcji wywoływanych przez deuterony:



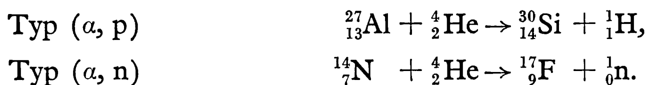
Typ (d, p) $\quad {}^{26}_{12}\mathrm{Mg}+{}^{2}_{1}\mathrm{H}\to{}^{27}_{12}\mathrm{Mg}+{}^{1}_{1}\mathrm{H},$

Typ (d, n) $\quad {}^{23}_{11}\mathrm{Na}+{}^{2}_{1}\mathrm{H}\to{}^{24}_{12}\mathrm{Mg}+{}^{1}_{0}\mathrm{n},$

Typ (d, α) $\quad {}^{6}_{3}\mathrm{Li}+{}^{2}_{1}\mathrm{H}\to{}^{4}_{2}\mathrm{He}+{}^{4}_{2}\mathrm{He},$

Typ (d, γ) $\quad {}^{138}_{56}\mathrm{Ba}+{}^{2}_{1}\mathrm{H}\to{}^{140}_{57}\mathrm{La}+\gamma.$

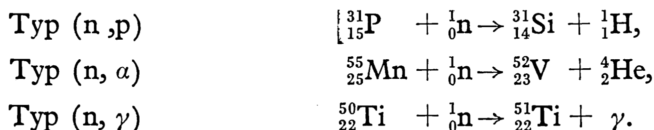
Przykłady reakcji wywoływanych przez cząstki alfa:



Typ (α, p) $\quad {}^{27}_{13}\mathrm{Al}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\to{}^{30}_{14}\mathrm{Si}+{}^{1}_{1}\mathrm{H},$

Typ (α, n) $\quad {}^{14}_{7}\mathrm{N}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\to{}^{17}_{9}\mathrm{F}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}.$

Przykłady reakcji wywoływanych przez neutrony:



Typ (n ,p) $\quad {}^{31}_{15}\mathrm{P}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}\to{}^{31}_{14}\mathrm{Si}+{}^{1}_{1}\mathrm{H},$

Typ (n, α) $\quad {}^{55}_{25}\mathrm{Mn}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}\to{}^{52}_{23}\mathrm{V}+{}^{4}_{2}\mathrm{He},$

Typ (n, γ) $\quad {}^{50}_{22}\mathrm{Ti}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}\to{}^{51}_{22}\mathrm{Ti}+\gamma.$

Obserwowano również bardziej złożone reakcje, jak (n, 2n), (d, n i 2α), (n, 3n). Wśród otrzymanych drogą reakcji jądrowych nowych izotopów rozmaitych pierwiastków wiele jest promieniotwórczych.

27. 10. Wytwarzanie par elektronów przez fotony i zamiana elektronów w fotony. Jak już wspomniano w ust. 27.7, Anderson wykrył cząstkę, której istnienia poprzednio nie podejrzewano, mianowicie elektron dodatni o masie równej masie elektronu ujemnego i o ładunku $+e$, następnie małżonkowie Curie-Joliot stwierdzili, że niektóre sztucznie wytworzone ciała promieniotwórcze emitują dodatnie promienie beta. Przekonano się więc, że niewątpliwie istnieją elektrony tak ujemne, jak i dodatnie. Aby je rozróżnić, nazywamy obecnie elektron dodatni pozytonem, a elektron ujemny — negatonem.

Z badań teoretycznych nad zagadnieniem pozytonu wynikała możliwość, że foton o dostatecznie dużej energii przy współdziałaniu z jądrem może zamienić się w parę: pozyton — negaton. Według zasady równoważności energii i masy

jest to tylko wtedy możliwe, gdy foton posiada co najmniej energię równoważną masie dwóch elektronów. Zważywszy, że masa spoczynkowa elektronu

$$m_0 = 9{,}107 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{g},$$

a prędkość światła

$$c = 2{,}9979 \cdot 10^{10}\,\mathrm{cm/sec},$$

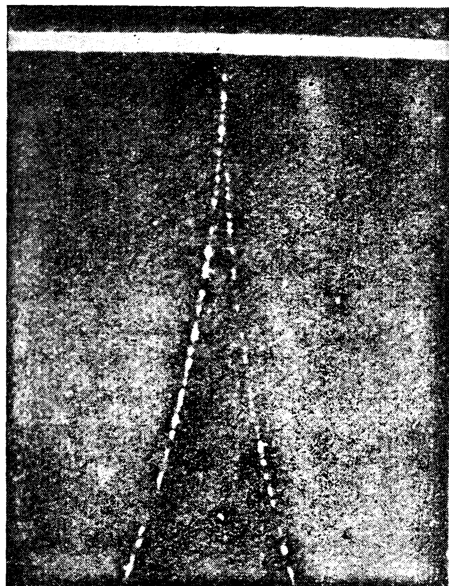
otrzymujemy

$$m_0c^2 = 9{,}107 \cdot 10^{-28} \cdot (2{,}9979)^2 \cdot 10^{20}\,\text{ergów} = 8{,}185 \cdot 10^{-6}\,\text{ergów} \approx 510\,000\,\mathrm{eV}.$$

Na wytworzenie jednego elektronu potrzeba okrągło 510 tysięcy elektronowoltów. Na wytworzenie zatem pary: negaton—pozyton będzie potrzebna energia

$$1{,}02\ \mathrm{MeV}.$$

Aby więc wytworzyć parę elektronów, foton musi mieć energię większą od 1,02 MeV. Ponieważ fotony twardych promieni gamma mają energię znacznie przewyższającą tę liczbę, powinno się dać wykryć powstawanie par przy naświetlaniu ciał promieniami gamma o odpowiedniej energii. Istotnie małżonkom Curie--Joliot udało się stwierdzić za pomocą komory Wilsona umieszczonej w polu magnetycznym, że twarde promienie gamma wytwarzają pary elektronów. Działanie pola magnetycznego zakrzywia ich tory w przeciwne strony (rys. 27.20). Fizyk radziecki Skobielcyn obserwował w komorze Wilsona w polu magnetycznym jednoczesne powstawanie wielu torów zakrzywionych w przeciwne strony.



Rys. 27. 20. Para elektronów wytworzona przez foton o dużej energii w komorze Wilsona w polu magnetycznym

Wytworzone przez fotony o energii większej od 1,02 MeV elektrony uzyskują energię kinetyczną

$$E_k' + E_k'' = h\nu - 2m_0c^2 = \\ = h\nu - 1{,}02 \cdot 10^6\ \mathrm{eV}.$$

Chadwick, Blacket i Occhialini sprawdzili ten związek wytwarzając pary elektronów za pomocą wysyłanych przez ThC″ promieni gamma o energii $2{,}62 \cdot 10^6$ eV. Powstające pary miały energię kinetyczną $1{,}6 \cdot 10^6$ eV.

Powstające w różnych zjawiskach pozytony mają życie bardzo krótkie. Istnieją one tylko tak długo, dopóki biegną. Gdy pozyton zostanie zatrzymany, natychmiast łączy się z negatonem, a masa ich zamienia się na promieniowanie. Zasady zachowania pędu i krętu wymagają, aby para elektronów zamieniająca się na pro-

mieniowanie wytwarzała również parę fotonów rozbiegających się w przeciwnych kierunkach.

27. 11. Betatron. Tak nazwano przyrząd, który przyśpiesza elektrony doprowadzając je do bardzo wielkich prędkości. Przy bombardowaniu tarczy elektronami o tak wielkiej energii wytwarzają się nadzwyczaj twarde promienie rentgenowskie, emitowane są zatem fotony o wielkiej energii, mogące wywoływać różne reakcje jądrowe.

Zasada tego przyrządu jest nadzwyczaj prosta. Opiera się ona na fakcie, że zmianie strumienia indukcji magnetycznej towarzyszy powstanie wirowego pola elektrycznego. Jak już o tym mówiliśmy w I części książki, zmiana strumienia indukcji Φ obejmowanego przez obwód zamknięty z drutu np. wywołuje w nim siłę elektromotoryczną

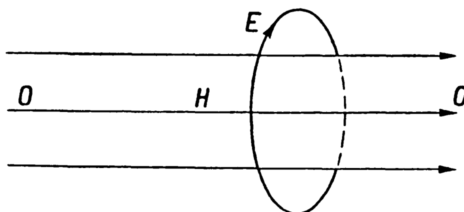
$$E_m = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{27.19}$$

Siła elektromotoryczna E_m równa się stosunkowi pracy wykonanej przez siły pola przy okrążeniu strumienia magnetycznego — do ładunku:

$$E_m = \frac{L}{q} = \frac{\oint qE_s\, ds}{q} = \oint E_s\, ds. \tag{27.20}$$

Siła elektromotoryczna równa się więc całce wziętej wzdłuż obwodu zamkniętego z $E_s\, ds$, gdzie $E_s = E\cos(E, dS)$ jest rzutem natężenia pola elektrycznego E na kierunek przemieszczenia ds. Pole to jest, jak mówimy, wirowe i oprowadzenie ładunku q dookoła zmieniającego się strumienia magnetycznego dostarcza pracę

$$L = q\oint E_s\, ds. \tag{27.21}$$



Rys. 27. 21. Zmieniające się pole magnetyczne i wywoływane przez nie wirowe pole elektryczne

Jeżeli pole magnetyczne jest symetryczne względem osi OO (rys. 27.21), to powstające linie pola elektrycznego są okręgami kół, których środki leżą na osi OO. Na każdym okręgu natężenie pola będzie stałe. Praca wykonana przez siły pola przy okrążeniu strumienia indukcji magnetycznej przez ładunek q będzie wtedy

$$L = q\,2\pi\varrho E = -q\frac{d\Phi}{dt}, \tag{27.22}$$

gdyż w tym wypadku

$$E_m = \oint E_s\, ds = 2\pi\varrho E. \tag{27.23}$$

Jeżeli w tym polu wirowym znajdzie się elektron, to przy jednorazowym okrążeniu okręgu siły pola wykonają pracę

$$L = 2\pi\varrho eE, \tag{27.24}$$

przy n okrążeniach zaś

$$L = 2\pi\varrho neE. \tag{27.25}$$

Praca ta pójdzie na wytworzenie energii kinetycznej elektronu. Jak łatwo obliczyć, uzyskana przez elektron po wielu okrążeniach prędkość może być bardzo duża. Weźmy prosty przykład. Przypuśćmy, że w przeciągu 0,01 sec jednorodne pole magnetyczne wzrasta jednostajnie od zera do 4000 gausów i że elektron krąży po orbicie o średnicy 10 cm. W takim razie strumień indukcji magnetycznej objęty przez orbitę elektronu będzie

$$\Phi = \pi\varrho^2 B \text{ j. EM}$$

(w próżni w układzie EM $\mu = 1$, zatem $B = H$).

A więc siła elektromotoryczna będzie miała wartość:

$$\left| E_m \right| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi\, 25 \cdot 4000}{0{,}01} = 10^7 \pi \text{ j. EM}. \tag{27.26}$$

Z równań (27.23) i (27.26) otrzymamy

$$2\pi\varrho E = 10^7\,\pi,$$

skąd

$$E = \frac{10^7}{2\varrho} = 10^6 \text{ j. EM}.$$

Siła działająca na elektron jest eE. Gdybyśmy założyli, że masa elektronu jest stała, to elektron pod działaniem tej siły uzyskałby przyśpieszenie a określone równaniem

$$ma = eE,$$

skąd otrzymalibyśmy

$$a = \frac{e}{m} E = \frac{e}{m} \cdot 10^6 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Prędkość, jaką elektron uzyskałby po upływie tylko jednej tysiącznej sekundy, byłaby

$$v = at = \frac{e}{m} \cdot 10^3 = 1{,}76 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

$\left(\text{gdyż } \frac{e}{m} = 1{,}76 \cdot 10^7 \text{ j. EM}\right)$. A więc już po upływie 0,001 sec elektron uzyskałby prędkość równą przeszło połowie prędkości światła. To oszacowanie wykazuje, że musimy rachować relatywistycznie.

Jeżeli zastosujemy wzór (23.76) teorii względności

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=eE,$$

to stąd otrzymamy po scałkowaniu

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{e}{m_0}Et, \tag{27.27}$$

skąd łatwo otrzymać wzór na prędkość

$$v=\frac{\frac{e}{m_0}Et}{\sqrt{1+\left(\frac{eE}{m_0 c}\right)^2 t^2}}. \tag{27.28}$$

Po wstawieniu liczb: $\frac{e}{m_0}=1{,}76\cdot10^7$ j. EM, $E=10^6$j. EM, $c=2{,}9979\cdot10^{10}$ cm/sec $t=0{,}01$ sec, otrzymamy

$$v=2{,}955\cdot10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

A więc prędkość, jakiej elektron nabędzie po upływie 0,01 sec, będzie o niecałe 1,5% mniejsza od prędkości światła.

Droga przebyta przez elektron będzie dana przez wzór

$$s=\int_0^t v\,dt=\int\frac{\frac{e}{m_0}Et\,dt}{\sqrt{1+\left(\frac{eE}{m_0 c}\right)^2 t^2}}=\frac{c^2}{\frac{eE}{m_0}}\sqrt{1+\left(\frac{eE}{m_0 c}\right)^2 t^2}. \tag{27.29}$$

Po wstawieniu odpowiednich liczb otrzymamy

$$s=30{,}4\cdot10^7\text{ cm}=3040\text{ km}.$$

Na liczbę okrążeń orbity otrzymamy

$$\frac{30{,}4\cdot10^7}{2\pi\varrho}=\frac{3{,}04\cdot10^8}{10\pi}=9\,680\,000.$$

A więc elektron przebędzie w ciągu 0,01 sec drogę 3040 km okrążając tor 9 milionów 680 tysięcy razy i nabędzie w tym czasie prędkości niemal równej prędkości światła.

Jego energię kinetyczną przy końcu drogi obliczymy z wzoru

$$E_k=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)\text{ ergów}. \tag{27.30}$$

Po wstawieniu liczb i zamianie na elektronowolty otrzymujemy

$$E_k = 2\,000\,000 \text{ eV}.$$

Widać więc, że przy dużym wzroście pola magnetycznego elektron, poruszając się po kołowej orbicie o odpowiednio dobranym promieniu, może nabyć bardzo wielkiej energii.

Trudność techniczną stanowi tu dobranie pola i szybkości wzrostu pola tak, aby elektrony poruszały się po stałych orbitach kołowych. Ponieważ prędkość elektronu wzrasta, pole magnetyczne musi tak wzrastać, aby siła Hev działająca w polu na elektron utrzymywała go na stałej orbicie kołowej, a więc aby stale zachodziła równość

$$Hev = \frac{mv^2}{\varrho}, \tag{27.31}$$

skąd

$$mv = He\varrho. \tag{27.32}$$

Siła styczna do toru działająca na elektron jest, jak wynika z równań (27.19) i (27.23),

$$F = eE = \frac{e}{2\pi\varrho}\,\frac{d\Phi}{dt}. \tag{27.33}$$

Lecz według II zasady Newtona

$$F = \frac{d(mv)}{dt}. \tag{27.34}$$

Podstawiając do tego równania wartość (27. 32) na mv i przyrównując prawe strony równań (27.33) i (27.34) otrzymamy

$$\frac{e}{2\pi\varrho}\,\frac{d\Phi}{dt} = e\varrho\frac{dH}{dt}, \tag{27.35}$$

skąd

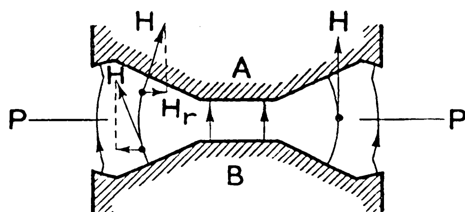
$$d\Phi = 2\pi\varrho^2\,dH. \tag{27.36}$$

Całkując to równanie otrzymamy

$$\Phi = 2\pi\varrho^2 H. \tag{27.37}$$

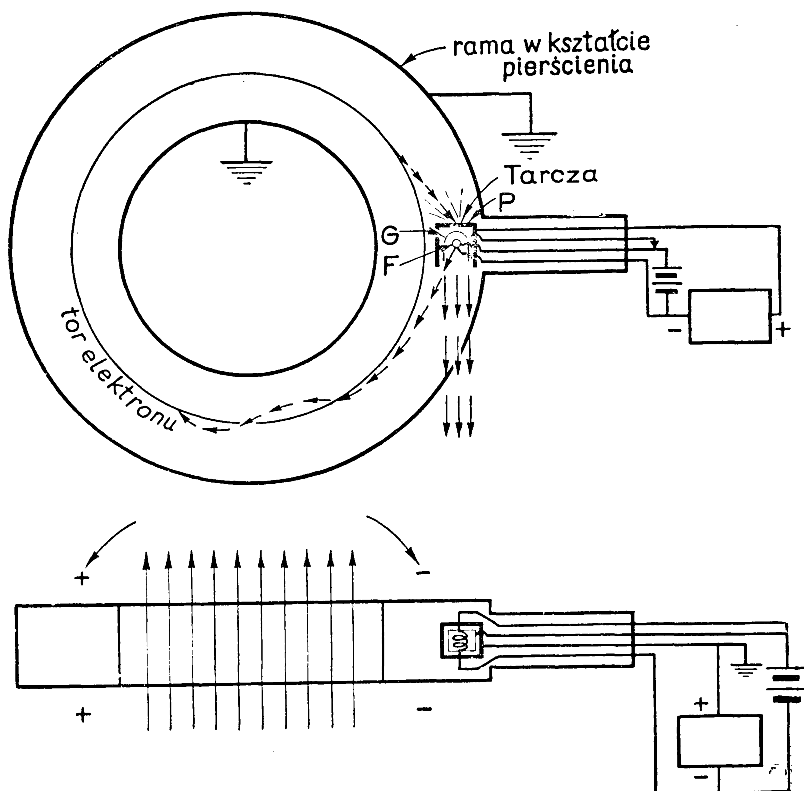
To równanie wskazuje, że natężenie pola magnetycznego H na orbicie musi być proporcjonalne do strumienia indukcji objętego przez orbitę, a następnie, że strumień ten musi być dwa razy większy, niż byłby wtedy, gdyby pole magnetyczne miało wszędzie wewnątrz orbity to samo natężenie jak na orbicie (przy takim samym natężeniu jak na orbicie byłoby $\Phi = \pi\varrho^2 H$). Jest to możliwe do osiągnięcia przez odpowiednie dobranie kształtu nabiegunników elektromagnesu (rys. 27. 22). Można również tak dobrać kształt nabiegunników, aby pole skupiało i ogniskowało elektrony, które by mogły ewentualnie zejść ze stałego toru, po którym powinny

się poruszać. Po próbach i pracy trwającej stosunkowo długo, bo kilkanaście lat, udało się to wszystko osiągnąć i zbudować przyrząd, nazwany betatronem, ze względu na to, że daje on strumień bardzo szybkich elektronów, które dawniej były znane tylko w promieniach beta ciał promieniotwórczych.



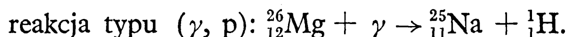
Rys. 27.22. Nabiegunniki elektromagnesu betatronu

Betatron składa się z elektromagnesu zasilanego prądem zmiennym oraz komory kształtu pierścienia, z której wypompowuje się powietrze. Elektrony emitowane z rozżarzonej katody *F* wstrzeliwane do niej za pomocą dodatkowego napięcia między katodą *F* i anodą *P* (rys. 27.23) i rozpędzane przez zmieniające się szybko pole magnetyczne przebywają drogę setek lub tysięcy kilometrów wykonując setki tysięcy albo miliony okrążeń toru i nabywając przy tym ogromnej

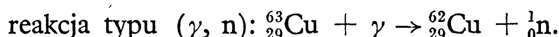


Rys. 27. 23. Schematyczny rysunek betatronu
F — katoda emitująca elektrony, *G* — elektroda koncentrująca elektrony, *P* — anoda służąca jednocześnie za tarczę.

energii kinetycznej. Przy końcu ich biegu dodatkowe pole magnetyczne uzyskane przez wyładowanie kondensatora przez cewkę odchyla elektrony z orbity, wskutek czego trafiają one w anodę P służącą jednocześnie za tarczę. Przy uderzaniu elektronów o przeszkodę powstają promienie X. W ostatnio zbudowanym betatronie udało się osiągnąć energię elektronów ponad 1000 MeV. Powstają wówczas fotony o takiejże maksymalnej energii. Fotony o tak wielkiej energii wywołują najrozmaitsze reakcje jądrowe, których parę przykładów przytoczono poniżej:



reakcja typu (γ, p): ${}^{26}_{12}\mathrm{Mg} + \gamma \rightarrow {}^{25}_{11}\mathrm{Na} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$.



reakcja typu (γ, n): ${}^{63}_{29}\mathrm{Cu} + \gamma \rightarrow {}^{62}_{29}\mathrm{Cu} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$.

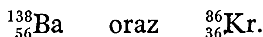
27. 12. Rozszczepienie jąder. Reakcje łańcuchowe. W roku 1939 Hahn (czyt. Haan) i Strassmann wykryli nową reakcję jądrową dotychczas niespotykaną, mianowicie rozpad ciężkich jąder uranu po przyłączeniu neutronu na dwie części niewiele różniące się masami atomowymi. Zjawisko to wykazuje w szczególności izotop uranu ^{235}U zwany aktynouranem. Również stwierdzono podobny rozpad w torze i protaktynie. Przy ich rozpadzie otrzymuje się pierwiastki stojące w pobliżu środka układu periodycznego. Przy rozpadzie uranu np. stwierdzono powstawanie następujących par pierwiastków: selen—cer, brom—lantan, krypton—bar, rubid—cez, stront—ksenon, itr—jod, cyrkon—tellur itd.

Rozszczepienie jąder bardzo ciężkich pierwiastków tłumaczy teoria Bohra, według której budowę jądra należy pojmować w przybliżeniu tak, jak budowę kropli cieczy. Siły jądrowe działają na nadzwyczaj małych odległościach, wskutek czego każdy nukleon działa tylko na nukleony najbliższe. Nukleony znajdujące się wewnątrz jądra wskutek sił rozłożonych symetrycznie na wszystkie strony są niejako swobodne podobnie jak drobiny cieczy w znaczniejszej odległości od powierzchni. Natomiast nukleony znajdujące się na powierzchni jądra poddane są napięciu powierzchniowemu tak samo, jak drobiny cieczy na jej powierzchni. To napięcie powierzchniowe jest tym mniejsze, im większe jądro, a więc im mniejsza krzywizna jego powierzchni. Lecz prócz sił jądrowych działają jeszcze siły odpychania elektrostatycznego między protonami. Siły te stosunkowo powoli maleją z odległością. To sprawia, że energia wiązania jąder ciężkich przypadająca na jeden nukleon jest mniejsza niż jąder pierwiastków stojących w pobliżu środka układu Mendelejewa. W tych ostatnich energia dochodzi do 8,6 MeV na nukleon, podczas gdy w jądrach pierwiastków stojących na końcu układu periodycznego zbliża się do 7,5 MeV.

Gdy do jądra np. uranu ^{235}U zbliży się neutron, wtedy przyciągany silnie rozpędza się i dostaje się do jądra z dużym zapasem energii kinetycznej. Ta energia wskutek wzajemnych zderzeń rozdziela się między nukleony. Wskutek jakiejś przypadkowej asymetrii pędu jądro może się wydłużyć, a wtedy zaczyna wykonywać drgania, zmieniając periodycznie kształt z elipsoidy wydłużonej w spłaszczoną i na odwrót. Drgania te nie są znikające, gdyż siły elektrycz-

nego odpychania przy znacznych wydłużeniach jądra zyskują przewagę nad siłami jądrowymi. Zatem drgania się powiększają, aż wreszcie jądro przewęża się w jednym miejscu i w końcu rozrywa, dając początek dwu nowym jądrom. Ponieważ energia wiązania tych lżejszych jąder jest znacznie większa, to znaczy, bezwzględnie biorąc, energia tych jąder jest mniejsza o ilość mniej więcej 1 MeV na nukleon, więc przy tym rozpadzie wydziela się ogromna ilość energii, około 200 MeV na atom. Nie trudno obliczyć, że przy rozpadzie 1 gramatomu uranu, czyli 235 gramów, wydzieli się energia w ilości około 3 miliardów kilokalorii, czyli tyle, ile byśmy otrzymali przy spaleniu 500 ton węgla.

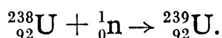
Jeżeli weźmiemy pod uwagę skład jąder atomów, które powstają przy rozszczepieniu jąder uranu, to natychmiast stwierdzimy, że musiałyby one zawierać wielki nadmiar neutronów. Tak np. jeżeli z uranu ^{235}U powstaje bar Ba i krypton Kr, to jak wiadomo, najcięższe stałe izotopy tych pierwiastków są



$$^{138}_{56}Ba \quad \text{oraz} \quad ^{86}_{36}Kr.$$

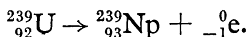
Liczba ich nukleonów jest 138 + 86 = 224, a więc jest o 11 mniejsza od liczby nukleonów w uranie 235. Utworzone przy rozpadzie jądra uranu nowe jądra będą nietrwałe i muszą się dalej rozpadać z wydzieleniem neutronów. Stwierdzono zresztą, że od razu przy samym rozpadzie jąder uranu zwykle emitowane są w przybliżeniu dwa neutrony. Te neutrony mogą oczywiście działać na sąsiednie jądra atomów uranu powodując również ich rozpad. Będzie to tzw. reakcja łańcuchowa, reakcja obejmująca coraz większą liczbę atomów. Liczba rozpadających się atomów wzrasta nadzwyczaj szybko, przy czym wydzielają się bardzo wielkie ilości energii.

27. 13. Pierwiastki transuranowe. Pierwiastki, które w tablicy Mendelejewa należy umieścić poza uranem, zostały wytworzone sztucznie. Wytwarzają się one z uranu przez przyłączenie neutronu i następne przemiany promieniotwórcze. W taki więc sposób powstaje pierwiastek o numerze 93 — neptun — drogą następujących reakcji:



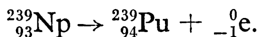
$$^{238}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{239}_{92}U.$$

Powstający izotop uranu ^{239}U jest beta-promieniotwórczy i przy rozpadzie zamienia się na pierwiastek neptun:



$$^{239}_{92}U \rightarrow ^{239}_{93}Np + ^{0}_{-1}e.$$

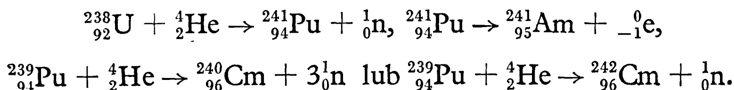
Wytworzony nowy pierwiastek neptun jest również beta-promieniotwórczy i ulega rozpadowi według wzoru:



$$^{239}_{93}Np \rightarrow ^{239}_{94}Pu + ^{0}_{-1}e.$$

Powstaje zatem nowy pierwiastek, pluton, stojący na 94 miejscu w tablicy Mendelejewa. Pluton jest alfa-promieniotwórczy z czasem połowicznego zaniku 24 000 lat.

Przy bombardowaniu uranu ^{238}U i plutonu ^{239}Pu cząstkami alfa oraz jądrami cięższych pierwiastków o wielkiej energii otrzymywanymi w cyklotronie stwierdzono powstawanie dalszych transuranowych pierwiastków. Dwa następne noszą nazwy: ameryk (Am) i kiur (Cm). Do ich wytworzenia prowadzą następujące reakcje:



$$^{238}_{92}U + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{241}_{94}Pu + {}^{1}_{0}n, \quad {}^{241}_{94}Pu \rightarrow {}^{241}_{95}Am + {}^{0}_{-1}e,$$

$$^{239}_{94}Pu + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{240}_{96}Cm + 3{}^{1}_{0}n \text{ lub } {}^{239}_{94}Pu + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{242}_{96}Cm + {}^{1}_{0}n.$$

Zadania

27.1. Jaką prędkość ma proton oraz cząstka alfa o energii kinetycznej $E_k = 1$ MeV?

Odpowiedź: $v = \frac{c}{mc^2 + E_k}\sqrt{(2mc^2 + E_k)\,E_k}$, $v_p = 1{,}38 \cdot 10^9$ cm/sec, $v_a = 6{,}84 \cdot 10^8$ cm/sec.

27.2. Jaką prędkość będzie miał pozyton o energii kinetycznej $E_k = 1$ MeV?

Odpowiedź: $2{,}82 \cdot 10^{10}$ cm/sec.

27.3. Jaka jest stała rozpadu λ i czas połowicznego zaniku pierwiastka promieniotwórczego, którego promieniowanie zmniejsza się w ciągu godziny o 10%, a produkt przemiany nie jest promieniotwórczy?

Odpowiedź: $\lambda = 2{,}93 \cdot 10^{-5}$ sec^{-1}, $T = 6{,}57$ godz.

27.4. Ile atomów rozpada się w 1 sekundzie w 1 g radu, jeżeli stała rozpadu $\lambda = 1{,}38 \cdot 10^{-11}$ sec^{-1}?

Odpowiedź: $3{,}7 \cdot 10^{10}$.

27.5. Ile mm³ w normalnych warunkach (760 Tr, 0° C) zajmie hel wydzielony w przeciągu roku przez 1 g radu?

Odpowiedź: 43,2 mm³.

27.6. Sód $^{23}_{11}Na$ bombardowany deuteronami zamienia się w promieniotwórczy izotop sodu $^{24}_{11}Na$ z okresem połowicznego rozpadu $T = 15{,}1$ godziny. Jaka część promieniotwórczego sodu pozostanie po upływie doby?

Odpowiedź: 33%.

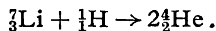
27.7. Jaka jest energia wiązania $^{6}_{3}Li$ (w ergach i elektronowoltach), jeżeli masa atomowa litu jest 6,01697, masa atomowa atomu wodoru = 1,00814, masa atomowa neutronu = 1,00898?

Odpowiedź: $51{,}23 \cdot 10^{-6}$ ergów = 32,02 MeV.

27.8. Ile wydzieli się ciepła przy wytworzeniu 1 g helu $^{4}_{2}He$ z protonów i neutronów? Ile kg węgla o wartości opałowej 6000 kcal/kg należałoby spalić, aby uzyskać tę samą ilość ciepła?

Odpowiedź: $1{,}66 \cdot 10^8$ kcal; około 27 tonn.

27.9. Protony o stosunkowo niewielkiej energii wywołują następującą reakcję jądrową:



$$^{7}_{3}Li + ^{1}_{1}H \rightarrow 2^{4}_{2}He\,.$$

Jaką energię będą miały obie cząstki alfa (energii protonu można nie uwzględniać, masa atomowa litu $^{7}_{3}Li = 7{,}0182$).

O d p o w i e d ź: $\approx 17{,}8$ MeV.

27. 10. Pod wpływem promieni gamma toru ThC′ o energii 2,62 MeV obserwuje się dezintegrację deuteronów na proton i neutron. Jaka będzie energia protonu i neutronu i kierunek ich biegu (nie uwzględniać pędu fotonu gamma)?

O d p o w i e d ź: Będą biec w przeciwne strony, każda cząstka będzie miała prawie taką samą energię $\approx 0{,}16$ MeV.

28. Promienie kosmiczne

Początek badaniom promieni kosmicznych dało spostrzeżenie drobnego i niepozornego faktu, że powietrze nad powierzchnią Ziemi przewodzi nieco ładunki elektryczne, jest zjonizowane, wskutek czego ciała naelektryzowane pozostawione w powietrzu tracą stopniowo swój ładunek. Z początku przypisywano to przewodnictwo powietrza jonizacji wywoływanej przez promieniowanie ciał promieniotwórczych zawartych w skorupie ziemskiej. Powinno ono w takim razie słabnąć w miarę oddalania się od powierzchni Ziemi. Jednak w roku 1911 fizyk austriacki Hess wznosząc się kilkakrotnie balonem wraz z przyrządami pomiarowymi stwierdził, że jonizacja powietrza maleje mniej więcej do wysokości 800 metrów, potem zaś zaczyna znowu wzrastać i na wysokości 5300 m jest sześć razy większa niż przy powierzchni Ziemi. Hess wyraził przypuszczenie, że tak znaczna jonizacja jest skutkiem jakiegoś promieniowania dochodzącego do Ziemi z obszarów pozaziemskich. Fakt wzrostu jonizacji powietrza z wysokością został następnie potwierdzony przez Kolhörstera (czyt. Kolcherster) i innych fizyków. Promieniowanie wywołujące tę jonizację zostało nazwane przez Millikana, który dokonał licznych pomiarów w tej dziedzinie, promieniowaniem kosmicznym. Promienie kosmiczne dochodzą do Ziemi równomiernie ze wszystkich stron, nie można wskazać żadnego miejsca sfery niebieskiej, z którego przychodziłoby więcej promieni kosmicznych niż z innych miejsc.

Zaraz na początku badań nad promieniami kosmicznymi powstał spór, czy promieniowanie to ma charakter falowy, czy korpuskularny. Ze względu na bardzo wielką przenikliwość promieni kosmicznych większość fizyków przypuszczała, że promienie kosmiczne są promieniowaniem elektromagnetycznym o jeszcze krótszej fali niż najtwardsze znane wówczas promienie gamma. W roku 1929 Bothe (czyt. Bote) i Kolhörster stwierdzili jednak, że promienie kosmiczne dają liczne koincydencje, tj. jednoczesne wyładowania w dwóch licznikach Geigera ustawionych jeden pod drugim. Stąd można było wnioskować, że promienie te mają charakter korpuskularny, bo tylko cząstka niosąca ładunek elektryczny może, przechodząc przez liczniki, jednocześnie wyzwolić z nich jony. Prawdopodobieństwo, żeby foton jednocześnie wyzwolił w dwóch licznikach elektrony, jest bardzo małe. Zdjęcia za pomocą komory Wilsona potwierdziły fakt, że promieniowanie to w przeważającej części składa się z cząstek.

W zjawisku promieni kosmicznych mamy szereg zagadnień do rozwiązania. A więc: gdzie i w jaki sposób powstają promienie kosmiczne, jakiej natury są pierwotne promienie dochodzące do atmosfery, jak się przekształcają w atmosferze ziemskiej i jakie w niej wywołują zjawiska. Pierwsze zagadnienie nie zostało jeszcze w zupełności wyświetlone. Stosunkowo najwięcej wiadomości mamy o zjawiskach wywoływanych w atmosferze.

Przede wszystkim stwierdzono, że natężenie promieni kosmicznych rośnie mniej więcej do wysokości 14 — 16 km. Na tej wysokości osiąga maksimum, a następnie szybko się zmniejsza aż do wysokości mniej więcej 50 km, po czym dalej przestaje się już zmieniać. Pomiary natężenia były wykonywane za pomocą przyrządów automatycznych wznoszących się w górę w pociskach rakietowych aż do wysokości 160 km.

Przy powierzchni Ziemi cząstki biegną głównie w kierunku pionowym z góry w dół, powyżej 50 km dochodzą równomiernie ze wszystkich stron. Przyczyną zjawiska, że cząstki w pobliżu powierzchni Ziemi biegną w przeważającej ilości pionowo, jest absorpcja cząstek w atmosferze. Cząstki biegnące pod kątami do pionu mają do przebiegnięcia w atmosferze drogę tym większą, im większe kąty z kierunkiem pionowym tworzą ich tory.

Badanie zależności natężenia promieni kosmicznych od szerokości geomagnetycznej (tzn. od odległości kątowej od równika magnetycznego) wykazało zmniejszenie się natężenia od 50 stopnia szerokości w kierunku ku równikowi. Wytłumaczyć ten fakt można działaniem pola magnetycznego ziemskiego, które chociaż słabe, rozciąga się na bardzo wielką przestrzeń poza granicami Ziemi. Pole to odchyla naładowane elektrycznie cząstki ku biegunom. Można stąd wywnioskować, że pierwotne promienie kosmiczne dochodzące z przestrzeni międzyplanetarnych są to cząstki niosące ładunki elektryczne.

Badania Johnsona (czyt. Dżonsona) wykonywane tzw. teleskopem licznikowym, tzn. układem koincydencyjnym, w którym kilka liczników ustawionych jest na jednej linii prostej, wykazały, iż z zachodu przychodzi więcej cząstek niż ze wschodu. Ponieważ pole magnetyczne ziemskie, tak jak każde pole magnetyczne, odchyla biegnące cząstki dodatnio naładowane w jedną stronę, a ujemne — w drugą, można stąd wnioskować, że w pierwotnym promieniowaniu przeważają cząstki dodatnie.

Najwięcej uzasadnioną obecnie jest hipoteza, że pierwotne promieniowanie kosmiczne składa się głównie z protonów. Protony rozpędzone przez niezbyt dobrze jeszcze wyjaśnione czynniki, możliwe, że przez jakieś zmienne pola magnetyczne istniejące na ogromnych obszarach w przestrzeniach międzygwiezdnych, wpadają w atmosferę z rozmaitymi energiami. Energie te są niekiedy bardzo wielkie i osiągają w poszczególnych wypadkach 10^{16}, a może nawet 10^{20} elektronowoltów. Napotykając w atmosferze liczne atomy powodują liczne i różnorodne przemiany jądrowe zużywające stopniowo ich ogromne energie. To, co obserwujemy na powierzchni Ziemi, jest wynikiem tych przemian.

W roku 1938 Anderson i Neddermeyer (czyt. Neddermajer) odkryli w promieniowaniu kosmicznym nową cząstkę mającą ładunek elementarny, lecz o masie pośredniej między masą elektronu i protonu. Nazwano ją mezonem (μέσοζ po grecku oznacza pośredni). Masa tego mezonu jest około 200 razy większa od masy elektronu. Później odkryto również mezony o większych masach.

Wspomniane wyżej przemiany jądrowe wywoływane przez pierwotne promienie kosmiczne prowadzą do wytwarzania mezonów, przy czym w jednym akcie może powstać kilka mezonów. Są to tzw. pęki jądrowe (przenikliwe). Wytworzone w tych aktach fotony są znowu źródłem tzw. pęków elektronowo-fotonowych (miękkich) zwanych też kaskadowymi.

Pęki elektronowo-fotonowe powstają w następujący sposób: gdy energia wytworzonego fotonu jest większa od 1,02 MeV, foton w polu jądra, przebiegając w jego pobliżu, może wytworzyć parę pozyton-negaton, a te biegną dalej w przybliżeniu w tym samym kierunku z wielkimi prędkościami. Każdy z elektronów może znowu wytworzyć foton, który daje początek nowej parze itd. W ten sposób liczba elektronów mnoży się. Powstaje to, co nazywamy pękiem, szersza lub węższa wiązka elektronów i fotonów. Energia stopniowo rozdrabnia się coraz bardziej dzieląc się między poszczególne elektrony i fotony. Gdy energia elektronów obniży się do 10^6 eV, wtedy zaczynają one tracić energię przez jonizację i pary się już tworzyć nie mogą. Wreszcie elektrony tracą całkowicie energię, zostają zahamowane. Na tym polega absorpcja promieni kosmicznych w atmosferze.

Pęki kaskadowe wytwarzają się również przy przechodzeniu szybkich elektronów lub fotonów przez ołów, platynę i inne ciała. W ciałach o takiej gęstości i o ciężkich atomach pęki kaskadowe rozwijają się na znacznie krótszej drodze niż w powietrzu.

Wskutek powstawania kaskad w atmosferze obserwuje się w promieniowaniu kosmicznym elektrony tak ujemne, jak i dodatnie. Pozyton został odkryty przez Andersona właśnie przy obserwacji promieni kosmicznych.

Mezony są bez porównania przenikliwsze od elektronów. Można bowiem wykazać, że straty energii, jakie biegnąca cząstka ponosi przez wypromieniowanie fotonów, są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu masy cząstki. Zaś jej straty na jonizację przy energii wyższej od 10^6 eV są również bardzo małe. Mezony stanowią zatem składową przenikliwą, albo t w a r d ą promieniowania kosmicznego. Dalsze badania wykazały, że istnieją mezony dodatnie, ujemne i neutralne oraz że mezony odkryte przez Andersona i Neddermeyera są promieniotwórcze o czasie połowicznego zaniku $2 \cdot 10^{-6}$ sec i rozpadają się na elektron i dwa neutrina.

Mezony udało się już wytworzyć sztucznie przez bombardowanie rozpędzonymi w synchrocyklotronie jonami tarcz z węgla, berylu i innych pierwiastków.

Pytania do powtórzenia materiału

1. Jakiego rodzaju promieniowania emitują ciała promieniotwórcze?
2. Jakie własności mają promienie alfa? beta? gamma?
3. Jak jest zbudowany i jak działa licznik Geigera-Müllera?
4. Na czym polega teoria rozpadu atomowego? Co nazywamy czasem połowicznego zaniku?
5. Jakie jest prawo równowagi promieniotwórczej dwóch pierwiastków promieniotwórczych?
6. Jakie istnieją rodziny ciał promieniotwórczych?
7. Jaki wniosek wynika z doświadczeń Rutherforda nad rozpraszaniem cząstek alfa?
8. Jakie cząstki są wyrzucane przy sztucznej dezintegracji atomów?
9. Jak się tłumaczy zjawiska naturalnej promieniotwórczości?
10. Jakie są własności promieni gamma i jak się tłumaczy ich powstawanie?
11. Jakie jest widmo promieni gamma i jak można je otrzymać?
12. Jakie są zjawiska sztucznej promieniotwórczości?
13. Do czego służą akceleratory? Jak jest zbudowany akcelerator liniowy?
14. Jaka jest budowa i działanie cyklotronu?
15. Jak można obliczyć energię wiązania jądra?
16. Jak się tłumaczy powstawanie par: pozyton—negaton?
17. Jaka jest zasada działania i budowa betatronu?
18. Jak się tłumaczy zjawiska rozszczepienia ciężkich atomów? reakcje łańcuchowe?
19. Jakie są własności promieniowania kosmicznego? Jakie wywołują one wtórne zjawiska?
20. Jakie cząstki cięższe od elektronów obserwuje się w promieniach kosmicznych?
21. Jakie wtórne zjawiska wywołują pierwotne promienie kosmiczne?

SKOROWIDZ

(liczby oznaczają strony)

ERRATA

Str.	Wiersz od góry	Wiersz od dołu	Jest	Powinno być
61	9		(3.17)	(3.20)
69		18	= 9,817 J	= 9,81 J
109	4		$\ldots - Fp_1 - Fl$	$\ldots - Fp_1 = Fl$
112		10	$M - Ff$	$M = Ff$
117	13, 14		$\ldots + M_{21})\,\Delta t$ $\ldots + M_{kl})\,\Delta t$	$\ldots + M_{1k})\,\Delta t$ $\ldots + M_{2l})\,\Delta t$
241	13		wyrażającego zasadę	wyrażającego I zasadę
328		7	$= \frac{1}{1 + \frac{v}{c}}$	$= \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} f$
472		12	$- \frac{n_2}{x} =$	$- \frac{n_1}{x} =$
565	4		zgodny z kierunkiem przyśpieszenia $\vec{a}$	prostopadły do *r* i do *H*
610		2	(24.33)	(23.33)
643		5	(wzór .42	(wzór 4.42
699		1	107 Mv	101 Mv 256

M. Jeżewski – *Fizyka*